КЫРГЫЗСКО – РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Федорова Е.С., Эгембердиев Ш.А.

ТИПОВЫЕ РАСЧЕТЫ ПО **«АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ»**

ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Издательство Кыргызско-Российского
Славянского университета
Бишкек – 2003

Типовые расчеты по аналитической геометрии для студентов экономических специальностей / Кыргызско-Российский Славянский университет. – Бишкек, 2003.-47с.

Составители: Е.С. Федорова, Ш.А. Эгембердиев

Печатается по решению кафедры математики
и РИСО КРСУ

Предисловие

Важным фактором усвоения математики и овладения ее методами является самостоятельное работа студента.

Система типовых расчетов активизирует самостоятельную работу студентов и способствует более глубокому изучению курса высшей математики.

Раздел математики «Аналитическая геометрия», изучаемый студентами 1 курса экономического факультета предусматривает один типовой расчет, который содержит 6 задач и охватывает все наиболее важные разделы программы курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Задачи для каждого студента группы индивидуальные (каждая задача составлена в 23 вариантах).

Выполнение студентами Типового расчета контролируется преподавателем путем его защиты. Во время защиты студент должен уметь правильно отвечать на теоретические вопросы, пояснять решения задач своего варианта, решать задачи аналогичного типа.

В настоящем пособии содержатся рабочие формулы и приводятся подробные решения всех типовых задач; указана литература.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Ведение.

I. В аналитической геометрии геометрические объекты (точки, линии, поверхности и т.д.) и их расположение на плоскости или в пространстве изучаются с помощью алгебры, т.е аналитически. Это удается сделать с помощью введенного Р. Декартом метода координат.

Метод координат позволяет простейший геометрический объект – точку – представить в виде упорядоченной системы чисел, называемых координатами этой точки. Всякий другой геометрический объект, например *линия* или *поверхность*, рассматривается как множество точек, обладающих некоторыми, только им присущими, свойствами. При переходе от одной точки геометрического объекта к другой координаты точки меняются, т.е. являются величинами переменными. Но они меняются не произвольно, а в соответствии с определенной закономерностью. Эта закономерность с помощью метода координат может быть аналитически выражена в виде уравнения или неравенства, связывающего переменные координаты каждой точки рассматриваемого геометрического объекта.

Таким образом, устанавливается соответствие между геометрическими объектами и уравнениями или неравенствами.

Уравнениями линии на плоскости, где введена система координат $x0y$, называется уравнение с переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки этой линии и только этой линии.

II. *Различные виды уравнений прямой линии на плоскости.*

1. *Общее уравнение прямой*: $Ax+By+C=0$. (1)

Особые случаи:

а) если $C=0,\ A\neq 0,\ B\neq 0$, то $y=-\frac{A}{B}x$ - прямая проходит через начало координат;

б) если $A=0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$, то $y=-\frac{C}{B}=b$ - прямая параллельна оси $0x$;

в) если $B=0,\ A\neq 0,\ C\neq 0$, то $x=-\frac{C}{A}=a$ - прямая параллельна оси $0y$;

г) если $A=C=0,\ B\neq 0$, то $By=0,\ y=0$ – уравнение оси $0x$;

д) если $B=C=0,\ A\neq 0$, то $Ax=0,\ x=0$ – уравнение оси $0y$.

2. *Уравнение прямой с угловым коэффициентом*: $y=kx+b$. (2)

Параметр k равен тангенсу угла α наклона прямой к оси $0x$ $(k=tg\alpha)$ и называется угловым коэффициентом прямой. Параметр b – величина отрезка на оси $0y$. Углом α наклона прямой к оси $0x$ называется угл между положительным направлением оси $0x$ и прямой, отчитываемый от оси $0x$ до прямой против движения часовой стрелки.

3. *Уравнения прямой в отрезках на осях*: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$. (3)

Здесь a и b – величины отрезков, отсекаемых прямой на осях координат.

4. *Уравнение пучка прямых, проходящих через данную точку* $M_0(x_0;y_0)$ *– центр пучка*: $y-y_0=k(x-x_0)$ (4)

5. *Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки* $A(x_1;y_1)$ *и* $B(x_2;y_2)$:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (5)$$

6. *Угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки* $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$: $K_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. (6)

7. *Каноническое уравнение прямой*: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}$. (7)

Здесь $M_0(x_0;y_0)$ – заданная точка (опорная точка), через которую прямая проходит; $\vec{S}=(m;n)$ – ненулевой вектор (направляющий вектор), которому прямая параллельна.

III. *Расстояние между двумя точками (длина отрезка).*

Деление отрезка в данном отношении. Площадь треугольника. Угол между прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Пересечение двух прямых. Расстояние от точки до прямой.

1. *Расстояние d между двумя точками* $A(x_1)$ *и* $B(x_2)$ *на оси*: $d=|x_2-x_1|$ (8)

2. *Расстояние d между двумя точками* $A(x_1;y_1)$ *и* $B(x_2;y_2)$ *на плоскости определяется как длина* $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$: $d=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (9)

3. Даны точки $A(x_1;y_1)$ и $B(x_2;y_2)$, являющиеся концами отрезка. Точка $K(x;y)$ делит отрезок AB в отношении $AK:KB=\lambda$. Координаты точки K определяется по формулам: $x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$; $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$. (10)

Если точка $K(x;y)$ делит отрезок AB пополам, то $x=\frac{x_1+x_2}{2}$; $y=\frac{y_1+y_2}{2}$. (11)

4. *Площадь треугольника с вершинами* $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ *и* $C(x_3;y_3)$:

$$S=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}\right|. \qquad (12)$$

5. Угол φ, отсчитанный против движения часовой стрелки от прямой $y=k_1x+b_1$ до прямой $y=k_2x+b_2$: $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$. (13)

Для прямых, заданных уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$:

$$tg\varphi=\frac{A_1B_2-A_2B_1}{A_1A_2+B_1B_2}. \qquad (14)$$

6. *Условие параллельности двух прямых*: $k_1=k_2$ (15)

или $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$. (16)

7. *Условие перпендикулярности двух прямых*: $k_2=-\frac{1}{k_1}$ (17)

или $A_1A_2+B_1B_2=0$ (18)

8. *Условие слияние двух прямых* $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2} \qquad (19)$$

9. *Условие пересечения двух прямых* $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$:

$$\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2} \qquad (20)$$

10. Если прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$ пересекаются, то точка $M_0(x_0;y_0)$ их пересечения находится путем решения системы уравнений:

$$\begin{cases} A_1x_0+B_1y_0+C_1=0, \\ A_2x_0+B_2y_0+C_2=0. \end{cases} \qquad (21)$$

11. Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}. \qquad (22)$$

IV. Кривые второго порядка.

1. <u>*Окружность.*</u>

а) Уравнение окружности с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом R:

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (23)$$

б) Уравнение окружности с центром в точке $C(x_0;y_0)$ и радиусом R:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2. \qquad (24)$$

в) Общее уравнение окружности: $x^2+y^2+ax+by+c=0$ (25)

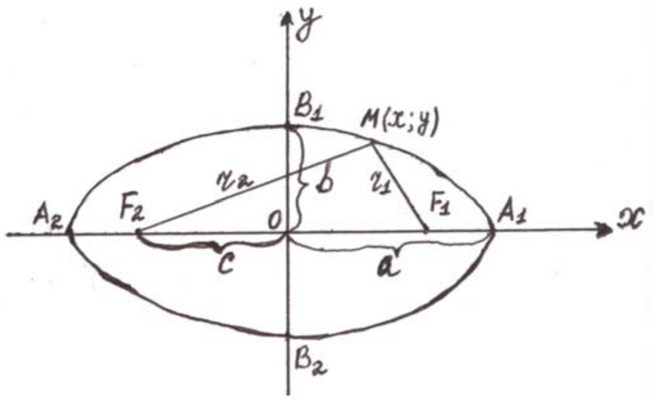
г) Чтобы от уравнения (25) перейти к уравнению (24), нужно в левой части уравнения (25) выделить полные квадраты: $(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$.

2. <u>*Эллипс.*</u>

а) Каноническое (простейшее) уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. (26)

Здесь a и b – полуоси эллипса; $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ – вершины.

$e=\frac{c}{a}<1$. (27)



б) Если $a>b$, то $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ – фокусы эллипса, причем

$c=\sqrt{a^2-b^2}$; (28)

$e=\frac{c}{a}<1$ - эксцентриситет эллипса; (29)

$x=\pm\frac{a}{e}$ - уравнения директрис эллипса. (30)

$r_1=a-ex$, $r_2=a+ex$ – расстояние от точки $M(x;y)$ эллипса до его фокусов (фокальные радиус – векторы) в) Если $a< b$, то $F_1(0;c)$, $F_2(0;-c)$ – фокусы эллипса, причем $c=\sqrt{b^2-a^2}$; (31)

$e=\frac{c}{b}<1$ - эксцентриситет эллипса; (32)

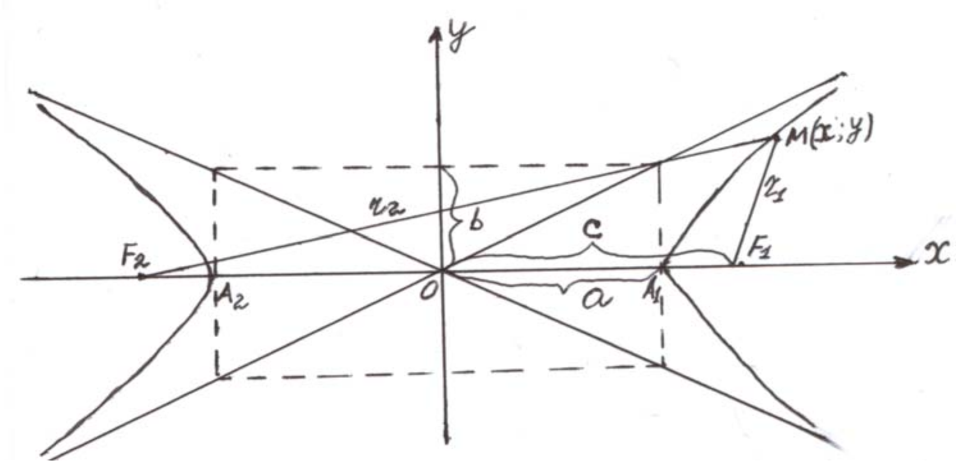
$x=\pm\frac{b}{e}$ - уравнения директрис эллипса. (33)

$r_1=b-ey$, $r_2=b+ey$ – расстояние от точки $M(x;y)$ эллипса до его фокусов (фокальные радиус – векторы).

3. *Гипербола*.

а) Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (34)

где a – действительная полуось, b – мнимая полуось гиперболы.



б) $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$- вершины гиперболы; $O(0;0)$ – центр гиперболы.

в) $F_1(c;0)$, $F_2(-c;0)$ – фокусы гиперболы, причем $c=\sqrt{a^2+b^2}$. (35)

г) $e=\frac{c}{a}>1$ - эксцентриситет гиперболы (36)

д) $y=\pm\frac{b}{a}$ - уравнения асимптот гиперболы. (37)

е) $x=\pm\frac{a}{e}$ - уравнения директрис гиперболы. (38)

ж) $r_1=|ex-a|$, $r_2=|ex+a|$ – расстояния от точки $M(x;y)$ гиперболы до ее фокусов (фокальные радиус – векторы);

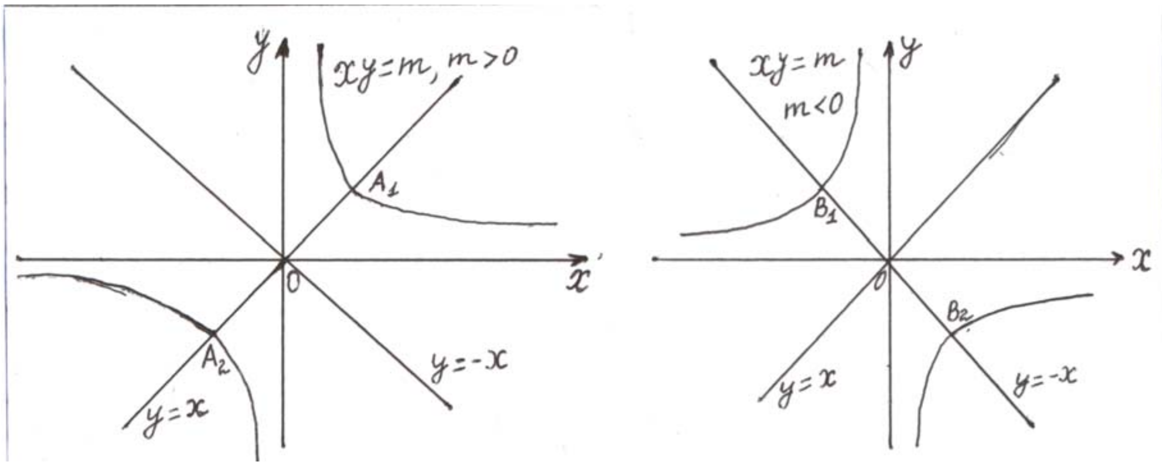
з) если $a=b$, то гипербола называется равносторонней: $x^2-y^2=a^2$; (39)

и) гипербола, определяемая уравнением $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, (40)

называется сопряженной гиперболе (34).

