КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра высшей математики

Ж.Р. Джаналиева, С.Б. Доулбекова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебно-методическое пособие

Бишкек – 2010

УДК 517

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, профессор Т.М. Иманалиев,
канд. физ.-мат. наук, доцент К.И. Ишмахаметов

Рекомендовано к изданию решением
кафедры высшей математики КРСУ

Джаналиева Ж.Р., Доулбекова С. Б.
Д 40 АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ: Учебно-методическое пособие. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2010. – 108 с.

Данное учебно-методическое пособие содержит краткий теоретический материал по «Аналитической геометрии» курса «Линейная алгебра и аналитическая геометрия». Включает основные темы, изучаемые по данным разделам. Решение задач вызывает определенные трудности у студентов, поэтому в пособии даны методические рекомендации по использованию этого материала. В конце каждого параграфа приведены примеры задач с кратким объяснением их решения.

Для самостоятельной работы студентов учебно-методическое пособие содержит 20 вариантов заданий, каждый вариант состоит из 10 задач. Студентам предлагается из четырех вариантов ответа с учетом проведенного ими решения выбрать только один верный ответ.

На основе данного пособия составлена компьютерная контрольно-обучающая программа тестирования знаний студентов, позволяющая активизировать самостоятельную работу студентов.

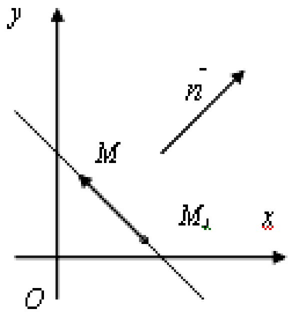
Учебно-методическое пособие предназначено для студентов всех факультетов дневной и заочной форм обучения.

Глава 1. ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Общее уравнение прямой на плоскости. Неполные уравнения

1. Общее уравнение прямой на плоскости

Рассмотрим на плоскости *Oxy* произвольную прямую. Пусть дана некоторая ее точка $M_1\ (x_0;\ y_0)$ и вектор $\vec{n} = (A;\ B)$, перпендикулярный рассматриваемой прямой, который называется *нормальным вектором* прямой. Пусть $M\ (x,\ y)$ – произвольная точка прямой. По условию, вектор $\vec{n}$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{M_1M}$, поэтому скалярное произведение $(\vec{n},\ \overrightarrow{M_1M}) = 0$.



Получаем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_1\ (x_0;\ y_0)$ *перпендикулярно* заданному вектору $\vec{n} = (A;\ B)$:

$$A\ (x - x_0) + B\ (y - y_0) = 0.$$

Произведем преобразования:

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0.$$

Так как *A* и *B* – числовые коэффициенты, а x_0 и y_0 – координаты точки, то в скобках у нас постоянное число. Если это число обозначить через *C*, то получится *общее уравнение* прямой на плоскости

$$Ax + By + C = 0,$$

где *A* и *B* одновременно не равны нулю.

2. Неполные уравнения прямой

Общее уравнение, в котором один или два из трёх коэффициентов (включая и свободный член) общего уравнения

$$Ax + By + C = 0$$

обращаются в нуль, называется *неполным*.

Рассмотрим, как располагается прямая относительно системы координат в зависимости от значений *A, B, C* в общем уравнении прямой. Возможны следующие случаи:

1) Пусть $C = 0$. Уравнение имеет вид

$$Ax + By = 0$$

и прямая проходит через начало координат перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n} = (A;\ B)$.

2) Пусть $A = 0\ \ (B \neq 0)$. Уравнение имеет вид

$$By + C = 0,$$

нормальный вектор имеет координаты $\vec{n} = (0;\ B)$. Вектор с такими координатами перпендикулярен оси *Ox,* значит, прямая параллельна оси *Ox.*

3) Пусть $B = 0\ \ (A \neq 0)$. Уравнение имеет вид

$$Ax + C = 0,$$

нормальный вектор с координатами $\vec{n} = (A;\ 0)$ перпендикулярен оси *Oy*. Следовательно, прямая проходит параллельна оси *Oy*.

4) Пусть $A = 0,\ C = 0\ \ (B \neq 0)$. Уравнение может быть записано в виде

$$y = 0$$

и определяет ось абсцисс.

5) Пусть $B = 0,\ C = 0\ \ (A \neq 0)$. Уравнение может быть записано в виде

$$x = 0$$

и определяет ось ординат.

Примеры.

1) Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\ (1;\ -4)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2;\ 5)$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0.$$

Учитывая, что координаты вектора $\vec{n} = (A;\, B)$, имеем

$$2\,(x - 1) + 5\,(y + 4) = 0.$$

Или окончательно

$$2x + 5y + 18 = 0.$$

2) Определить, при каких значениях m и n прямая

$$(2m + n - 10)\,x + (5m - 3n + 1)\,y + 3m - 8 = 0$$

параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, равный 4 (считая от начала координат). Напишите уравнение этой прямой.

Решение. Прямая параллельна оси абсцисс, если коэффициент x равен нулю. Значит,

$$2m + n - 10 = 0.$$

С другой стороны, прямая отсекает на оси ординат отрезок, равный 4, если свободный член

$$3m - 8 = 4.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 2m + n - 10 = 0 \\ 3m - 8 = 4 \end{cases}.$$

Решаем систему и находим:

$$m = 4,\ n = 2, \quad 15y + 4 = 0.$$

§ 2. Различные виды уравнений прямой на плоскости

1. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

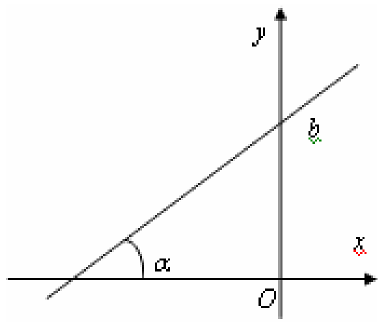
Пусть задана прямая, пересекающая ось Oy в точке $(0;\, b)$ и образующая угол α с положительным направлением оси Ox, в виде

$$Ax + By + C = 0.$$

Преобразуем это уравнение:

$$By = -Ax - C.$$

Разделим обе части уравнения на B. Получаем



$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}.$$

Введем обозначения:

$$k = -\frac{A}{B},\quad b = -\frac{C}{B}.$$

Получили *уравнением прямой с угловым коэффициентом*

$$y = kx + b,$$

где k – *угловой коэффициент*, численно равный тангенсу угла наклона α прямой к положительному направлению оси Ox:

$$k = tg\,\alpha,$$

свободный член b – ордината точки пересечения графика и оси Oy, численно равная отрезку, который отсекает прямая на оси Oy, считая от начала координат.