В экономических исследованиях чаще всего применяют гиперболу, которая задается уравнением $y=\frac{m}{x}$ или $xy=m$. (41)

Это уравнение выражает обратную пропорциональную зависимость между переменными x и y.



I. Если $m>0$, то график гиперболы, состоящий из двух ветвей, расположен в первой и третей координатных четвертях.

а) $O(0;0)$ – центр гиперболы;

б) $y=x$ – действительная ось симметрии; $y=-x$ – мнимая ось симметрии гиперболы;

в) $A_1(\sqrt{m};\sqrt{m})$, $A_2(-\sqrt{m};-\sqrt{m})$ - вершины гиперболы;

г) $y=0$, $x=0$ – уравнения асимптот гиперболы.

II. Если $m<0$, то график гиперболы, состоящий из двух ветвей, расположен во второй и четвертой координатных четвертях.

а) $O(0;0)$ – центр гиперболы;

б) $y=-x$ – действительная; $y=x$ – мнимая ось симметрии гиперболы;

в) $B_1(-\sqrt{-m};\sqrt{m})$, $B_2(\sqrt{-m};-\sqrt{-m})$, - вершины гиперболы;

г) $y=0$, $x=0$ – уравнения асимптот гиперболы.

III. Графиком дробно – линейной функции $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$, (42)

где $c\neq 0$, $bc-ad\neq 0$ служит гипербола.

В самом деле, $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a(x+\frac{b}{a})}{c(x+\frac{d}{c})}=\dfrac{a+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{c(x+\frac{d}{c})}=\dfrac{a}{c}(1+\dfrac{\frac{bc-ad}{ac}}{x+\frac{d}{c}})=\dfrac{a}{c}+\dfrac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$

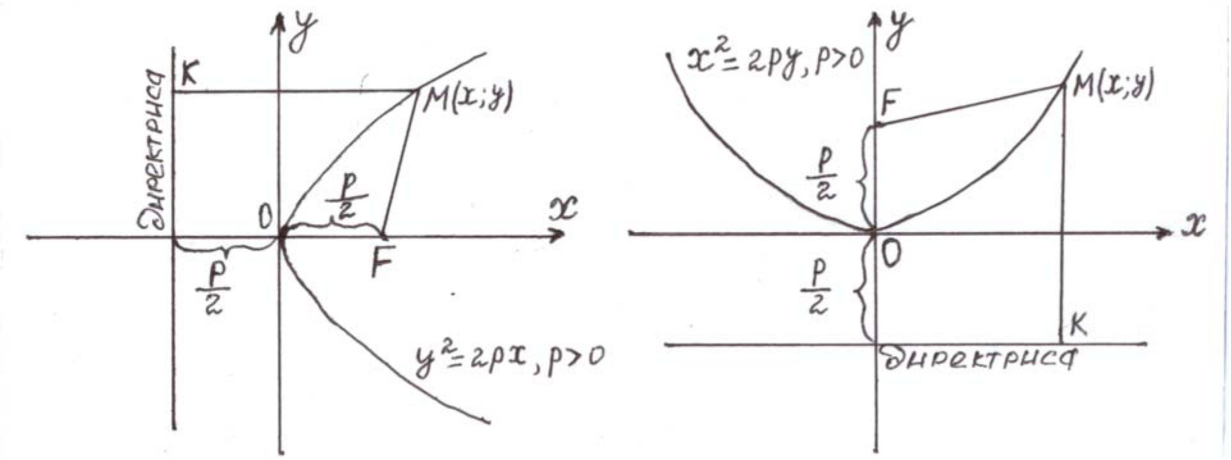
или $y-\dfrac{a}{c}=\dfrac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$. Пологая $x+\dfrac{d}{c}=X$, $y-\dfrac{a}{c}=Y$, $\dfrac{bc-ad}{c^2}=m\neq 0$, получим

$Y=\dfrac{m}{X}$ - уравнение гиперболы в новой системе координат $XO'Y$, которая получается из старой системы xOy, в которой задана гипербола уравнением (40), путем параллельного переноса координатных осей в точку $O'(-\frac{d}{c};\frac{a}{c})$.

4. *Парабола*.

а) Каноническое уравнение параболы: $y^2=2px$ (43)

или $x^2=2py$ (44)



б) Если в уравнении (43) $p>0$, то парабола расположена в первой и четвертой координатных четвертях. В этом случае: $F(\frac{p}{2};0)$ – фокус; $O(0;0)$ – вершина; $x=-\frac{p}{2}$ - уравнение директрисы; $y=0$ – уравнение оси симметрии.

в) Если в уравнении (43) $p<0$, то парабола расположена во второй и третьей координатных четвертях. В этом случае: $F(-\frac{|p|}{2};0)$ – фокус; $O(0;0)$ – вершина; $x=\frac{|p|}{2}$ - уравнение директрисы; $y=0$ – уравнение оси симметрии.

г) Если в уравнении (44) $p<0$, то парабола расположена в третьей и четвертой координатных четвертях. В этом случае: $F(0;-\frac{|p|}{2})$ – фокус; $O(0;0)$ – вершина; $y=\frac{|p|}{2}$ - уравнения директрисы; $x=0$ – уравнение оси симметрии.

д) Каждая произвольная точка $M(x;y)$ параболы (43) или (44) одинакова удалена от фокуса и от директрисы, т.е. $|MK|=|MF|$.

е) Графиком квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$ (45)
служит парабола.

В самом деле, преобразуем (45).

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + a*\frac{4ac-b^2}{4a^2} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

или $y - \frac{4ac-b^2}{4a} = a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2$.

Пологая $x+\frac{b}{2a}=X$, $y-\frac{4ac-b^2}{4a}=Y$, $a=2p$, получим уравнение $Y=2pX^2$ – каноническое, уравнение параболы в новой системе координат $XO'Y$, которая получается из старой $x0y$, в которой задан квадратный трехчлен (45), путем параллельного переноса координатных осей в точку $O'(-\frac{b}{2a};\frac{4ac-b^2}{4a})$.

V. *Плоскость и прямая в пространстве.*

1. Общее уравнение плоскости: $Ax+By+Cz+D=0$, (46)

где $A^2+B^2+C^2\neq 0$. Вектор $\vec{n}=(A;B;C)$ перпендикулярен плоскости и называется <u>*нормальным вектором*</u> плоскости .

2. Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$, называемую опорной , и перпендикулярной к вектору $\vec{n}=(A;B;C)$:

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (47)$$

3. Уравнение плоскости в отрезках на осях: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. (48)

4. Расстояние d от точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле : $d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. (49)

5. Канонические уравнения прямой $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$, (50)

здесь $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – точка (опорная точка), через которую проходит прямая; $\vec{S}=(l;m;n)$ - направляющий вектор прямой, т.е. вектор, которому прямая параллельна.

6. Параметрические уравнения прямой:

$$\begin{cases} x=x_0+lt, \\ y=y_0+mt, \\ z=z_0+nt. \end{cases} \qquad (51)$$

7. Уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. (52)

8. Общие уравнения прямой:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases} \qquad (53)$$

VI. *Гиперплоскость и полупространство n – мерного пространства.*

1. Гиперплоскостью (или просто плоскостью в n – мерном пространстве R^n) называют множество всех точек $(x_1,x_2, \ldots, x_n)$ n – мерного пространства, удовлетворяющих линейному уравнению $A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n=B$ (54)

или в векторной форме $\vec{A}\vec{X}=B$, (55)

где $\vec{A}=(A_1;A_2;\ldots;A_n)$, $\vec{X}=(x_1;x_2;\ldots;x_n)$.

2. Гиперплоскость (54) делит n – мерное пространство на две части, каждая из которых называется <u>*полупространством*</u> n – мерного пространства

$A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n\leq B$ или (56)

$A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n\geq B$ или (57)

В векторной форме $\vec{A}\vec{X}\leq B$, $\vec{A}\vec{X}\geq B$. (58)

В частности, плоскость $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=b$ в трехмерном пространстве R^3 делит его на два полупространства $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\leq b$ и $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\geq b$, для каждого из которых заданная плоскость является границей.

Прямая $a_1x_1+a_2x_2=b$ в двумерном пространстве R^2 делит его на две полуплоскости $a_1x_1+a_2x_2\le b$ и $a_1x_1+a_2x_2\ge b$, для каждой из которых заданная прямая является границей.

VII. *Выпуклые множества.*

1. Точка A из n – мерного пространства называется *линейной выпуклой комбинацией* точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ этого же пространства, если

$A=\alpha_1A_1+\alpha_2A_2+\ldots+\alpha_nA_n,$ (59)

где $\alpha_i\ge 0,\ i=1,2,\ldots n,\ \sum_{i=1}^{n}\alpha_i=1.$

2. Множество точек n – мерного пространства называется выпуклым (выпуклым телом), если оно вместо с любыми двумя своими точками содержит их произвольную выпуклую линейную комбинацию (иначе, если оно вместе с двумя своими произвольными точками содержит и отрезок, их соединяющий).

Примеры выпуклых тел: отрезок, луч, прямая, полуплоскость, плоскость, круг, треугольник, полукруг, угол, эллипс, шар, куб, полупространство пространства R^n, пространство R^n и т.д.

3. Пересечение (общая часть) конечного числа выпуклых множеств есть множество выпуклое.

4. Различают внутренние, граничные и угловые точки выпуклого множества. Расстояние между двумя точками M_1 и M_2 будем обозначать $\rho(M_1,M_2)$. Тогда если ε - некоторое положительное число, то ε - окрестностью точки M_0 в пространстве R^n называют множество всех точек $M\in R^n$ таких что $\rho(M,M_0)<\varepsilon$.

В частности, в пространстве R^1 ε - окрестностью точки a есть $(a-\varepsilon\,;\,a+\varepsilon)$; в пространстве R^2 ε - окрестность точки $M_0(x_0;y_0)$ есть внутренность круга радиуса ε с центром в точке $M_0(x_0;y_0)$; в пространстве R^3 ε - окрестность точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$ есть внутренность шара радиуса ε с центром в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$.

Внутренней точкой выпуклого множества называется точка, для которой существует сколь угодно малая ε - окрестность, содержащая только точки данного множества.

Точка выпуклого множества называется *граничной*, если любая сколь угодна малая ε - окрестность этой точки содержит как точки, принадлежащие данному множеству, так и точки, не принадлежащие ему.

Граничные точки выпуклого множества образуют его границу. Множество, содержащее все свои граничные точки, называется *замкнутым*. Выпуклое *множество* называется *ограниченным*, если все его точки находятся на конечном расстоянии от начала координат; в противном случае – *неограниченным*.

Угловой точкой выпуклого множества называется точка, не являющаяся выпуклой линейной комбинацией двух других точек этого множества, иными словами, если она не лежит на отрезке, соединяющим две другие точки этого множества.

5. Теорема о представлении выпуклого многогранника (полиэдра в пространстве R^n).

Выпуклым n – мерным многогранником (полиэдром) в пространстве R^n называется выпуклое, замкнутое, ограниченное множество, имеющее конечное число угловых точек.

Например, в пространстве R^2: отрезок, треугольник, прямоугольник, квадрат и др.; в пространстве R^3: тетраэдр, призма и др.

Т Е О Р Е М А: Любая внутренняя точка полиэдра в пространстве R^n является выпуклой линейной комбинацией его угловых точек.

Из этой теоремы следует, что выпуклый многогранник порождается своими угловыми точками. В частности треугольник на плоскости представим в виде $\alpha A+\beta B+\gamma C=M$, где $M(x;y)$ – любая внутренняя точка треугольника ABC, $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$, $\gamma\geq 0$, $\alpha+\beta+\gamma=1$.

VIII. *Системы линейных неравенств и уравнений.*

Пусть задана система неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ -------------- \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{cases} \qquad (60)$$

Каждое неравенство этой системы имеет своим геометрическим образом полупространства пространства R^n, т.е. выпуклое множество. Решить систему (60) – значит найти пересечение (общую часть) всех m полупространств. Но пересечение конечного числа выпуклых множеств есть множество выпуклое . Поэтому решением системы (60) служит выпуклое множество, если только система совместна.

В приложениях часто приходится находить решения систем линейных неравенств (60) или смешанных систем, состоящих из линейных уравнений и неравенств с большим числом неизвестных. В этих случаях построить графическое изображение множества решений нельзя. Но задачу можно свести к решению эквивалентной системы, содержащий только линейные уравнения, а такие системы решаются, например, методом Гаусса. Основанием указанного преобразования служит следующее утверждение: всякому решению $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ неравенства $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\leq b$ (или $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\geq b$) соответствует вполне определенное решение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ уравнения $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+x_{n+1}=b$ (или $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n-x_{n+1}=b$), где $x_{n+1}\geq 0$.

В связи с этим систему (60) можно заменить эквивалентной системой из $n+m$ линейных уравнений, в которой будет m дополнительных неотрицательных неизвестных: $x_{n+i}\geq 0.$, $i=1,2,\ldots,m$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ ------------------ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \quad (61)$$

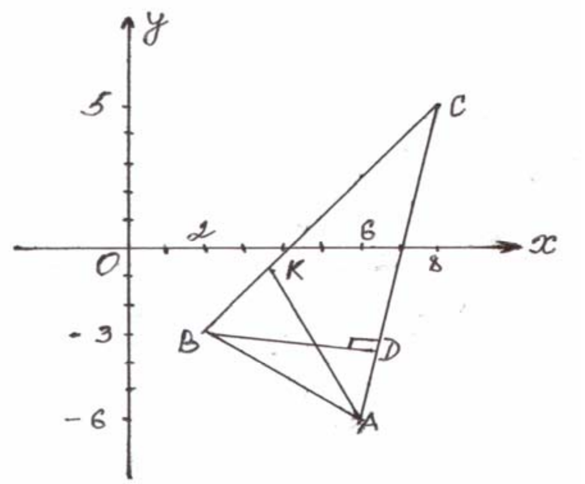
Переход от системы линейных уравнений к эквивалентной системе неравенств осуществляется на основе следующего утверждения:

всякому решению $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$ уравнения $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+x_{n+1}=b$ (или $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n-x_{n+1}=b$) и неравенства $x_{n+1}\geq 0$ соответствует единственное решение $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ неравенства $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\leq b$ (или $a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n\geq b$).

Р е ш е н и е т и п о в ы х з а д а ч

Задача 1. Даны координаты вершин треугольника *ABC*: *A(6;-6), B(2;-3), C(8;5)*. Требуется: 1) составить уравнение стороны *AB*; 2) найти длину стороны *AB*; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины *B*; 4) вычислить расстояние от вершины *C* до стороны *AB*; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла *A*; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника *ABC*; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно стороне *BC*; 8) найти площадь треугольника *ABC*; 9) вычислить угол *A* треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.

Решение:



1. Для составления уравнения стороны *AB* используем формулу (5), где *A(6;-6), B(2;-3)*: $\frac{y-(-6)}{-3-(-6)}=\frac{x-6}{2-6}$ или $\frac{y+6}{3}=\frac{x-6}{-4}$ или $-4y-24=3x-18$ или $3x+4y+6=0$.

2. Для нахождения длины *AB* используем формулу (9):

$d=\left|\vec{AB}\right| = \sqrt{(2-6)^2+(-3-(-6))^2} =$

$=\sqrt{16+9} = 5$ (ед. дл.).

3. Для составления уравнения высоты *BD* используем условие перпендикулярности прямых *BD* и АС, т.е. формулу (17): $K_{BD}*K_{AC}=-1$. Найдем K_{AC}, используя формулу (6). $K_{AC}=\frac{5-(-6)}{8-6}=\frac{11}{2}$;

$K_{BD}=-\frac{1}{11/2}=-\frac{2}{11}$. Составим уравнение высоты *BD* по формуле (4), зная, что $K_{BD}=-\frac{2}{11}$ и что она проходит через точку *B(2;-3)*.

$y-(-3)= -\frac{2}{11}(x-2)$ или $11y+33=-2x+4$ или $2x+11y+29=0$.

4. Расстояние от вершины *C(8;5)* до стороны *AB*, уравнение которой было найдено в п.1: *3x+4y+6=0*, найдем по формуле (22):

$$d=\frac{|3*8+4*5+6|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{50}{5}=10 \text{ (ед.дл.)}.$$

5. Биссектриса угла в треугольнике делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Пусть *AK* – биссектриса угла *A* треугольника *ABC*. Тогда $\frac{|BK|}{|KC|}=\frac{|AB|}{|AC|}=\lambda$. Найдем длину стороны *AC* по формуле (9): $|AC|=\sqrt{(8-6)^2+(5-(-6))^2}=\sqrt{4+121}=\sqrt{125}=5\sqrt{5}$ *(ед.дл.)*. Длина стороны *AB* была найдена в п. 2 и составила *|AB|=5 (ед.дл.)*. Следовательно, $\lambda=\frac{5}{5\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$.
Найдем координаты точки *K,* используя формулу (10):

$$x_K=\frac{x_B+\lambda x_C}{1+\lambda}=\frac{2+\frac{1}{\sqrt{5}}*8}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{2\sqrt{5}+8}{1+\sqrt{5}};\quad y_K=\frac{y_B+\lambda y_C}{1+\lambda}=\frac{-3+\frac{1}{\sqrt{5}}*5}{1+\frac{1}{\sqrt{5}}}=\frac{-3\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}}.$$

Т.о., $K\left(\frac{2\sqrt{5}+8}{1+\sqrt{5}};\frac{-3\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}}\right)$.

Составим уравнение биссектрисы угла *A*, используя формулу (5):

$$\frac{y-(-6)}{\frac{-3\sqrt{5}+5}{1+\sqrt{5}}-(-6)}=\frac{x-6}{\frac{2\sqrt{5}+8}{1+\sqrt{5}}-6} \quad \text{или} \quad \frac{y+6}{3\sqrt{5}+11}=\frac{x-6}{2-4\sqrt{5}} \quad \text{или}$$

$(3\sqrt{5}+11)x+(4\sqrt{5}-2)y+6\sqrt{5}-78=0.$

6. Составим, например, уравнение средней линии *MN* треугольника *ABC*. Найдем средину (т.*M*) стороны *CB* и средину (т.*N*) стороны *CA*, используя формулы (11).

$$x_M=\frac{x_C+x_B}{2}=\frac{8+2}{2}=5;\quad y_M=\frac{y_C+y_B}{2}=\frac{5-3}{2}=1;$$

$$x_N=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{6+8}{2}=7;\quad y_N=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-6+5}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Т.о., *M(5;1)*, $N(7;-\frac{1}{2})$.

Составим уравнение *MN*, используя формулу (5): $\frac{y-1}{-\frac{1}{2}-1}=\frac{x-5}{7-5}$ или $\frac{y-1}{-\frac{3}{2}}=\frac{x-5}{2}$ или $\frac{y-1}{-3}=\frac{x-5}{4}$ или *4y-4=-3x+15* или *3x+4y-19=0*.

7. Для составление уравнения прямой, проходящей через точку *A(6;-6)* параллельно прямой *BC*, используем условие параллельности двух прямых (формулу (15)). Найдем угловой коэффициент прямой *BC* по формуле (6):

$K_{BC}=\frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}=\frac{5-(-3)}{8-2}=\frac{4}{3}$. Тогда $K=K_{BC}=\frac{4}{3}$.

Уравнение искомой прямой найдем по формуле (4): $y-(-6)=\frac{4}{3}(x-6)$ или *3y+18=4x-24* или *4x-3y-42=0.*

8. Площадь треугольника *ABC* найдем по формуле (12): $S=\frac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}6 & -6\\ 2 & -3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 8 & 5\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|-8-(-12)+10-(-24)\right|=\frac{1}{2}*38=19$ *(кв.ед.)*.

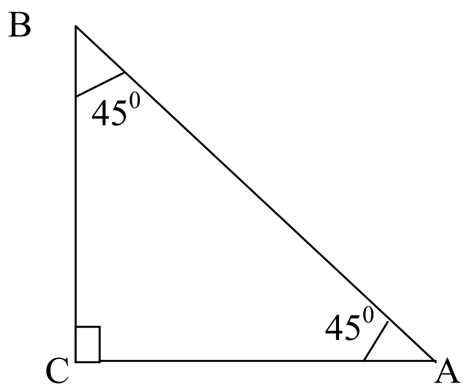
9. Для вычисления угла *A* треугольника *ABC* используем формулу (13). Найдем сначала K_{AB}, зная уравнение *AB*: $3x+4y+6=0$. Преобразуем это уравнение к виду $y=kx+b$: $4y=-3x-6$ или $y=-\frac{3}{4}x-\frac{3}{2}$. Отсюда $K_{AB}=-\frac{3}{4}$. Угловой коэффициент прямой *AC* был найден в п.3: $K_{AC}=\frac{11}{2}$. Заметим, что $K_1=K_{AC}$; $K_2=K_{AB}$.

Следовательно, $tgA=\frac{-\frac{3}{4}-\frac{11}{2}}{1+(-\frac{3}{4})*\frac{11}{2}}=2$ или $arctgA=2$; $\angle A\approx 1{,}11$*рад.*

Задача 2. Найти вершины прямоугольного равнобедренного треугольника, если дана вершина прямого угла $C(3;-1)$ и уравнение гипотенузы $3x-y+2=0$.

Решение

Сделаем схематический рисунок.



Т.к. треугольник прямоугольный и равнобедренный $(|AC|=|BC|)$, то $\angle A=\angle B=45^0$.

Пусть $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$.

Тогда, т.к. точки *A* и *B* принадлежат гипотенузе $3x-y+2=0$, то их координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$3x_1-y_1+2=0 \ (*) \text{ и } 3x_2-y_2+2=0 \quad (**).$$

Найдем угловые коэффициенты всех сторон треугольника:

K_{AB}: $3x-y+2=0$ или $y=3x+2$, отсюда $K_{AB}=3$.

K_{AC} найдем по формуле (6): $K_{AC}=\frac{-1-y_1}{3-x_1}$; K_{BC} найдем по формуле (6): $K_{BC}=\frac{-1-y_2}{3-x_2}$.

Используем формулу (13): $tg\angle A=\frac{K_{AC}-K_{AB}}{1+K_{AC}K_{AB}}$; $tg\,45^0=\frac{\frac{-1-y_1}{3-x_1}-3}{1+\frac{-1-y_1}{3-x_1}*3}$ или

$1=\frac{3x_1-y_1-10}{-x_1-3y_1}$ или $2x_1+y_1=5$. (***)

Решая совместно уравнения (*) и (***), получим $\begin{cases}3x_1 - y_1 + 2 = 0,\\ 2x_1 + y_1 - 5 = 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x_1 = 3,\\ y_1 = 3x_1 + 2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_1 = \dfrac{3}{5},\\ y_1 = \dfrac{19}{5}.\end{cases} \Rightarrow$ A$(\frac{3}{5};\frac{19}{5})$.

Аналогично, по формуле (13): $tg\angle B = \dfrac{3 - \dfrac{-1 - y_2}{3 - x_2}}{1 + \dfrac{-1 - y_2}{3 - x_2} * 3}$ или

$tg\ 45^0 = \dfrac{-3x_2 + y_2 + 10}{-x_2 - 3y_2}$ или $-x_2+2y_2+5=0$ (****).