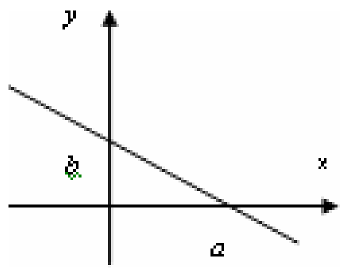
Если $\alpha = 0^0$, то $k = 0$, прямая параллельна оси Ox.

Если $\alpha = 90^0$, то k не существует, прямая перпендикулярна оси Ox.

2. Уравнение прямой в отрезках на осях

Рассмотрим прямую

$$Ax + By + C = 0,$$



пересекающую координатные оси и не проходящую через начало координат. Если ни один из коэффициентов общего уравнения не равен нулю, то его можно преобразовать:

$$Ax + By = -C.$$

Поделим обе части полученного равенства на $-C$:

$$\frac{x}{-C/A}+\frac{y}{-C/B}=1.$$

Тогда, обозначив $a=-\dfrac{C}{A}$ и $b=-\dfrac{C}{B}$, приходим к уравнению *прямой в отрезках на осях*:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1,$$

где a, b – величины отрезков, которые отсекает прямая на координатных осях – ось Ox в точке $(a;\,0)$, ось Oy в точке $(0;\,b)$.

3. Нормальное уравнение прямой

Пусть дано общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0.$$

Приведем его к нормальному виду. Для этого нужно все члены этого уравнения умножить на *нормирующий множитель* μ, определяемый формулой

$$\mu=\frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

знак которого выбирается противоположным знаку свободного члена нормируемого уравнения.

$$\frac{Ax}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}=0.$$

Введем обозначение:

$$\cos\theta=\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad \sin\theta=\frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},\quad -p=\frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Получаем *нормальное уравнение* прямой

$$x\cos\theta+y\sin\theta-p=0,$$

где p – длина перпендикуляра, опущенного на прямую из начала координат,

θ – угол (измеренный в положительном направлении) между положительным направлением оси Ox и направлением этого перпендикуляра,

$\cos\theta$ и $\sin\theta$ – направляющие косинусы положительной нормали прямой, т.е. перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую.

Если $p = 0$, то прямая проходит через начало координат, а угол

$$\theta=\varphi+\frac{\pi}{2}$$

задает угол наклона прямой.

Во избежание неопределенности знак перед радикалом выбирается так, чтобы соблюдалось условие $p > 0$.

Если $C = 0$, то прямая проходит через начало координат и выбор положительного направления произволен.

4. Каноническое уравнение прямой

Пусть на прямой дана фиксированная точка $M_0\,(x_0;\,y_0)$. Рассмотрим на этой прямой любую другую точку $M\,(x;\,y)$. Не равный нулю вектор $\vec{a}=(l;\,m)$, коллинеарный данной прямой, называется *направляющим вектором* прямой.

Найдем уравнение прямой, проходящей через точку $M_0\,(x_0;\,y_0)$ параллельно вектору $\vec{a}$. Так как вектор $\vec{a}$ коллинеарен любому вектору, лежащему на данной прямой, в том числе и вектору

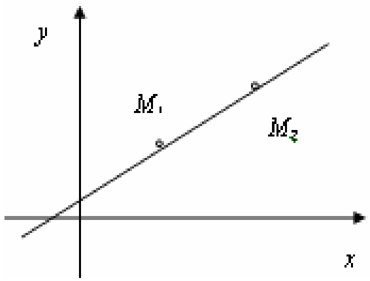
$$\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0;\,y-y_0),$$

а коллинеарность векторов означает пропорциональность координат, то получаем к*аноническое уравнение прямой:*

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

5. *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* Пусть на прямой даны две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$.

Пусть также вектор $\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}$ – направляющий вектор этой



прямой. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1;\ y_1)$ параллельно вектору $\vec{a}=(l;\ m)$, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{l}=\frac{y-y_1}{m}.$$

Подставив в это уравнение координаты вектора

$$\vec{a}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1),$$

получим уравнение прямой, *проходящей через две заданные точки* M_1 и M_2:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

6. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении

Найдем уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1;\ y_1)$ в заданном направлении. Для этого преобразуем уравнение прямой, проходящей через две заданные точки, к виду

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Выше мы отмечали, что угловой коэффициент численно равен тангенсу угла наклона α прямой к положительному направлению оси Ox: $k=tg\,\alpha$.

Геометрически тангенс угла – это отношение противолежащего катета (y_2-y_1) к прилежащему катету (x_2-x_1). Поэтому

$$k=tg\,\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Таким образом, если известен угловой коэффициент k, то *уравнение прямой*, проходящей через точку $M_1(x_1;\ y_1)$ *в заданном направлении,* имеет вид

$$y-y_1=k(x-x_1).$$

7. Параметрические уравнения прямой

Пусть дано каноническое уравнение

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$$

прямой, проходящей через точку $M(x_0;\ y_0)$ параллельно вектору $\vec{a}=(l;\ m)$. Приравняем каждое из отношений произвольному параметру t, выразим x и y. Получим *параметрические уравнения* прямой:

$$\begin{cases} x=x_0+lt \\ y=y_0+mt \end{cases},$$

где x_0, y_0 – координаты точки на прямой; l, m – координаты направляющего вектора $\vec{a}$ данной прямой.

Обратно, из параметрических уравнений можно получить каноническое уравнение прямой. Для этого необходимо выразить параметр t:

$$t=\frac{x-x_0}{l},\quad t=\frac{y-y_0}{m}.$$

Так как в этих двух соотношениях параметр t имеет одно и то же значение, то получаем *каноническое уравнение* прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

Так как в этих двух соотношениях параметр t имеет одно и то же значение, то получаем *каноническое уравнение* прямой

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}.$$

Примеры.

1) Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M=(7;-3)$ параллельно вектору $\vec{a}=(-1;9)$.

Решение. Из условия $x_1=7,\ y_1=-3,\ l=-1,\ m=9.$

Получаем искомое уравнение

$$\frac{x-7}{-1}=\frac{y+3}{9}.$$

2) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямой

$$4x+2y-5=0.$$

Решение. Найдем угловой коэффициент k и b по формулам

$$k=-\frac{A}{B},\quad b=-\frac{C}{B}.$$

Подставим значения $A=4,\ B=2,\ C=-5$. Получаем $k=-2$, $b=-2.5$.

3) Дана прямая

$$4x+6y-12=0.$$

Составить для нее уравнение «в отрезках на осях».

Решение. Запишем уравнение в виде

$$4x+6y=12.$$

Разделим обе части уравнения на число 12. Получаем искомое уравнение

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1.$$

4) Приведите уравнение прямой

$$3x-4y+10=0$$

к нормальному виду.

Решение. Умножим обе части уравнения на нормирующий множитель $\mu=\dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$. Знак нормирующего множителя выбирается противоположным знаку свободного члена нормируемого уравнения. Так как $C=10>0$, то

$$\mu=\frac{1}{-\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{1}{-\sqrt{9+16}}=-\frac{1}{5}.$$

Получаем

$$-\frac{3x}{5}+\frac{4y}{5}-2=0.$$

5) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через $M=(3;-8)$ параллельно вектору $\vec{a}=(2;1)$.

Решение. Из условия $x_0=3,\ y_0=-8,\ l=2,\ m=1.$

Получаем искомые уравнения

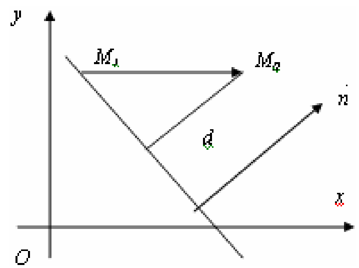
$$\begin{cases}x=3+2t\\ y=-8+t\end{cases}.$$

§ 3. Взаимное расположение двух прямых на плоскости

1. *Расстояние от точки до прямой*

Пусть дана прямая

$$Ax+By+C=0$$



и точка M_0 $(x_0; y_0)$. Найдем расстояние от этой точки до заданной прямой.

Возьмем на прямой произвольную точку M_1 $(x_1; y_1)$. Расстояние от точки M_0 $(x_0; y_0)$ до прямой равно модулю проекции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на направление нормального вектора $\vec{n} = (A; B)$.

Следовательно,

$$\delta = \left| \frac{\overrightarrow{M_1M_0} \bullet \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|.$$

Отсюда

$$\delta = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Так как точка M_1 $(x_1; y_1)$ принадлежит заданной прямой, то выполняется равенство

$$Ax_1 + By_1 + C = 0, \quad \text{т.е.} \quad C = -A x_1 - B y_1.$$

Отсюда получаем формулу нахождения *расстояния* от точки M_0 $(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$:

$$\delta = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

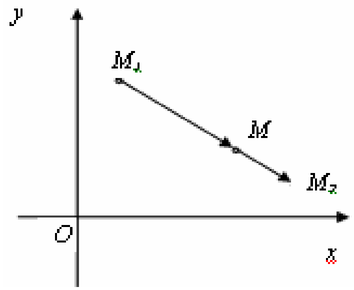
где знак перед радикалом противоположен знаку C. Расстояние δ будет положительным, если точка и начало координат лежат по разные стороны от прямой, и отрицательно, если по одну сторону.

2. Деление отрезка в данном отношении

Пусть требуется разделить отрезок $M_1 M_2$, соединяющий точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$ в заданном отношении $\lambda > 0$, т.е. найти координаты точки $M(x; y)$ отрезка $M_1 M_2$ такой, что $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$. Имеем:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1; y - y_1), \text{ т.е.}$$



$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\, i + (y - y_1)\, j \quad \text{и}$$

$$\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x; y_2 - y), \text{ т.е.}$$

$$\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x)\, i + (y_2 - y)\, j.$$

Точка M делит отрезок M_1 M_2 в отношении λ, если

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\, \overrightarrow{MM_2} \quad \text{или}$$

$$(x - x_1)\, i + (y - y_1)\, j = \lambda \cdot (x_2 - x)\, i + \lambda \cdot (y_2 - y)\, j.$$

Учитывая, что равные векторы имеют равные координаты, получаем

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x \quad \text{и} \quad y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y.$$

Итак, координаты точки $M(x; y)$, которая делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$, находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Если точка M является серединой отрезка M_1M_2, то $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2} = 1$ и координаты точки M определяются по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. Пересечение двух прямых

Пусть даны две прямые, заданные уравнениями в общем виде

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0.$$

Для того, чтобы найти координаты точки их пересечения M, необходимо составить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

и решить ее. Получаем, что две прямые *пересекаются* в точке, координаты которой находятся по формулам

$$x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \quad y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1}.$$

Пусть даны две прямые, заданные уравнениями с угловым коэффициентом

$$y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2 .$$

Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases}.$$

Получаем формулы нахождения координат точки M *пересечения* двух прямых

$$x = \frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1}, \quad y = \frac{k_2b_1 - k_1b_2}{k_2 - k_1}.$$

4. Угол между двумя прямыми

Пусть заданы две пересекающиеся прямые в виде

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$$

с нормальными векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$. Известна формула нахождения скалярного произведения этих векторов:

$$(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = |\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2| \cdot \cos\varphi.$$

Откуда

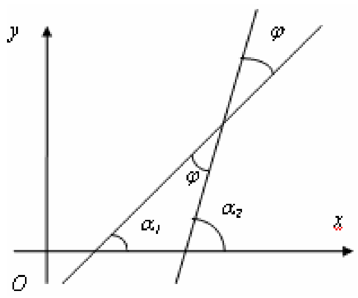
$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right)}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}.$$

Таким образом, *угол* φ между двумя прямыми находится как угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1 = (A_1; B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2)$. Запишем правую часть формулы в координатной форме и получим

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Также *угол* φ между двумя прямыми можно найти по формуле

$$tg\,\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$



Пусть две пересекающиеся прямые заданы уравнением с угловым коэффициентом

$$y = k_1 x + b_1, \quad y = k_2 x + b_2.$$

По теореме о внешнем угле треугольника имеем

$$\alpha_2 = \varphi + \alpha_1 \quad \text{или} \quad \varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Если $\varphi \neq \dfrac{\pi}{2}$, то по формуле тангенса разности двух аргументов имеем:

$$tg\,\varphi = tg\,(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 \cdot tg\alpha_2}$$

Известно, что

$$tg\,\alpha_1 = k_1, \quad tg\,\alpha_1 = k_2.$$

Поэтому *угол* φ между двумя прямыми находится по формуле

$$tg\,\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

5. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

Пусть даны две прямые

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Тогда условием их *параллельности* является условие коллинеарности их векторов-нормалей $\vec{n}_1 = (A_1;\ B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2;\ B_2)$, т.е. пропорциональность их координат

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \quad \text{или}$$

$$A_1 B_2 - A_2 B_1 = 0.$$

Условием *перпендикулярности* двух прямых является условие перпендикулярности их нормальных векторов $\vec{n}_1 = (A_1;\ B_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2;\ B_2)$, т.е.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \ \text{ или}$$

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0.$$

Если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то две прямые имеют одну общую точку.