Решая совместно уравнения (**) и (****), получим $\begin{cases}3x_2 - y_2 + 2 = 0,\\ -x_2 + 2y_2 + 5 = 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_2 = -\dfrac{9}{5},\\ y_2 = -\dfrac{17}{5}.\end{cases} \Rightarrow B(-\frac{9}{5};-\frac{17}{5})$.

Задача 3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

а) $7y^2-70y+4x+179=0$; б) $2x^2-8x-3y+8=0$; в) $y=\dfrac{-5x+2}{3x-1}$.

Решение

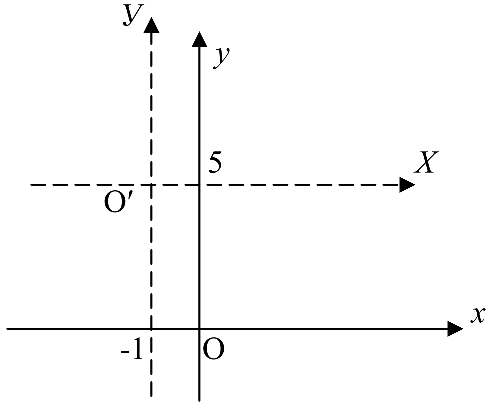
а) Преобразуем заданное уравнение $7y^2-70y+4x+179=0$:

$7(y^2-10y+25-25)+4x+179=0 \Leftrightarrow 7(y-5)^2-175+4x+179=0 \Leftrightarrow 7(y-5)^2+4x+4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7(y-5)^2= -4\ (x+1) \Leftrightarrow (y-5)^2= -\frac{4}{7}(x+1)$. Пологая $x+1=X$, $y-5=Y$, получим каноническое уравнение параболы $Y^2=-\frac{4}{7}X$, где $2p=-\frac{4}{7}$; $p=-\frac{2}{7}$, в новой системе координат $XO'Y$.

Здесь $\begin{cases}x = X - 1,\\ y = Y + 5.\end{cases}$ - формулы перехода от новой системы к старой.

Система $XO'Y$	Система $x0y$
1. $Y^2=-\frac{4}{7}X$ – парабола.	1. $7y^2-70y+4x+179=0$ – парабола.
2. $Y=0$ – ось симметрии.	2. $y=5$ – ось симметрии.
3. $O'(0;0)$ – вершина.	3. $O'(-1;5)$ – вершина.
4. $F(-\frac{1}{7};0)$ – фокус.	4. $F(-\frac{8}{7};5)$ – фокус.
5. $X=\frac{1}{7}$ - директриса.	5. $x=-\frac{6}{7}$ - директриса.



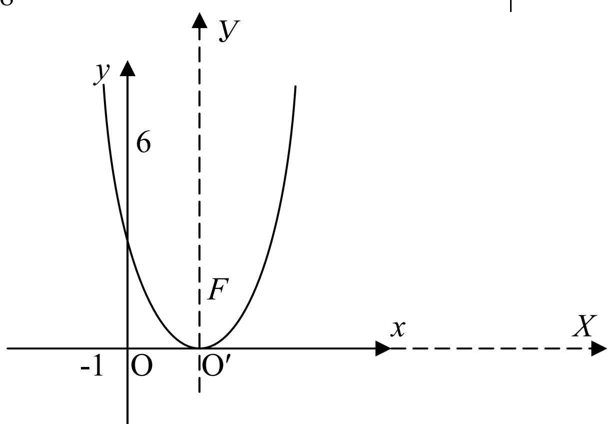
б) Преобразуем заданное уравнение $2x^2-8x-3y+8=0$:

$2(x^2-4x+4-4)-3y+8=0 \Leftrightarrow 2(x-2)^2-8-3y+8=0 \Leftrightarrow 2(x-2)^2-3y=0 \Leftrightarrow (x-2)^2=\frac{3}{2}y.$

Полагая $x-2=X$, $y=Y$, получим $X^2=\frac{3}{2}Y$ – каноническое уравнение параболы в системе координат $XO'Y$. Она расположена в первой и второй координатных четвертях этой системы, причем $2p=\frac{3}{2}$, $p=\frac{3}{4}$.

$\begin{cases} x = X + 2, \\ y = Y. \end{cases}$ - формулы перехода от новой системы координат $XO'Y$ к старой системе $x0y$.

Система $XO'Y$	Система $x0y$
1. $X^2=\frac{3}{2}Y$ – парабола.	1. $2x^2-8x-3y+8=0$– парабола.
2. $X=0$ – ось симметрии.	2. $x=2$ – ось симметрии.
3. $O'(0;0)$ – вершина.	3. $O'(2;0)$ – вершина.
4. $F(0;\frac{3}{8})$ – фокус.	4. $F(2;\frac{3}{8})$ – фокус.
5. $Y=-\frac{3}{8}$ - директриса.	5. $y=-\frac{3}{8}$ - директриса.



в) Преобразуем уравнение $y=\frac{-5x+2}{3x-1}$:

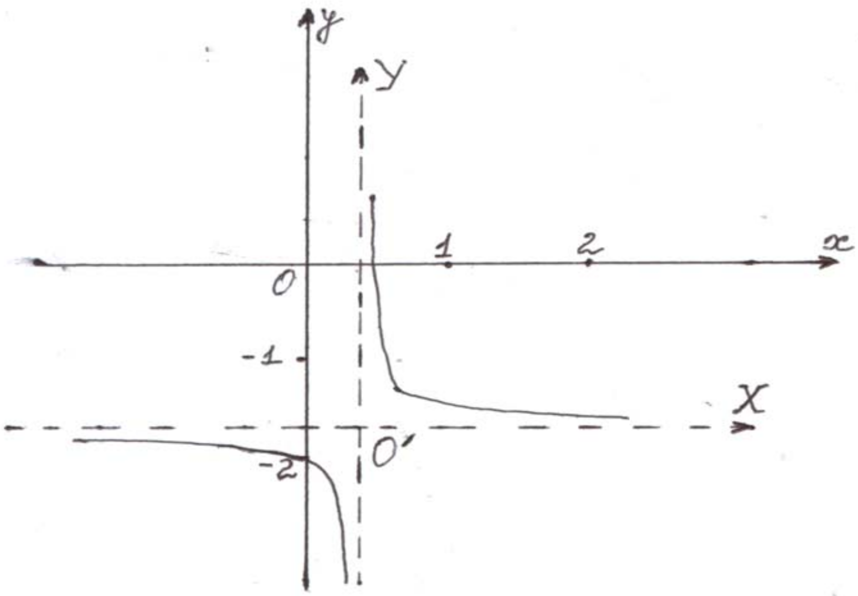
$$y=\frac{-5(x-\frac{2}{5})}{3(x-\frac{1}{3})}=-\frac{5}{3}\frac{(x-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{5})}{x-\frac{1}{3}}=-\frac{5}{3}\left(1+\frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{5}}{x-\frac{1}{3}}\right)=-\frac{5}{3}\left(1+\frac{-\frac{1}{15}}{x-\frac{1}{3}}\right)=-\frac{5}{3}+\frac{\frac{5}{3}*\frac{1}{15}}{x-\frac{1}{3}}=$$

$$=-\frac{5}{3}+\frac{\frac{1}{9}}{x-\frac{1}{3}} \text{ или } y+\frac{5}{3}=\frac{\frac{1}{9}}{x-\frac{1}{3}}.$$

Полагая $x-\frac{1}{3}=X$, $y+\frac{5}{3}=Y$ получим $Y=\frac{\frac{1}{9}}{X}$ или $XY=\frac{1}{9}$ - каноническое уравнение равносторонней гиперболы в системе $XO'Y$. Она расположена в первой и третьей координатных четвертях.

$\begin{cases} x = X+\frac{1}{3}, \\ y = Y-\frac{5}{3}. \end{cases}$ - формулы перехода от новой системы координат $X0'Y$ к старой системе $x0y$.

Система $XO'Y$	Система $x0y$
1. $XY=\frac{1}{9}$ – гипербола.	1. $y=\frac{-5x+2}{3x-1}$ – гипербола.
2. $Y=X$ – действительная ось симметрии.	2. $x-\frac{1}{3}=y+\frac{5}{3}$ или $x-y-2=0$ – действительная ось симметрии.
3. $O'(0;0)$ –центр гиперболы.	3. $O'(\frac{1}{3};-\frac{5}{3})$ – центр гиперболы.
4. $X=0$; $Y=0$ – асимптоты гиперболы.	4. $x=\frac{1}{3}$; $y=-\frac{5}{3}$ – асимптоты гиперболы.
5. Вершины: $\begin{cases} XY=\frac{1}{9}, \\ Y=X, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X^2=\frac{1}{9}, \\ Y=X, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=\pm\frac{1}{3}, \\ Y=\pm\frac{1}{3}. \end{cases}$ $A_1(\frac{1}{3};\frac{1}{3})$, $A_2(-\frac{1}{3};-\frac{1}{3})$	5. Вершины: $A_1(\frac{1}{3}+\frac{1}{3};\frac{1}{3}-\frac{5}{3})=A_1(\frac{2}{3};-\frac{4}{3})$, $A_2(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3};-\frac{1}{3}-\frac{5}{3})=A_2(0;-2)$



Задача 4. Цех выпускает изделия двух видов: валы и втулки. На производство одного вала рабочий тратит 3 часа, втулки – 2 часа. От реализации вала прибыл 50 тыс., а от втулки 20 тыс. рублей. Цех должен выпустить не менее 100 валов и не менее 200 втулок. Фонд рабочего времени 900 часов. Построить область допустимых вариантов планов производства валов и втулок, приносящих доход не менее 10 000 тыс.руб.

Решение

Для построения математической модели задачи введем обозначение: $\vec{X}=(x_1,x_2)$ – план производства, где x_1 – количество валов, x_2 – количество втулок.

Тогда на производство всех валов будет затрачено $3x_1$ часов, а всех втулок – $2x_2$ часов, а всего $(3x_1+2x_2)$ часов. Затраты времени не должны превышать фонда времени, а потому $3x_1+2x_2\le 900$.

Прибыль от всех валов $50x_1$, а всех втулок – $20x_2$. Тогда общая прибыль составит $50x_1+20x_2$. По условию задачи $50x_1+20x_2\ge 10\ 000$.

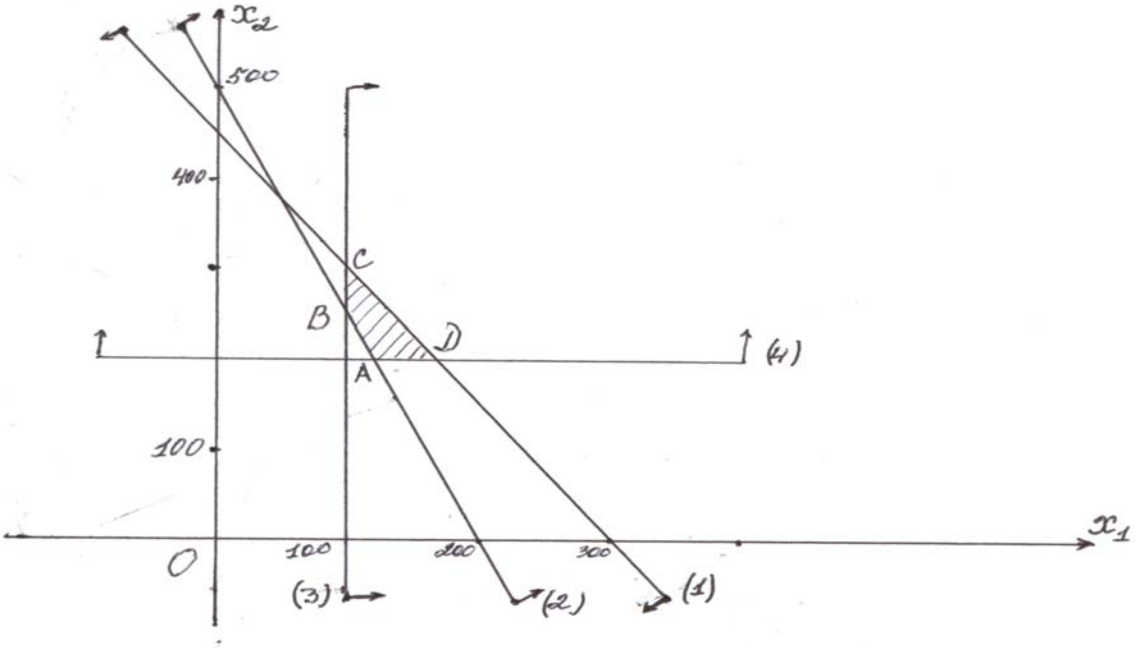
По условию задачи $x_1\ge 100$, $x_2\ge 200$. В результате получим систему неравенств, удовлетворяющих условиям задачи, решение которой будет соответствовать области допустимых планов производства валов и втулок.