Если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то две прямые *совпадают*, то есть оба уравнения определяют одну и ту же прямую.

Пусть две прямые заданы в виде

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2.$$

Они параллельны, если $tg\ \varphi = 0$. Из формулы нахождения угла φ между двумя прямыми следует

$$k_2 - k_1 = 0.$$

Откуда получаем условие *параллельности* двух прямых:

$$k_1 = k_2\,.$$

Две прямые перпендикулярны, если угол φ между ними равен 90^0. Значит,

$$ctg\ \varphi = \frac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1} = 0.$$

Получили условие *перпендикулярности* двух прямых:

$$1 + k_1 k_2 = 0 \quad \text{или} \quad k_2 = -\frac{1}{k_1}.$$

Примеры.

1) При каком значении a прямые

$$2x + 3y + 6 = 0 \quad \text{и} \quad 4x - ay + 1 = 0$$

параллельны?

Решение. Известно условие параллельности двух прямых

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}.$$

Значит, должно выполняться условие

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{-a}.$$

Получили $a = -6.$

2) Найти угол между прямыми

$$4x + 3y - 1 = 0, \quad 2x - 2y - 7 = 0.$$

Решение. По условию известны координаты нормальных векторов $\vec{n}_1 = (4;\ 3)$, $\vec{n}_2 = (2;\ -2)$.

Подставим их в формулу нахождения угла между двумя прямыми и получим:

$$\cos\varphi = \frac{4\cdot 2 + 3\cdot(-2)}{\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{2^2+(-2)^2}} = \frac{2}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{8}} = \frac{2}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

3) При каком значении a прямые

$$2x + 3y + 6 = 0 \quad \text{и} \quad 4x - ay + 1 = 0$$

перпендикулярны?

Решение. Используем условие перпендикулярности двух прямых. Подставим свои значения и получим:

$$2\cdot 4 + 3\cdot(-a) = 0 \quad \text{или} \quad 3a = 8.$$

Отсюда $a = \dfrac{8}{3}$.

4) Даны вершины треугольника $M_1\ (3;\ -4)$, $M_2\ (1;\ 2)$ и $M_3\ (5;\ 6)$. Найти координаты середин его сторон.

Решение. Найдем координаты середины отрезка M_1M_2:

$$x = \frac{3+1}{2} = 2, \quad y = \frac{-4+2}{2} = -1.$$

Получаем точку $(2;\ -1)$. Аналогично для второй точки – середины отрезка M_2M_3:

$$x = \frac{1+5}{2} = 3, \quad y = \frac{2+6}{2} = 4 \quad \text{или} \quad (3;\ 4).$$

Для третьей точки – середины отрезка M_1M_3:

$$x = \frac{3+5}{2} = 4, \quad y = \frac{-4+6}{2} = 1 \quad \text{или} \quad (4;\ 1).$$

Итак, получаем координаты середин треугольника $M_1\ M_2\ M_3$: $(2;-1)$, $(3;\ 4)$, $(4;\ 1)$.

Глава 2. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Эллипс

Эллипс – это геометрическое место точек, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости $F_1\ (-c;\ 0)$ и $F_2\ (c;\ 0)$, называемых *фокусами*, есть постоянная величина, равная $2a$ и большая, чем расстояние между фокусами. По определению эллипса $2a > 2c$ или $a > c$.

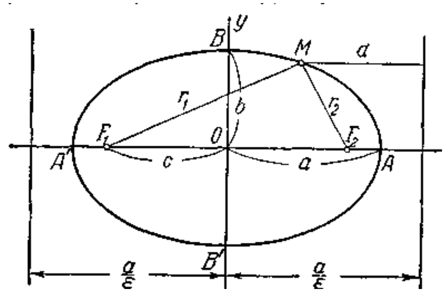
Расстояние между фокусами эллипса называют *фокальным расстоянием*.

Каноническое уравнение эллипса с фокусами на оси абсцисс, симметричного относительно начала координат, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, $a > b$.

Если фокусы эллипса лежат на оси ординат, то *каноническое уравнение* имеет вид



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Точки A', A, B' и B – *вершины* эллипса. Отрезок $OA = a$ называют *большой полуосью* эллипса, отрезок $OB = b$ – *малой полуосью*.

Отношение половины фокусного расстояния к большой полуоси эллипса называется *эксцентриситетом* эллипса

$$\varepsilon = \frac{c}{a} < 1.$$

Директриса – это прямая, проходящая параллельно малой оси и находящаяся на расстоянии d от нее. Эллипс имеет две директрисы.

Если $a > b$, то уравнения директрис имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \qquad x = \frac{a}{\varepsilon}.$$

Если $b > a$, то директрисы определяются уравнениями

$$y = -\frac{b}{\varepsilon}, \qquad y = \frac{b}{\varepsilon}.$$

§ 2. Окружность

Окружность – это множество точек плоскости, равноудаленных от данной точки, называемой центром.

Если в уравнении эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

большая и малая полуоси равны между собой, т.е.

$$a=b,\quad c=0,$$

то уравнение определяет окружность, рассматриваемую как частный случай эллипса (при $\varepsilon=0$):

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\,.$$

Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение принимает вид

$$x^2+y^2=R^2\,.$$

Уравнение окружности с центром в точке $C\ (a;\ b)$ и радиусом R имеет вид

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2\,.$$

§ 3. Гипербола

Гипербола – это геометрическое место точек, для которых абсолютная величина разности расстояний от двух фиксированных точек плоскости $F_1\ (c;\ 0)$ и $F_2\ (-\ c;\ 0)$, называемых *фокусами*, есть постоянная величина, равная $2a$. По определению гиперболы $2a<2c$ или $a<c$.

Каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси абсцисс, расположенной симметрично относительно начала координат, имеет вид

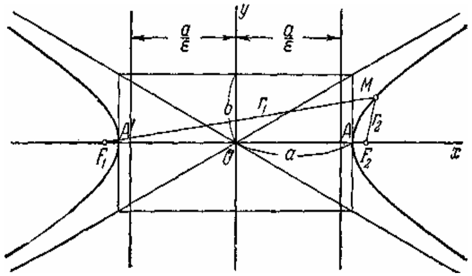
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,,$$

где $b=\sqrt{c^2-a^2}$.

Если фокусы гиперболы лежат на оси ординат, то *каноническое уравнение* имеет вид

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1 \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=-1\,.$$

Точки $A\ (a;\ 0)$ и $A_1\ (-\ a;\ 0)$ называются *вершинами* гиперболы.



Отрезок AA_1 – *действительная ось* гиперболы, его длина равна $2a$. Расстояние от вершины гиперболы до асимптоты вдоль направления, параллельного оси ординат, называется *мнимой полуосью* гиперболы b.

Отношение половины фокусного расстояния к действительной полуоси гиперболы называется *эксцентриситетом* гиперболы

$$\varepsilon=\frac{c}{a}>1.$$

Прямые, к которым ветви гиперболы неограниченно приближаются при удалении в бесконечность, называются *асимптотами* гиперболы. Их уравнения имеют вид

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\ \frac{b}{a}x,.$$

Гипербола, у которой действительная и мнимая полуоси равны между собой ($a=b$), называется *равносторонней* или *равнобочной*. Каноническое уравнение такой гиперболы имеет вид

$$x^2-y^2=a^2 \quad \text{или} \quad y^2-x^2=a^2\,.$$

Асимптотами равносторонней гиперболы являются прямые

$$y=x \quad \text{и} \quad y=-\,x.$$

Директриса – это прямая, проходящая параллельно мнимой оси и находящаяся на расстоянии d от нее. Гипербола имеет две директрисы.

Если фокусы гиперболы лежат на оси Ox, то уравнения директрис имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon}, \qquad x = \frac{a}{\varepsilon}$$

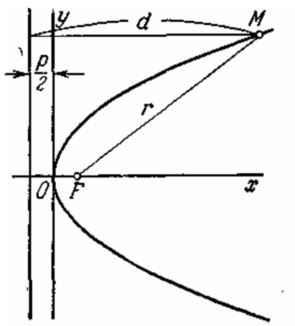
Если фокусы лежат на оси Oy, то директрисы определяются уравнениями

$$y = -\frac{b}{\varepsilon}, \qquad y = \frac{b}{\varepsilon}.$$

.

§ 4. Парабола

Парабола – это множество точек, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F, называемой *фокусом*, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой *директрисой*. Расстояние от фокуса до директрисы называется *фокальным параметром p* параболы.



Каноническое уравнение параболы с вершиной в начале координат и фокусом на оси абсцисс, ветви которой направлены вправо (вся парабола лежит в правой полуплоскости), имеет вид

$$y^2 = 2px.$$

Парабола имеет одну директрису. Уравнение директрисы для данной параболы имеет вид

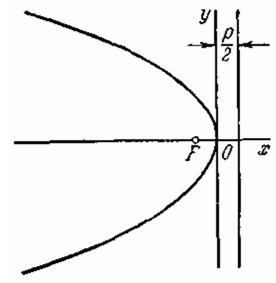
$$x = -\frac{p}{2}.$$

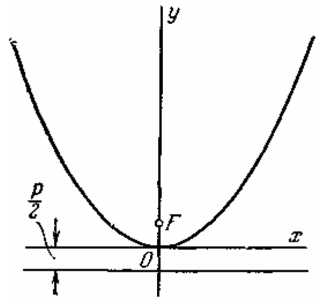
Парабола имеет *ось симметрии*, с которой она пересекается в единственной точке – её *вершине*.

Если осью параболы является ось Ox, начало координат является ее вершиной, но парабола лежит в левой полуплоскости, то её уравнение будет иметь вид

$$y^2 = -2px.$$

Уравнение директрисы: $x = \frac{p}{2}$.





В случае, когда начало координат находится в вершине, а осью симметрии является ось ординат, парабола будет иметь уравнение

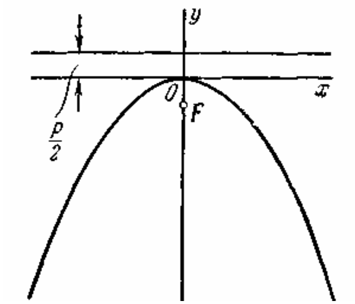
$$x^2 = 2py,$$

если она лежит в верхней полуплоскости. Если парабола лежит в нижней полуплоскости, то

$$x^2 = -2py.$$

Уравнения директрис данных парабол соответственно равны

$$y = -\frac{p}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{p}{2}.$$



Каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $A\ (a;\ b)$, ось симметрии которой параллельна оси Ox, ветви направлены вправо, имеет вид

$$(y - b)^2 = 2p\,(x - a).$$

Если ветви параболы направлены влево, то

$$(y - b)^2 = -2p\,(x - a).$$

Если вершина параболы находится в точке *A (a; b),* ось симметрии параллельна оси *Oy*, ветви направлены вверх, то уравнение имеет вид

$$(x-a)^2 = 2p\,(y-b).$$

Если ветви параболы направлены вниз, то

$$(x-a)^2 = -2p\,(y-b).$$

Примеры.

1) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y=\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2}\ .$$

Решение. Возведем в квадрат и умножим на *4* обе части уравнения. Имеем

$$4y^2 = 9\,(4-x^2).$$

Преобразуем и получим уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1\,.$$

В условии в правой части стоит знак плюс, поэтому все значения $y > 0$. Значит, данным уравнением определяется половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости.

2) Даны фокусы гиперболы $F_1\ (10;\ 0)$ и $F_2\ (-10;\ 0)$ и ее асимптота

$$4x + 3y = 0.$$

Написать уравнение гиперболы.

Решение. Запишем уравнение асимптоты в виде

$$y=-\frac{4}{3}x\,,\ \text{находим}\quad \frac{b}{a}=\frac{4}{3}\,.$$

Из условия следует, что $c = 10$. Поэтому

$$a^2 + b^2 = 100.$$

Получили систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{b}{a}=\dfrac{4}{3} \\ a^2+b^2=100 \end{cases}.$$

Подставляя $b=\frac{4}{3}a$ во второе уравнение системы, получаем

$$a^2+\frac{16\,a^2}{9}=100,$$

откуда $a^2 = 36.$

Находим $b^2 = 64$ и получаем искомое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1\,.$$

3) Какая кривая второго порядка задана уравнением

$$y^2-2y-10x+11=0?$$

Привести ее к каноническому виду, найти координаты вершины, фокальный параметр и уравнение директрисы.