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2\le 900, \\ 50x_1+20x_2\ge 10\ 000, \\ x_1 \ge 100, \\ x_2\ge 200. \end{cases}$$

Каждое неравенство этой системы изображает полуплоскость в пространстве R^2 с граничной прямой соответственно: $3x_1+2x_2=900$ (1), $50x_1+20x_2=10\ 000$ (2), $x_1=100$ (3), $x_2=200$. (4)

Для построения этих прямых уравнения (1) и (2) запишем в виде уравнений в отрезках: $\frac{x_1}{300}+\frac{x_2}{450}=1$ (1), $\frac{x_1}{200}+\frac{x_2}{500}=1$ (2).

В системе координат построим эти граничные прямые и стрелочками отметим полуплоскости, которым соответствуют неравенства системы.



Решением системы неравенств (пересечение всех четырех полуплоскостей) служит выпуклый четырехугольник *ABCD*, заштрихованный на чертеже. Этот четырехугольник является искомой областью допустимых планов производства валов и втулок.

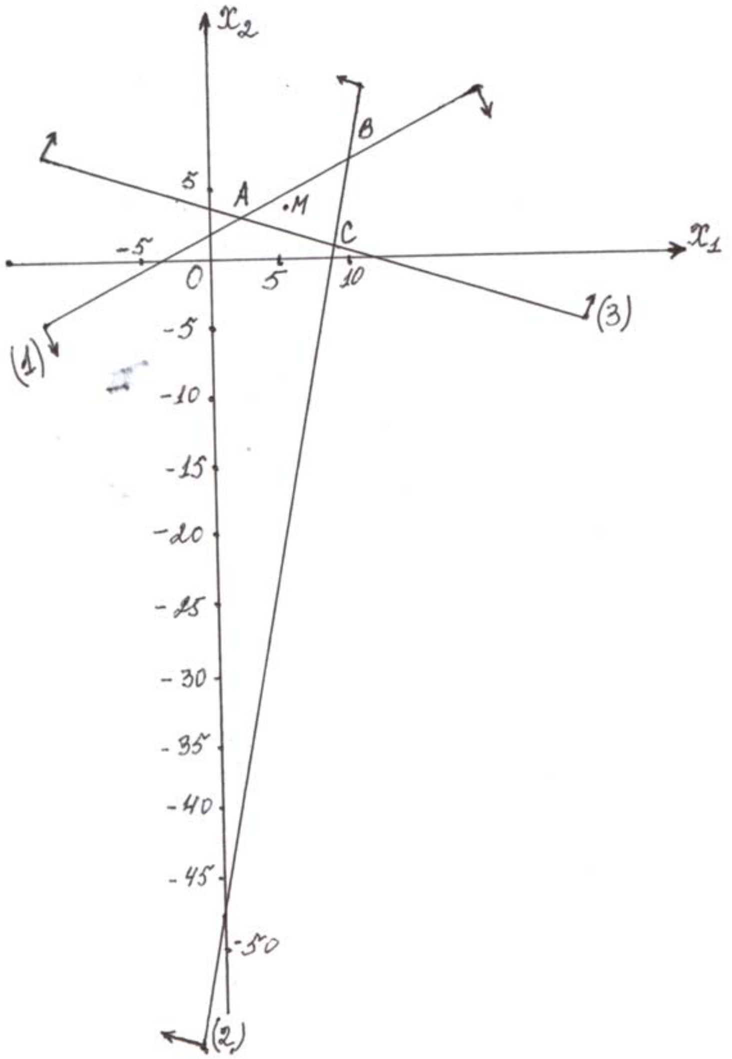
Замечание. Чтобы отметить стрелочкой ту полуплоскость, которая определяется заданным неравенством, следует после построения граничной прямой, которая делит плоскость на две полуплоскости, выбрать произвольную точку (проще всего – начало координат $O(0;0)$) в одной из полуплоскостей. Затем подставить координаты выбранной точку в заданное неравенство. Если получится верное числовое неравенство, то следует отметить стрелочкой ту полуплоскость, где лежит выбранная точка. Например, определим полуплоскость, заданную неравенством $3x_1+2x_2\le 900$. Сначала построим граничную прямую $3x_1+2x_2=900$ (на рис. Она обозначена (1)). Слева от нее лежит точка $O(0;0)$. Подставим ее координаты в неравенство: $3*0+2*0\le 900$ или $0\le 900$ получено верное числовое неравенство. Следовательно, та полуплоскость относительно прямой $3x_1+2x_2=900$, в которой расположена точка $O(0;0)$ и будет соответствовать неравенству $3x_1+2x_2\le 900$. На рисунке она отмечена стрелочкой в сторону точки $O(0;0)$.

Задача 5. Используя теорему о представлении выпуклого многогранника, выразить точку $M(6;3)$ через вершины области решений следующей системы неравенств:
$$\begin{cases} -4x_1+7x_2\le 13, \\ 6x_1-x_2\le 47, \\ x_1+3x_2\ge 11. \end{cases}$$

Решение

Построим область решений заданной системы подобно тому, как это сделано в предыдущей задаче.

Построим граничные прямые $-4x_1+7x_2=13$ или $\frac{x_1}{-\frac{13}{4}}+\frac{x_2}{\frac{13}{7}}=1$ (1), $6x_1-x_2=47$ или $\frac{x_1}{\frac{47}{6}}+\frac{x_2}{-47}=1$ (2), $x_1+3x_2=11$ или $\frac{x_1}{11}+\frac{x_2}{\frac{11}{3}}=1$. (3)



Областью решений заданной системы служит треугольник ABC – множество выпуклое – полиэдр пространства R^2.

Найдем угловые точки (вершины) этого полиэдра.

A: $\begin{cases}-4x_1+7x_2=13,\\ x_1+3x_2=11.\end{cases}$ - пересечение граничных прямых (1) и (3).

По формулам Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-4 & 7\\ 1 & 3\end{vmatrix}=-12-7=-19;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}13 & 7\\ 11 & 3\end{vmatrix}=39-77=-38;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-4 & 13\\ 1 & 11\end{vmatrix}=-44-13=-57.$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-38}{-19}=2;$$

$x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-57}{-19}=3$; *A(2;3).*

B: $\begin{cases}-4x_1+7x_2=13,\\ 6x_1-x_2=47.\end{cases}$ - пересечение граничных прямых (1) и (2).

По формулам Крамера: $\Delta=\begin{vmatrix}-4 & 7\\ 6 & -1\end{vmatrix}=4-42=-38;$ $\Delta_1=\begin{vmatrix}13 & 7\\ 47 & -1\end{vmatrix}=-13-329=-342;$

$\Delta_2=\begin{vmatrix}-4 & 13\\ 6 & 47\end{vmatrix}=-188-78=-266.$ $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-342}{-38}=9$; $x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{-266}{-38}=7$; *B(9;7).*

C: $\begin{cases}6x_1-x_2=47,\\ x_1+3x_2=11.\end{cases}$ - пересечение граничных прямых (2) и (3).

По формулам Крамера:

$\Delta=\begin{vmatrix}6 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=18+1=19;$ $\Delta_1=\begin{vmatrix}47 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}=141+11=152;$ $\Delta_2=\begin{vmatrix}6 & 47\\ 1 & 11\end{vmatrix}=66-47=19.$

$x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{152}{19} = 8$; $\quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{19}{19} = 1$; *C(8;1)*.

Согласно теореме о представлении $M=\alpha A+\beta B+\gamma C,\ \alpha\geq 0,\ \beta\geq 0,\ \gamma\geq 0,\ \ \alpha+\beta+\gamma=1$.

Запишем это равенство в координатах: $(6;3)=\ \alpha(2;3)+\beta(9;7)+\gamma(8;1)$ или

$$\begin{cases} 2\alpha + 9\beta + 8\gamma = 6, \\ 3\alpha + 7\beta + \gamma = 3. \end{cases}$$

Добавив к этой системе равенство $\alpha+\beta+\gamma=1$, получим

$$\begin{cases} 2\alpha + 9\beta + 8\gamma = 6, \\ 3\alpha + 7\beta + \gamma = 3, \\ \alpha + \beta + \gamma = 1, \\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \gamma \geq 0. \end{cases}$$

Задача свелась к нахождению опорного решения системы. Используем алгоритм нахождения опорного решения.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 9 & 8 & 6 \\ 3 & 7 & 1 & 3 \\ \underline{1} & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} 3 \\ 1 \\ 1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \underline{7} & 6 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} 4/7 \\ \\ 1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 6/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & -38/7 & -16/7 \\ 1 & 0 & 1/7 & 3/7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 6/7 & 4/7 \\ 0 & 0 & \underline{38/7} & 16/7 \\ 1 & 0 & 1/7 & 3/7 \end{array}\right)\begin{array}{c} 2/3 \\ 8/19 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 4/19 \\ 0 & 0 & 1 & 8/19 \\ 1 & 0 & 0 & 7/19 \end{array}\right) \Rightarrow \quad \alpha=\frac{7}{19};\ \beta=\frac{4}{19};\ \ \gamma=\frac{8}{19}.$$

Искомое представление запишется так: $M=\dfrac{7}{19}A+\dfrac{4}{19}B+\dfrac{8}{19}C$ или $M=\dfrac{1}{19}(7A+4B+8C)$.

Задача 6. Найти какое–нибудь опорное решение смешанной системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 \leq 4, \\ x_1 \quad + 3x_3 \qquad - 4x_5 \geq 8. \end{cases}$$

Решение

Сведем заданную систему к системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 4, \\ x_1 \quad + 3x_3 \qquad - 4x_5 \quad - x_7 = 8. \end{cases}$$

Применим алгоритм нахождения опорного решения:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -2 & 1 & \underline{3} & -2 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 3 & -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & -4 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1/3 & -2/3 & 1/3 & 1 & -2/3 & 0 & 0 & 2 \\ 7/3 & 7/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & \underline{3} & 0 & -4 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{c} 6 \\ \\ 8/3 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 2/9 & -2/3 & 0 & 1 & -2/9 & 0 & 1/9 & 10/9 \\ 7/3 & 7/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1 & 0 & 6 \\ 1/3 & 0 & 1 & 0 & -4/3 & 0 & -1/3 & 8/3 \end{array}\right)$$

Из последней матрицы заключаем, что в базисе x_3, x_4, x_6 опорным решением системы уравнений будет $(0;0;8/3;\ 10/9;0;6;0)$.

Следовательно, $(0;0;8/3;\ 10/9;0)$ – опорное решение заданной смешанной системы.

Задача 7. Систему линейных уравнений преобразовать в эквивалентную систему линейных неравенств.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 5x_5 - x_6 = 3, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 - 2x_6 = 6, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 - x_6 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 \qquad\quad + 2x_5 - 3x_6 = 9. \\ x_j \ge 0, \qquad j = \overline{1,6} \end{cases}$$

Решение

Применим алгоритм Жордана – Гаусса решения систем линейных уравнений.