Решение. Преобразуем уравнение и выделим полный квадрат:

$$y^2-2y=10x-11,$$
$$(y-1)^2=10\,(x-1).$$

Получили каноническое уравнение параболы с вершиной в точке *A (1; 1),* с осью симметрии, параллельной оси *Ox*, ветви которой расположены вправо. Найдем фокальный параметр *p*. Так как коэффициент правой части уравнения равен

$$2p = 10,\ \text{то}\ p = 5.$$

Известно, что расстояние от директрисы до вершины равно $\frac{p}{2}$. В нашем случае $\frac{p}{2}=2{,}5.$

Вершина параболы находится в точке с координатами $x = 1,$ $y = 1.$ Поэтому получаем уравнение директрисы:

$$x = 1-2{,}5 = -1{,}5.$$

Глава 3. ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Общее уравнение плоскости. Неполные уравнения

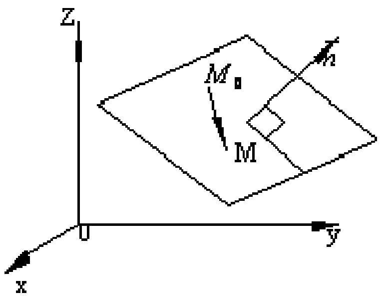
1. Общее уравнение плоскости

Любое уравнение первой степени относительно декартовых координат *x, y, z* представляет собой уравнение некоторой плоскости.

Рассмотрим в пространстве произвольную плоскость. Её положение определяется заданием вектора $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$, перпендикулярного этой плоскости, и некоторой фиксированной точки $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$, лежащей в плоскости.

Всякий (не равный нулю) вектор $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$, перпендикулярный к данной плоскости, называется её *нормальным вектором*.

Получим уравнение плоскости, проходящей через данную точку M_0 и имеющей нормальный вектор $\vec{n}$. Для этого возьмём



на плоскости произвольную точку $M\ (x;\ y;\ z)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}$.

Для любой точки *M* вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{n}$. Поэтому их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$(\overrightarrow{M_0M},\ \vec{n}) = 0.$$

Это равенство – условие того, что точка *M* принадлежит плоскости. Оно справедливо для всех точек этой плоскости и нарушается, как только точка *M* окажется вне плоскости.

Так как

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0),\quad \vec{n} = (A;\ B;\ C),$$

получаем

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_0) = 0.$$

Это *уравнение плоскости, проходящей через данную точку* $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n}$. Преобразуем его.

$$Ax + By + Cz + (-Ax_o - By_o - Cz_0) = 0.$$

Так как *A, B* и *C* – числовые коэффициенты, а x_0, y_0 и z_0 – координаты точки, то в скобках у нас постоянное число. Если это число обозначить через *D*, то получится *общее уравнение* плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

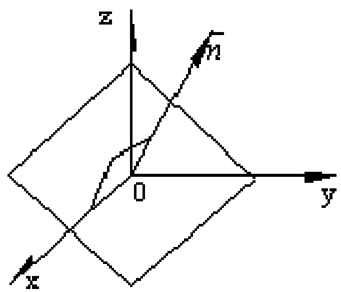
2. Неполные уравнения плоскости

Если один или несколько коэффициентов общего уравнения

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

равны нулю, то уравнение называется *неполным*.

Рассмотрим, как располагается плоскость относительно



системы координат, если один или несколько коэффициентов общего уравнения обращаются в нуль.

Возможны следующие случаи:

1) Пусть $D = 0$. Уравнение имеет вид

$$Ax + Cy + Bz = 0$$

и плоскость проходит через начало координат перпендикулярно нормальному вектору $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$.

2) Пусть $A = 0$. Уравнение имеет вид

$$By + Cz + D = 0,$$

нормальный вектор имеет координаты $\vec{n} = (0;\ B;\ C)$. Вектор с такими координатами перпендикулярен оси *Ox,* следовательно, плоскость параллельна оси *Ox.*

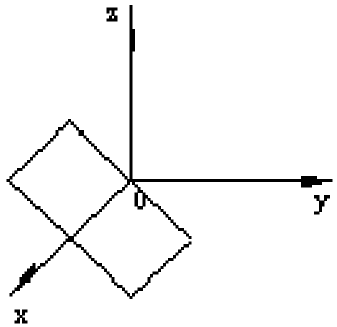
Аналогично, если $B = 0$, то плоскость

$$Ax + Cz + D = 0$$

параллельна оси Oy и если $C = 0$, то плоскость

$$Ax + By + D = 0$$

параллельна оси Oz.



3) Пусть $A = D = 0$. Уравнение имеет вид

$$By + Cz = 0,$$

нормальный вектор с координатами $\vec{n} = (0;\ 0;\ C)$ перпендикулярен плоскости Oxy. Поэтому уравнению соответствует плоскость, проходящая через ось Ox.

Аналогично, при $B = D = 0$ плоскость

$$Ax + Cz = 0$$

проходит через ось Oy.

При $C = D = 0$ плоскость

$$Ax + By = 0$$

проходит через ось Oz.

4) Пусть $A = B = 0$. Плоскость можно записать в виде

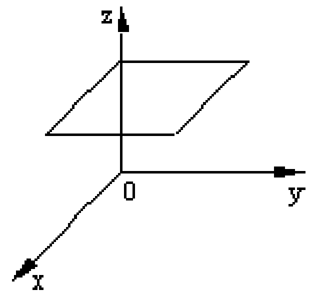
$$Cz + D = 0,$$

нормальный вектор имеет координаты $\vec{n} = (0;\ 0;\ C)$. Вектор с такими координатами перпендикулярен плоскости Oxy. Значит, плоскость проходит параллельно осям Ox и Oy, или параллельно координатной плоскости Oxy. Плоскость будет проходить через точку с координатой $(0;\ 0;\ z)$.

Аналогично, уравнениям $A\,x + D = 0$ и $B\,y + D = 0$ соответствуют плоскости, параллельные координатным плоскостям Oyz и Oxz.

5) Пусть $A = B = D = 0$. Уравнение плоскости имеет вид

$$C\,z = 0 \quad \text{или} \quad z = 0.$$



Эта плоскость проходит через начало координат и параллельна осям Ox и Oy, то есть уравнение определяет координатную плоскость Oxy.

Аналогично, $x = 0$ – уравнение координатной плоскости Oyz и $y = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxz.

Примеры.

1) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M\ (1;\ -2;\ 3)$ перпендикулярно вектору $\vec{n} = (2;\ 0;\ 4)$.

Решение. Используя уравнение

$$A\ (x - x_o) + B\ (y - y_o) + C\ (z - z_0) = 0,$$

получим

$$2\ (x - 1) + 0\ (y + 2) + 4\ (z - 3) = 0 \quad \text{или} \quad x + 2z - 7 = 0.$$

2) Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M\ (2;\ 3;-4)$ параллельно плоскости Oyz (перпендикулярно оси Ox).