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & \underline{1} & 1 & -1 & 5 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -3 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 2 & -3 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & 1 & -1 & 5 & -1 & 3 \\ -3 & 0 & -2 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & -3 & 3 & -13 & 0 & 0 \\ \underline{-1} & 0 & -2 & 0 & -3 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 & -13 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -3 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & \underline{3} & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -4 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -4 & 0 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -5/3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -7 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & -5/3 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 4/3 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \underline{-1} & 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 35/3 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -25/3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -11 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Последней матрице соответствует система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_2 + 35/35x_5 - x_6 = 1, \\ x_4 - 25/3x_5 = 2, \\ x_3 + 7x_5 = 0, \\ x_1 - 11x_5 = 2. \end{cases}$$

Опуская в этой системе неотрицательные слагаемые x_1, x_2, x_3, x_4 приходим к системе неравенств.

$$\begin{cases} 35/3x_5 - x_6 \le 1, \\ -25/3x_5 \le 2, \\ 7x_5 \le 0, \\ -11x_5 \le 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35x_5 - 3x_6 \le 1, \\ -25x_5 \le 6, \\ x_5 \le 0, \\ x_5 \ge -\dfrac{2}{11}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 35x_5 - 3x_6 \le 3, \\ -\dfrac{2}{11} \le x_5 \le 0. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} 35x_5 - 3x_6 \le 3, \\ -\dfrac{2}{11} \le x_5 \le 0. \end{cases}$

Литература

1. А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов Математика в экономике. Часть I.-М.: «Финансы и статистика», 2000г.
2. Высшая математика для экономистов. Под ред. проф. Н.Ш. Кремера.-М.: «Банки и биржи», 1999 г.
3. Общий курс высшей математики для экономистов. Под ред. проф. В.И. Ермакова .-М.: ИНФРА-М, 2001 г.
4. В.И. Малыхин Математика в экономике. - М.: ИНФРА-М, 2001г.
5. Сборник задач по высшей математике для экономистов. Под ред. проф. В.И. Ермакова .-М.: ИНФРА-М, 2002 г.
6. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Общий курс. Авторы : А.В. Кузнецов, Д.С. Кузнецова и др.- Минск, «В.ш.» 1994г.
7. В.П. Минорский Сборник задач по высшей математике. – М.: Издательство физико-математической литературы. 2001г.

ВАРИАНТ .1.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(-6;-4), B(-10;-1), C(6,1). Требуется: 1) составить уравнение стороны AB; 2) найти длину стороны AB; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины C; 4) вычислить расстояние от вершины B до стороны AC; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол A треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Прямые $5x–3y+14=0$ и $5x-3y-20=0$ являются сторонами ромба, а прямая $x-4y-4=0$ – его диагональю. Найти уравнения двух других сторон ромба.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $y^2-8x+12y+76=0;$ б) $y=\dfrac{-x+1}{x-1}$.

4. Для изготовления двух видов изделий A и B фабрика расходует в качестве сырья сталь и цветные металлы, имеющиеся в ограниченном количестве. На изготовление указанных двух изделий заняты токарные и фрезерные станки. В таблице приведены исходные данные задачи:

Виды ресурсов	Объем ресурсов	Нормы расхода на 1 изделие	
		Изделие A	Изделие B
Сталь (кг)	570	10	70
Цветные металлы (кг)	420	20	50
Токарные станки (станко-ч)	5600	300	400
Фрезерные станки (станко-ч)	3400	200	100
Прибыль (ден.ед)		3	8

   Построить область допустимых планов выпуска изделий A и B, обеспечивающих прибыль не менее 60 ден.ед.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(2;2) через вершины области решений следующей системы неравенство:

$$\begin{cases} 6x+7y\le 42, \\ 3x+2y\ge 6, \\ x-y\le 2, \\ x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0. \end{cases}$$

6. Найти какое–нибудь опорное решение смешанной системы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \quad + x_4 \quad = -3, \\ \qquad x_3 - 2x_4 \quad = 2, \\ 3x_2 \quad - x_4 + x_5 \le 5, \\ x_2 \qquad + x_5 \ge 3. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .2.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(12;0), B(18;8), C(0;5). Требуется: 1) составить уравнение стороны AB; 2) найти длину стороны AB; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины C; 4) вычислить расстояние от вершины B до стороны AC; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол A треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Прямые $5x - 4y + 16 = 0$ и $4x + y - 4 = 0$ являются сторонами треугольника, а точка Д(1;3) – точкой пересечения его медиан. Найти уравнение третьей стороны.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $x^2 - 2x - 4y - 3 = 0$; б) $y = \dfrac{2x+3}{2x-1}$.

4. С вокзала можно отправлять ежедневно скорые и курьерские поезда. Вместимость вагонов и наличный парк вагонов на станции указаны в следующей таблице:

Типы вагонов		Багажные	Почтовые	Жесткие плацкартные	Купейные	Мягкие
Число вагонов в поезде	Курьерские	1	-	5	6	3
	Скорый	1	1	8	4	1
Вагон вмещает пассажиров		-	-	58	40	32
Наличный парк вагонов		12	8	81	70	27

Построить область возможных вариантов формирования скорых и курьерских поездов так, чтобы можно было ежедневно отправлять не менее 7700 пассажиров.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку М(6;5) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} -6x_1 + 7x_2 \le 26, \\ 3x_1 + 4x_2 \le 47, \\ x_1 - x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6. Найти какое–нибудь опорное решение смешанной системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 10, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 \ge 8, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 \le 4. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .3.

1. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(-2;-6), В(-6;-3), С(10;-1). Требуется: 1) составить уравнение стороны АВ; 2) найти длину стороны АВ; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины С; 4) вычислить расстояние от вершины В до стороны АС; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла А; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника АВС; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину А параллельно стороне ВС треугольника АВС; 8) найти площадь треугольника АВС; 9) вычислить угол А треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Точки А(3;-1) и В(4;0) являются вершинами треугольника, а точка Д(2;1) – точкой пересечения его медиан. Найти уравнение высоты, проходящей через третью вершину треугольника.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $y^2-2x-8y+6=0$; б) $y = \dfrac{-4x+6}{6x-3}$.

4. В мастерской осволи производство столов и тумбочек для торговой сети. Для их изготовления имеется два вида древесины: первого – 72м^3 и второго – 56м^3. Расход каждого вида древесины на каждое изделие показан в следующей таблице (в м^3):

Изделие	Древесины	
	I вид	II вид
Стол	0,18	0,08
Тумбочка	0,09	0,28

От производства одного стола мастерская получает чистого дохода 1,1 ден.ед., а одной тумбочки – 0,7ден.ед. Построить область допустимых планов производства столов и тумбочек, обеспечивающих расход древесины I и II видов не больше, чем есть в запасе, и приносящих чистый доход не менее 400 ден.ед.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(6;5) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 26, \\ x_1 + 2x_2 \ge 10. \end{cases}$$

6. Найти какое–нибудь опорное решение смешанной системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 \ge 12, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \le 10, \\ 3x_1 + 5x_2 \qquad + 4x_4 = 7. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .4.

1. Задан треугольник координатами своих вершин A(8;2), B(14;10), C(-4;7). Требуется: 1) составить уравнение стороны AB; 2) найти длину стороны AB; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины C; 4) вычислить расстояние от вершины B до стороны AC; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол A треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Прямая $5x-3y+4=0$ является одной из сторон треугольника, а прямые $4x-3y+2=0$ и $7x+2y-13=0$ – его высоты. Найти уравнения двух других сторон треугольника.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $x^2+8x-5y+21=0$; б) $y = \dfrac{4x+5}{2x+1}$.

4. Для изготовления столов и шкафов употребляются два вида древесины. Расход древесины каждого вида на каждое изделие задан следующей таблицей (в куб.м):

Изделие	Древесина	
	I вид	II вид
Стол	0,15	0,2
Шкаф	0,2	0,1

Доход мастерской от производства одного стола составляет 12 ден.ед., а шкафа – 15ден.ед. Построить область допустимых планов выпуска столов и шкафов, обеспечивающих доход мастерской не меньший, чем 4000 ден.ед., если в распоряжении мастерской имеется 60 куб.м древесины первого вида и 40 куб.м древесины второго вида.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку М(6;5) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \ge 7, \\ 5x_1 - 2x_2 \le 36, \\ 2 \le x_1 \le 7. \end{cases}$$

6. Привести систему линейных уравнений к эквивалентной системе линейных неравенств:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

ВАРИАНТ .5.

1. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(2;-4), В(-2;-1), С(14;1). Требуется: 1) составить уравнение стороны АВ; 2) найти длину стороны АВ; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины С; 4) вычислить расстояние от вершины В до стороны АС; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла А; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника АВС; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину А параллельно стороне ВС треугольника АВС; 8) найти площадь треугольника АВС; 9) вычислить угол А треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Прямые $2x+y-1=0$ и $4x-y-11=0$ являются сторонами треугольника, а точка Р(1;2) – точкой пересечения третьей стороны с высотой. Найти уравнение третьей стороны.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $y^2-10x+4y+44=0$; б) $y = \dfrac{-3x-3}{2x+5}$.

4. В опытном хозяйстве установили, что откорм животных выгоден только тогда, когда каждое животное будет получать в дневном рационе не менее 6 ед. питательного вещества А, не менее 12 ед. вещества В и не менее 4 ед. вещества С. Для кормления животных используется два вида корма. В таблице показано, сколько единиц каждого питательного вещества содержит 1 кг каждого вида корма:

Пит. вещества	Корм I	Корм II

A	2	1
B	2	4
C	0	4

Известно, что цена корма I равна 8 ден.ед. за 1 кг, а цена корма II – 7 ден.ед. за 1 кг. Построить область допустимых вариантов рациона кормления животных, если расход на кормление не должен превышать 56 ден.ед.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(1;3) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} -3x_1 + 4x_2 \le 12, \\ 3x_1 - x_2 \le 6, \\ 3x_1 + 2x_2 \ge -1. \end{cases}$$

6. Следующую систему линейных уравнений преобразовать в эквивалентную систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 4, \\ 3x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 5, \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 + x_5 = 11, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

ВАРИАНТ .6.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(2;-1), B(8;7), C(-10;4). Требуется: 1) составить уравнение стороны AB; 2) найти длину стороны AB; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины С; 4) вычислить расстояние от вершины В до стороны АС; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла А; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину А параллельно стороне ВС треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол А треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Точки A(4;0) и B(6;8) являются вершинами треугольника, а точка Д(5;1) – точкой пересечения его высот. Найти третью вершину треугольника.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $x^2-6x-4y+5=0$; б) $y = \dfrac{3x+1}{2x-5}$.

4. Для производства двух видов продукции A и B предприятие использует 4 группы оборудования (I,II, III, IV). На производство 1 шт. продукции А требуется занять в течение единицы времени (например, в течение часа, смены) 1; 0,5; 2 и 0 единиц соответственно I, II, III, IV оборудования; а на производство 1 шт. продукции В требуется 1; 1 ; 0 и 2 единицы I, II, III, IV

оборудования. Имеется оборудования по группам: I-18, II-12, III-24, IV- 18 единиц. Предприятие получает с 1 шт. продукции А 4 ден.ед. чистого дохода и 6 ден.ед. с одной единицы продукции В. Построить область допустимых планов выпуска продукции А и В, допускающих использование оборудования не более, чем есть в наличии, и обеспечивающих предприятию чистую прибыль не менее 50 ден.ед.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(5;1) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 18, \\ -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 - x_2 \le 10, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6. Найти какое–нибудь опорные решение смешанной системы:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 - 2x_6 - x_7 = 5, \\ \quad x_2 - 2x_3 \qquad + x_5 \qquad\quad = 2, \\ \qquad x_3 \qquad\qquad + x_6 + x_7 \ge 0. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .7.

1. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(5;-3), В(1;0), С(17;2). Требуется: 1) составить уравнение стороны АВ; 2) найти длину стороны АВ; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины С; 4) вычислить расстояние от вершины В до стороны АС; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла А; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника АВС; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину А параллельно стороне ВС треугольника АВС; 8) найти площадь треугольника АВС; 9) вычислить угол А треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Даны две противоположные вершины ромба (4;5) и (2;-1), а также уравнение одной из его сторон $x-y+1=0$. Найти уравнение остальных сторон ромба.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $y^2-3x-10y+31=0$; б) $y = \dfrac{8x+2}{2x+3}$.

4. Цех для производства двух видов продукции использует, четыре группы оборудования в количествах, указанных в таблице:

Группа производственного оборудования	Необходимое количество единицы оборудования на один комплект		Количество оборудования в группе
	Продукции I	Продукции II	
А	2	2	12

В	1	2	8
С	4	0	16
Д	0	4	12
Доход (в ден.ед. на 1шт.)	2	3	

Построить область допустимых планов, допускающих использование оборудования не более, чем имеется в наличии, и обеспечивающих доход не менее, чем на 6 ден.ед.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку М(4;3) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4, \\ -x_1 - x_2 \le 3, \\ -3x_1 + x_2 \le 3, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \\ 2x_1 + x_2 \le 10. \end{cases}$$

6. Найти какое-нибудь опорное решение смешанной системы:

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 \le 17, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 1, \\ -3x_1 + x_2 + 5x_3 \quad \ge 2. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .8.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(14;-6), B(20;2), C(2;-1). Требуется: 1) составить уравнение стороны AB; 2) найти длину стороны AB; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины C; 4) вычислить расстояние от вершины B до стороны AC; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол A треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Даны уравнения двух параллельных прямых $4x-6y-5=0$ и $2x-3y+6=0$. Составить уравнение прямой, им параллельной и проходящей посредине между ними.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $x^2+2x-2y+7=0$; б) $y = \dfrac{2x+5}{2x-7}$.

4. Имеется два вида корма: сено и силос. Их можно использовать для кормления скота в количестве соответственно не более 50 и 85 кг. Требуется построить множество допустимых вариантов кормовых рационов,

содержащих не менее 30 кормовых ед., не менее 1 кг переваримого протеина, не менее 100г кальция, не менее 80г фосфора, а стоимость составляла не более 990 ден.ед. Данные о питательности кормов и их стоимости в расчете на 1 кг приведены в таблице:

Корма	Кормовые ед.(кг)	Переваримый протеин (г)	Кальций (г)	Фосфор (г)	Себестоимость 1кг. (ден.ед.)
Сено	0,5	40	1,25	2	11
Силос	0,3	10	2,5	1	9

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(2;2) через вершины области решений следующей системы неравенств:
$$\begin{cases} -x_1+x_2\le 2, \\ 5x_1+2\,x_2\ge 10, \\ 5x_1-2x_2\le 10. \end{cases}$$

6. Найти какое-нибудь опорное решение смешанной системы:
$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+x_2-x_3+x_4\le 2, \\ 5x_1-8x_2+2x_3+4x_4\ge 3. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .9.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(3;4), B(-1;7), C(15;9). Требуется: 1) составить уравнение стороны AB; 2) найти длину стороны AB; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины C; 4) вычислить расстояние от вершины B до стороны AC; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол A треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Найти уравнение прямой, проходящей через точку (3;-2) параллельно прямой, соединяющей точки (2;3) и (0;6).
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $y^2-2x+6y+7=0$; б) $y=\dfrac{3x-7}{x-2}$.

4. В таблице указаны запасы и нормы расхода фруктов при изготовлении компотов I и II (в расчете на одну банку) и цена реализации.

Фрукты	Запас (кг)	Компоты	
		I	II
Яблоки	84	1,2	0,8

Вишня	18	0,6	-
Слива	80	-	1,0
Цена (ден.ед.)		14	9

Построить область допустимых планов изготовления компотов, обеспечивающих выручку не менее 800 ден.ед. и гарантирующих, что расход фруктов не превысит их запаса.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(1;1) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 10 \le 0, \\ 2x_1 + x_2 - 6 \le 0, \\ x_1 + x_2 - 2 \ge 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6. Найти какое-нибудь опорное решение смешанной системы:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 \le 8, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \le 5, \\ 2x_1 - 5x_2 + x_4 + 3x_5 \ge 7. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .10.

1. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(1;-2), В(7;6), С(-11;3). Требуется: 1) составить уравнение стороны АВ; 2) найти длину стороны АВ; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины С; 4) вычислить расстояние от вершины В до стороны АС; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла А; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника АВС; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину А параллельно стороне ВС треугольника АВС; 8) найти площадь треугольника АВС; 9) вычислить угол А треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $y=0,5x$ и $y=x-1$, а также точка пересечения его диагоналей (3;-1). Составить уравнения двух других сторон параллелограмма.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $x^2-4x-3y-2=0$; б) $y = \dfrac{-2x+5}{3x-3}$.

4. При изготовлении изделий А и В расходуются сталь и цветные металлы. Изделия обрабатываются на токарных и фрезерных станках. В таблице приведены необходимые данные.

Ресурсы	Запасы	Удельные затраты на изделие	
		A	B
Сталь (кг)	700	10	70
Цветные металлы (кг)	600	20	25
Время работы станков: Токарных (ч) Фрезерных (ч)	 5600 3400	 300 200	 400 100
Прибыль (ден.ед.)		8	10

Построить область допустимых планов выпуска продукции, обеспечивающих прибыль не менее 60000 ден.ед. при затратах ресурсов, не превышающих запасы.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(2;1) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 6x_1 + 2\,x_2 \ge 8, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \\ x_1 \qquad \le 3, \\ \qquad x_2 \le 3. \end{cases}$$

6. Найти какое-нибудь опорное решение смешанной системы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 \quad = -3, \\ \qquad x_3 - 2x_4 \qquad = 2, \\ 3x_2 \qquad - x_4 + x_5 \le 5, \\ x_2 \qquad\qquad + x_5 \ge -3. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .11.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(-8;27), B(-14;10), C(10;3). Требуется: 1) составить уравнение стороны AC; 2) найти длину стороны AC; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины B; 4) вычислить длину высоту, проведенной из вершины B; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла C; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол C треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Даны уравнения оснований трапеции *4x+2y-7=0, 2x+y-5=0*. Найти длину ее высоту.

3. Какую линию второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $3x^2-12x-y+11=0$; б) $y=\dfrac{-3x+5}{2x-3}$.

4. В товарном зале необходимо выставить для продажи товары T_1 и T_2. Рабочее время продавцов не превышает 360ч., а площадь торгового зала, которую нужно занять, не превышает 120м^2. Каждая реализованная единица товара приносит прибыль соответственно в 50 и 80 ден.ед. Нормы затрат ресурсов на единицу проданного товара приведены в таблице:

Ресурсы	Товары	
	T_1	T_2
Рабочее время (ч)	0,4	0,6
Площадь (м^2)	0,2	0,1

   Построить область допустимых вариантов товарооборота, обеспечивающая прибыль не менее 40 000 ден.ед.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(6;10) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x_1+x_2\le 20, \\ x_1 \le 10, \\ x_2\le 16, \\ x_1+x_2\ge 10, \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

6. Привести систему линейных уравнений к эквивалентной системе линейных неравенств:

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3+x_5=20, \\ -x_1-2x_2-2x_3+x_4+3x_5=24, \\ 3x_1-x_2-x_4-12x_5=18, \\ x_j\ge 0, \quad j=\overline{1,5} \end{cases}$$

ВАРИАНТ .12.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(-14;17), B(-20;0), C(4;-7). Требуется: 1) составить уравнение стороны AC; 2) найти длину стороны AC; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины B; 4) вычислить длину высоту, проведенной из вершины B; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла C; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол C треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.

2. Найти уравнение прямой, каждая точка которой одинаково удалена от точек M(3;0) и N(4;2).
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $-2x^2+8x-y-9=0$; б) $y = \dfrac{-5x+3}{2x-1}$.

4. В хозяйстве нужно организовать производство картофеля и ячменя. Для этого можно использовать не более 1000га пашни, не более 900 тракторо-смен механизированного и не более 8000 чел.-дн. ручного труда. Затраты труда на 1 га указаны в таблице:

Ресурсы	Картофель	Ячмень
Механизированный труд (тракторо- смен)	2,1	0,6
Ручной труд (чел.-дн.)	20,0	0,2

   Построить область допустимых вариантов использования площади пашни для выращивания картофеля и ячменя.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(1;1) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x_1 \le 1{,}5, \\ x_2 \le 2, \\ x_1 + x_2 \ge 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6. \end{cases}$$

6. Привести систему линейных уравнений к эквивалентной системе линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4} \end{cases}$$

ВАРИАНТ .13.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(-6;23), B(-12;6), C(12;-1). Требуется: 1) составить уравнение стороны AC; 2) найти длину стороны AC; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины B; 4) вычислить расстояние от вершины B до стороны AC; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла C; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол C треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.

2. Даны вершины треугольника A(2;0), B(-1;2) и C(4;-4). Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из вершины A на медиану, проведенную из вершины B.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $\frac{1}{3}x^2+2x-y+5=0$; б) $y=\frac{3x+1}{-2x-3}$.

4. Предприятию задан план производства по времени и номенклатуре: не более чем за 6ч. необходимо выпустить ровно 30ед. продукции вида I и ровно 96ед. продукции вида II. Машина А за час производит либо 6ед. продукции I, либо 24ед. продукции II, а машина Б – соответственно 13 и 13ед. Построить область допустимых вариантов использования времени работы машин для выполнения плана выпуска продукции.
5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(-1;1) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1 + 2\,x_2 \le 4, \\ -x_1 - x_2 \le 2. \end{cases}$$

6. Найти какое-нибудь опорное решение смешанной системы:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 - 3x_3 \ge 1, \\ 3x_1 \quad\quad + 4x_3 \ge -2, \\ 3x_1 + x_2 \quad\quad \le 4. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .14.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(-10;9), B(-16;-8), C(8;-15). Требуется: 1) составить уравнение стороны AC; 2) найти длину стороны AC; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины B; 4) вычислить расстояние от вершины B до стороны AC; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла C; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол C треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Угловой коэффициент прямой равен 2, отрезок на оси ординат равен 4. Найти расстояние от точки M(0;-1) до этой прямой.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $3x^2-18x-y+25=0$; б) $y=\frac{-x+1}{2x-3}$.

4. На судно грузоподъемностью 1000 т. и емкостью трюмов 2400м^3 необходимо погрузить товары А и Б. Объемные коэффициенты товаров составляют соответственно 3м^3/т и 1,2м^3/т. На складе имеется 800т. товара Б и большое количество товара А. Построить область допустимых вариантов загрузки трюма судна, не позволяющих превысить грузоподъемность судна, емкость его трюмов.
5. Используя теорему о представлении, выразить точку М(2;1) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 4, \\ 6x_1 + 2x_2 \ge 8, \\ x_1 + 5x_2 \ge 4, \\ x_1 \qquad \le 3, \\ \qquad x_2 \le 3. \end{cases}$$

6. Привести систему линейных уравнений к эквивалентной системе линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 15x_5 = 4, \\ \qquad x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3, \\ 2x_1 \qquad + x_3 + 5x_4 \qquad = 7, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

ВАРИАНТ .15.

1. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(-14;11), В(-20;-6), С(4;-13). Требуется: 1) составить уравнение стороны АС; 2) найти длину стороны АС; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины В; 4) вычислить расстояние от вершины В до стороны АС; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла С; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника АВС; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину А параллельно стороне ВС треугольника АВС; 8) найти площадь треугольника АВС; 9) вычислить угол С треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Составить уравнения сторон треугольника, если А(-5;5) и В(3;1) – две его вершины, а М(2;5) – точка пересечения его высот.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $2x^2+4x+y=0$; б) $y = \dfrac{-2x+1}{x-1}$.

4. Со станции ежедневно можно отправлять пассажирские и скорые поезда. Данные приведены в таблице:

	Количество вагонов в составе		
Тип поезда	Плацкартных	Купейных	Мягких
Пассажирский	5	6	3
Скорый	8	4	1
Резерв вагонов	80	72	21

Построить область допустимых вариантов формирования поездов, не позволяющих превысить наличный парк вагонов при формировании пассажирских и скорых поездов, ежедневно отправляемых со станции.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(2;1) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1, \\ 3x_1 + 2\,x_2 \ge 6, \\ -3x_1 - x_2 \ge -9. \end{cases}$$

6. Привести систему линейных уравнений к эквивалентной системе линейных неравенств:

$$\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 13, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 \qquad + 4x_4 - 2x_5 = 5, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

ВАРИАНТ .16.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(2;24), B(-4;7), C(20;0). Требуется: 1) составить уравнение стороны AC; 2) найти длину стороны AC; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины B; 4) вычислить расстояние от вершины B до стороны AC; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла C; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол C треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Вычислить координаты вершин ромба, если известны уравнения двух его сторон $2x-y+4=0$ и $2x-y+10=0$, и уравнение одной из его диагоналей $x+y+2=0$.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $-2x^2+12x-y+7=0$; б) $y = \dfrac{-4x-3}{2x+1}$.