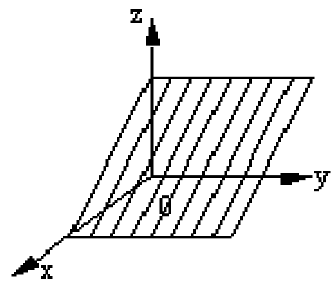
Решение. Так как искомая плоскость α параллельна плоскости Oyz, то уравнение плоскости будет иметь вид

$$Ax + D = 0.$$

С другой стороны, точка M принадлежит плоскости α, поэтому

$$2A + D = 0, \qquad D = -2A.$$

Поэтому плоскость имеет уравнение $x - 2 = 0$.



3) Построить плоскость

$$2x + 5z - 10 = 0.$$

Решение. Это неполное уравнение плоскости, параллельной оси Oy. Найдём точки ее пересечения с осями Ox и Oz.

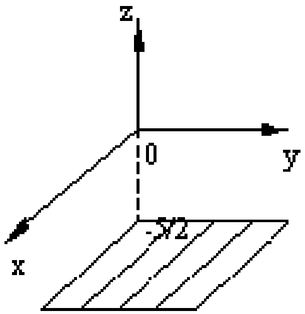
При $x = 0$ находим: $z = 2$.

При $z = 0$ получаем: $x = 5$.

Отметим на координатной плоскости точки с координатами $(5; 0; 0)$ и $(0; 0; 2)$. Построим искомую плоскость.

4) Построить плоскость

$$2z + 5 = 0.$$



Решение. Данная плоскость проходит параллельно плоскости *Oxy*. Выразим из уравнения переменную *z*. Получаем: $z = -\frac{5}{2}$. Отметим на координатной плоскости точку с координатами $(0; 0; -\frac{5}{2})0$ и строим плоскость.

§ 2. Различные виды уравнений плоскости в пространстве

1. Уравнение плоскости в отрезках

Рассмотрим плоскость, которая пересекает все три координатные оси и не проходит через начало координат. Пусть плоскость задана уравнением в общем виде

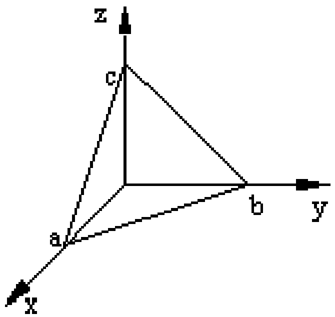
$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где ни один из коэффициентов не равен нулю. Преобразуем это уравнение:

$$Ax + By + Cz = -D.$$

Поделим полученное равенство на $-D$:

$$\frac{x}{-D/A} + \frac{y}{-D/B} + \frac{z}{-D/C} = 1.$$



Обозначив

$$a = -\frac{D}{A}, \quad b = -\frac{D}{B}, \quad c = -\frac{D}{C},$$

приходим к уравнению *плоскости в отрезках*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где *a, b, c* – величины отрезков, которые отсекает плоскость на координатных осях.

2. Нормальное уравнение плоскости

Пусть дано общее уравнение плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Приведем его к нормальному виду. Для этого все члены этого уравнения умножим на *нормирующий множитель* μ, определяемый формулой

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Получаем

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z + \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = 0.$$

Обозначим:

$$p = \frac{D}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$cos\ \gamma\ =\ \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Знак нормирующего множителя μ выбирается противоположным знаку свободного члена D нормируемого уравнения.

Получаем *нормальное уравнение* плоскости

$$x\ cos\ \alpha + y\ cos\ \beta + z\ cos\ \gamma - p = 0,$$

где $cos\ \alpha$, $cos\ \beta$, $cos\ \gamma$ – направляющие косинусы нормали плоскости,

p – расстояние до плоскости от начала координат.

Если $p = 0$, то плоскость проходит через начало координат.

Во избежание неопределённости знак перед радикалом выбирается так, чтобы соблюдалось условие $p > 0$.

3. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки

Пусть на плоскости имеются три точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3\ (x_3;\ y_3;\ z_3)$, не лежащие на одной прямой. Рассмотрим произвольную точку плоскости $M\ (x;\ y;\ z)$. Все эти четыре точки лежат в одной плоскости. Составим векторы

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1),$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = (x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1),$$

которые тоже лежат в той же самой плоскости.

Если три вектора лежат в одной плоскости, то они компланарны, а по условию компланарности, их смешанное произведение должно быть равно нулю. Получаем

$$(\overrightarrow{M_1M}\cdot\overrightarrow{M_1M_2}\cdot\overrightarrow{M_1M_3}) = 0.$$

Смешанное произведение трех векторов равно определителю третьего порядка, в строках которого стоят координаты векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$. Именно эту формулу смешанного произведения векторов и представляет собой левая часть нашего уравнения плоскости, проходящей через три известные точки M_1, M_2, M_3:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Примеры.

1) Найти отрезки, отсекаемые плоскостью

$$2x + 3y + 6z - 6 = 0$$

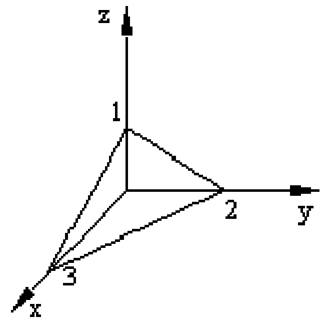
на координатных осях и построить плоскость.

Решение. Приведём это уравнение к уравнению плоскости в отрезках. Для этого запишем

$$2x + 3y + 6z = 6.$$

Разделим обе части уравнения на число 6. Получаем

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}+\frac{z}{1}=1.$$



Значит, $a = 3,\ b = 2,\ c = 1$. Отмечаем эти отрезки на координатных осях и получаем плоскость.

2) Привести уравнение плоскости

$$x + 2y - 2z + 9 = 0$$

к нормальному виду.

Решение. Умножим обе части уравнения на нормирующий множитель $\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Знак нормирующего множителя должен быть противоположным знаку свободного члена нормируемого уравнения. Таким образом, так как $D = 9 > 0$, то

$$\mu = \frac{1}{-\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{-\sqrt{1+4+4}} = -\frac{1}{3}.$$

Получаем искомое уравнение

$$-\frac{x}{3} - \frac{2y}{3} + \frac{2z}{3} - 3 = 1.$$

3) Из точки $M\ (2;\ 3;\ -5)$ на координатные плоскости опущены перпендикуляры. Найти уравнение плоскости, проходящей через их основания.