4. В хозяйстве установлено, что откорм животных выгоден лишь тогда, когда они будут получать в сутки не менее 8ед. питательного вещества А, не менее 14ед. вещества Б и не менее 3ед. вещества В, которые содержится в кормах I и

II. В таблице указано, сколько единиц каждого вещества содержится в 1кг корма.

Вещество	Корма	
	I	II
А	1	1
Б	2	3
В	0	4

Построить область допустимых суточных рационов при откорме животных, которые должны удовлетворять требованиям содержания питательных веществ.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(2;2) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2, \\ x_1 - x_2 \leq 2, \\ 4x_1 - 4x_2 \geq -8, \\ x_1 \qquad \geq 1, \\ \qquad x_2 \leq 4. \end{cases}$$

6. Привести систему линейных уравнений к эквивалентной системе линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 - 4x_4 - x_5 - 3x_6 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 - 3x_6 = 16, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 + 3x_5 - 5x_6 = 19. \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .17.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(12;19), B(6;2), C(30;-5). Требуется: 1) составить уравнение стороны AC; 2) найти длину стороны AC; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины B; 4) вычислить расстояние от вершины B до стороны AC; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла C; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол C треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Даны уравнения двух сторон треугольника *4x-5y+9=0* и *x+4y-3=0*. Найти уравнение третьей стороны, если известно, что медианы этого треугольника пересекаются в точке (3;1).
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

а) $5x^2+10x-y+2=0$; б) $y = \dfrac{x-1}{3x+2}$.

4. Трикотажная фабрика производит свитеры и пуловеры. Все данные приведены в таблице.

Пряжа		Затраты на 10 изделий (кг)	
Вид	Запас (кг)	Свитеры	Пуловеры
Шерсть	900	4	2
Силон	400	2	1
Нитрон	300	1	1

Построить область допустимых планов выпуска изделий с учетом, что расход пряжи не должен превышать ее запаса.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(2;1) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 2, \\ 4x_1 - 8x_2 \ge -16, \\ x_1 \ge 1, \\ x_2 \le 3. \end{cases}$$

6. Найти какое-нибудь опорное решение смешанной линейной системы:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 \le 6, \\ 3x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 \ge 8. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .18.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(-2;25), B(-8;8), C(16;1). Требуется: 1) составить уравнение стороны AC; 2) найти длину стороны AC; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины B; 4) вычислить расстояние от вершины B до стороны AC; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла C; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол C треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-1;2) так, что средина ее отрезка, заключенного между параллельными прямыми $x+2y+1=0$ и $x+2y-3=0$, лежит на прямой $x-y-6=0$.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все существующие их характеристики.

а) $-x^2+2x-y+3=0$; б) $y = \dfrac{-x-1}{3x+3}$.

4. Для сохранения здоровья и работоспособности человек должен потреблять в сутки определенное количество питательных веществ B_1, B_2, B_3 и B_4 . Для упрощения примем, что используется только два вида пищи: $П_1$ и $П_2$. Все необходимые данные приведены в таблице:

Питательное вещество		Содержание питательных веществ в 1кг пищи	
Вид	Минимальная норма	$П_1$	$П_2$
B_1	4	2	1
B_2	6	0	3
B_3	9	1	3
B_4	6	3	2

Построить область допустимых рационов, содержащих указанных два вида пищи, обогащенных питательными веществами в количествах, не меньших минимальных норм потребления.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(4;3) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_1 - x_2 \le 3, \\ -6x_1 + 4x_2 \le 12, \\ x_1 \qquad\quad \ge 2, \\ \qquad x_2 \le 8. \end{cases}$$

6. Найти какое-нибудь опорное решение системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 6, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 7, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \ge -12. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .19.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(-18;19), B(-24;2), C(0;-5). Требуется: 1) составить уравнение стороны AC; 2) найти длину стороны AC; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины B; 4) вычислить расстояние от вершины B до стороны AC; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла C; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол C треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2;6) и образующей с осями координат треугольник, которой находится во второй четверти и имеет площадь 3 кв.ед.

3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $3x^2+6x-y+5=0$; б) $y = \dfrac{-4x+5}{-2x-1}$.

4. На предприятии для изготовления продукции А и Б используется оборудование четырех групп. Все данные приведены в таблице:

Группа оборудования	Количество оборудования (ед)		
	В группе	Занятого выпуском продукции	
		А	Б
I	12	2	2
II	8	1	2
III	16	4	-
IV	12	-	4

Построить область допустимых планов производство продукции, учитывая, что можно использовать не более того оборудования, что имеется на предприятии по каждой группе.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку М(1;2) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 10, \\ -2x_1 + x_2 \le 2, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 \qquad\quad \ge 0. \end{cases}$$

6. Привести систему линейных уравнений к эквивалентной системе линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,4}. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .20.

1. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(-8;23), В(-14;6), С(10;-1). Требуется: 1) составить уравнение стороны АС; 2) найти длину стороны АС; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины В; 4) вычислить расстояние от вершины В до стороны АС; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла С; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника АВС; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину А параллельно стороне ВС треугольника АВС; 8) найти площадь треугольника АВС; 9) вычислить угол С треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.

2. Вычислить координаты центра окружности, описанной около треугольника с вершинами A(-1;1), B(2;-1), C(4;0).
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $\frac{1}{3}x^2+2x-y-2=0$;   б) $y=\dfrac{4x+2}{2x-1}$.

4. На приобретение оборудования для нового производственного участка выделено 36 ден.ед. Оборудование должно быть размещено на площади в 126 м^2. Предприятие может заказать машины типа А стоимостью 6 ден.ед., занимающие площадь (с учетом проходов) в 6м^2 и выпускающие 7 ед. продукции за смену, и машины типа Б стоимостью 3ден.ед., занимающие площадь в 18м^2 и обеспечивающие выпуск 10 ед. продукции за смену. При этом следует учесть, что машин типа А можно заказать не более 5 штук. Построить область допустимых вариантов приобретения оборудования, учитывая, что денежные затраты и производственная площадь, занимаемая купленным оборудованием, не превышает указанных значений, а сменный выпуск продукции новым участком – не менее 35 ед.
5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(3;4) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 5x_1-4x_2\le 25, \\ -3x_1+2x_2\le 10, \\ x_1+x_2\le 14, \\ 0\le x_2\le 8, \\ x_1\ge 0. \end{cases}$$

6. Следующую систему линейных уравнений преобразовать в эквивалентную систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} 5x_1-11x_2 \qquad -2x_4+x_5=10, \\ -x_1+x_2-x_3+x_4 \qquad =4, \\ 4x_1+x_2 \qquad -x_4 \qquad =80, \\ x_j\ge 0, \quad j=\overline{1,5}. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .21.

1. Даны координаты вершин треугольника ABC: A(3;1), B(-13;-11), C(-6;13). Требуется: 1) составить уравнение стороны BC; 2) найти длину стороны BC; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины A; 4) вычислить расстояние от вершины A до стороны BC; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла B; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника ABC; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину A параллельно стороне BC треугольника ABC; 8) найти площадь треугольника ABC; 9) вычислить угол B треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.

2. Найти координаты точки, симметричной точке (2;-4) относительно прямой $4x+3y+1=0$.
3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

   а) $3x^2+6x-y+13=0;$ б) $y=\dfrac{-x+3}{5x-1}$.

4. Цех производит изделия А и Б. Сменный плановый выпуск составляет 90 изделий А и 70 изделий Б. За смену не может использоваться более 540 ед. оборудования, более 550 ед. сырья и более 405ед. электроэнергии. Расход ресурсов на одно изделие указан в таблице. От реализации изделия А прибыль составляет 80 ден.ед., изделия Б – 70ден.ед.

Ресурсы	Изделия	
	А	Б
Оборудование	2	3
Сырье	1	4
Электроэнергия	2	1,5

   Построить область допустимых планов выпуска изделий сверх установленного задания, при котором выполняются ограничения на общий расход ресурсов и обеспечивается не менее 2800ден.ед. прибыли.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку М(2;4) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} 3x_1+4x_2\le 32, \\ 2x_1+x_2\le 13, \\ 3x_1-x_2\le 12, \\ x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0. \end{cases}$$

6. Привести систему линейных уравнений к эквивалентной системе линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+5x_3-x_4=4, \\ x_1-x_2-x_3+2x_4=1, \\ x_j\ge 0, \quad j=\overline{1,4}. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .22.

1. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(26;-5), В(2;2), С(-2;-1). Требуется: 1) составить уравнение стороны ВС; 2) найти длину стороны ВС; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины А; 4) вычислить расстояние от вершины А до стороны ВС; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла В; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника АВС; 7) составить уравнение прямой,

проходящей через вершину А параллельно стороне ВС треугольника АВС; 8) найти площадь треугольника АВС; 9) вычислить угол В треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.

2. На прямой $2x+y+11=0$ найти точку, равноудаленную от двух данных точек А(1;1) и В(3;0).

3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

а) $-2y^2+8y-x+9=0$; б) $y=\dfrac{4x-3}{2x+1}$.

4. Цех выпускает трансформаторы видов А и Б. На один трансформатор вида А расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, а на трансформатор вида Б – 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации трансформатора вида А прибыль составляет 12 ден.ед., вида Б – 10 ден.ед. Сменный фонд железа – 480кг, проволоки – 300кг. Построить область допустимых планов выпуска трансформаторов, если расход ресурсов не должен превышать выделенных фондов, а прибыль должно составлять не менее 900 ден.ед. за смену.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку М(3;2) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2 \le 9, \\ x_1+x_2 \le 8, \\ 3x_1+2x_2 \le 21, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6. Следующую систему линейных уравнений преобразовать в эквивалентную систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=4, \\ x_1+x_2 \qquad\qquad +x_5=2, \\ 2x_1 \qquad\quad +x_4+x_5=3, \\ x_j \ge 0, \quad j=\overline{1,5}. \end{cases}$$

ВАРИАНТ .23.

1. Даны координаты вершин треугольника АВС: А(-2;3), В(-18;-9), С(-11;15). Требуется: 1) составить уравнение стороны ВС; 2) найти длину стороны ВС; 3) составить уравнение высоты, проведенной из вершины А; 4) вычислить расстояние от вершины А до стороны ВС; 5) составить уравнение биссектрисы внутреннего угла В; 6) составить уравнение любой средней линии треугольника АВС; 7) составить уравнение прямой, проходящей через вершину А параллельно стороне ВС треугольника АВС; 8) найти площадь

треугольника ABC; 9) вычислить угол B треугольника (в радианах с точностью до двух знаков после запятой). Сделать чертеж.

2. Найти уравнение диагонали параллелограмма не проходящей через точку пересечения его сторон $x+y-1-0$ и $y+1=0$, если известно, что диагонали параллелограмма пересекаются в точке (-1;0).

3. Какую кривую второго порядка определяет каждое из заданных уравнений? Найти все известные вам их характеристики.

а) $2y^2+4y-x+5=0$; б) $y=\dfrac{x+2}{-3x+1}$.

4. Трикотажное ателье изготавливает женские кофточки видов А и Б. Запас пряжи, ее расход на одно изделие и цена готового изделия приведены в таблице:

Пряжа	Расход на изделия (кг)		Запас (кг)
	А	Б	
Бежевая	0,05	0,1	20
Салатовая	0,1	0,2	60
Коричневая	0,3	0,1	50
Цена (ден.ед.)	250	300	

Построить область допустимых планов выпуска продукции, если расход пряжи не должен превышать имеющегося запаса, а сумма от реализации готовой продукции должно быть не меньше 60 000 ден.ед.

5. Используя теорему о представлении, выразить точку M(2;4) через вершины области решений следующей системы неравенств:

$$\begin{cases} -3x_1+2x_2\le 6, \\ 4x_1+3x_2\le 26, \\ 2x_1-x_2\le 8, \\ x_1\ge 0, \quad x_2\ge 0. \end{cases}$$

6. Найти какое-нибудь опорное решение смешанной линейной системы:

$$\begin{cases} x_1-2x_2 \quad +x_4 \quad =-3, \\ \qquad x_3-2x_4 \quad =2, \\ 3x_2 \quad -x_4+x_5\le 5, \\ x_2 \qquad +x_5\ge -3. \end{cases}$$