Решение. Основаниями перпендикуляров, опущенных на координатные плоскости, будут следующие точки: $M_1\ (2;\ 3;\ 0)$, $M_2\ (2;\ 0;\ -5)$, $M_3\ (0;\ 3;\ -5)$. Запишем уравнение плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3. Для этого воспользуемся уравнением

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Находим

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ 0 & -3 & -5 \\ -2 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$15\ (x-2) - (-10)\ (y-3) + (-6)\ z = 0.$$

Отсюда получаем уравнение искомой плоскости

$$15x + 10y - 6z - 60 = 0.$$

§ 3. Взаимное расположение двух плоскостей

1. Угол между двумя плоскостями

Пусть даны две плоскости

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

с нормальными векторами $\vec{n}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$.

Известна формула нахождения скалярного произведения двух векторов:

$$(\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2) = |\,\vec{n}_1\,| \cdot |\,\vec{n}_2\,| \cdot \cos\varphi.$$

Откуда

$$\cos\varphi = \frac{\left(\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}\right)}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|}.$$

Итак, *угол* между двумя плоскостями равен углу между их нормальными векторами $\vec{n}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$. Запишем правую часть формулы в координатной форме и получим

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

2. Условие параллельности и перпендикулярности двух плоскостей

Для того, чтобы две плоскости

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0, \quad A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

были *перпендикулярны*, необходимо, чтобы были перпендикулярны их нормальные векторы $\vec{n}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$, т.е.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$$

или

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

Для того, чтобы две плоскости

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

были *параллельны*, необходимо, чтобы выполнялось условие коллинеарности их векторов-нормалей, т.е. условие пропорциональности их координат

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Невыполнение хотя бы одного из этих условий означает, что плоскости не параллельны, т.е. *пересекаются*.

Если $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2},$$

то плоскости *совпадают*, то есть оба уравнения определяют одну и ту же плоскость.

3. Расстояние между двумя плоскостями

Пусть даны две параллельные плоскости в общем виде

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0, \quad A\,x + B\,y + Cz + D_2 = 0.$$

Расстояние между ними находится по формуле:

$$\delta = \frac{D_1 - D_2}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

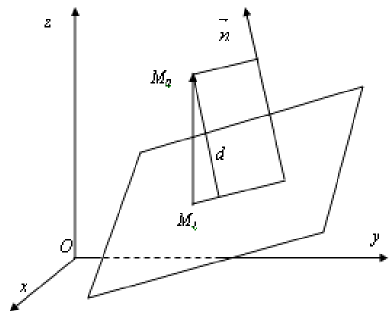
Если знак перед радикалом противоположен D_1, то d будет положительным, когда вторая прямая и начало координат лежат по разные стороны от первой прямой.

4. Расстояние от точки до плоскости

Пусть задана точка $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ и плоскость вида

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Найдем расстояние от этой точки до заданной плоскости. Возьмем в пространстве произвольную точку $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$. Расстояние от точки $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости равно модулю про-



екции вектора $\overrightarrow{M_1M_0}$ на направление нормального вектора $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$. Следовательно,

$$d = \left| \frac{\overrightarrow{M_1M_0} \bullet \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|.$$

Отсюда

$$d = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Преобразуем правую часть:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Так как точка $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ принадлежит заданной плоскости, то выполняется равенство

$$A\,x_1 + B\,y_1 + C\,z_1 = 0,$$

то есть

$$D = -A\,x_1 - B\,y_1 - C\,z_1.$$

Отсюда получаем, что *расстояние* от этой точки до плоскости находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Если точка M_0 и начало координат лежат по разные стороны от данной плоскости, то расстояние $d > 0$.

Если они лежат по одну сторону от данной плоскости, то $d < 0$.

Если M_0 лежит на самой плоскости, то $d = 0$.

Примеры.

1) Определить, при каких значениях l и m уравнения

$$lx - 3y + z - 12 = 0, \quad x + my - z = 0$$

будут определять параллельные плоскости.

Решение. Так как две плоскости параллельны, то по условию параллельности имеем

$$\frac{l}{1} = \frac{-3}{m} = \frac{1}{-1},$$

отсюда следует, что $l = -1,\ m = 3.$

2) Найти расстояние от точки $M(-5; -4; 8)$ до плоскости

$$12x + 24y - 8z - 88 = 0.$$

Решение. Подставим координаты точки $M(x_0; y_0; z_0)$ и коэффициенты общего уравнения в формулу и получим

$$d = \frac{|12\cdot(-5) + 24\cdot(-4) - 8\cdot 8 - 88|}{\sqrt{12^2 + 24^2 + (-8)^2}}$$

или

$$d = \frac{308}{\sqrt{784}} = \frac{308}{28} = 11.$$

3) Найти угол между плоскостями

$$6x + 2y - 4z + 9 = 0, \quad 9x + 3y - 6z - 4 = 0.$$

Решение. По условию нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ имеют координаты:

$$\vec{n}_1 = (6; 2; -4), \ \vec{n}_2 = (9; 3; -6).$$

Подставим их в формулу нахождения угла и получим:

$$\cos\varphi = \frac{6\cdot 9 + 2\cdot 3 + (-4)\cdot(-6)}{\sqrt{6^2 + 2^2 + (-4)^2}\cdot\sqrt{9^2 + 3^2 + (-6)^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{84}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{126}} = \frac{84}{\sqrt{7056}} = \frac{84}{84} = 1$$

или $\varphi = \arccos 1 = 0.$

Глава 4. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. Различные виды уравнений прямой в пространстве

1. Общие уравнения прямой в пространстве

Прямая в пространстве может быть определена как линия пересечения двух непараллельных плоскостей. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Каждое из уравнений этой системы определяет плоскость. Если плоскости не параллельны, то координаты нормальных векторов $\vec{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$ не пропорциональны. Значит, эта система определяет прямую как геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют каждому из уравнений системы. Эти уравнения называют *общими уравнениями прямой*.

2. Канонические уравнения прямой

Пусть на прямой дана фиксированная точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Рассмотрим на этой прямой еще любую текущую точку $M(x; y; z)$. Тогда не равный нулю вектор $\vec{a} = (l; m; n)$, лежащий на данной прямой, называется *направляющим вектором* прямой. Он коллинеарен любому вектору, лежащему на ней, в том числе и вектору

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0).$$

Это означает пропорциональность координат. Получаем *канонические уравнения прямой*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Из общих уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

можно получить канонические уравнения, если найти какую-либо точку M_0 этой прямой и ее направляющий вектор $\vec{a}$. Координаты точки $M_0\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ найдем, приравнивая одну из координат нулю. Так как прямая перпендикулярна нормальным векторам $\vec{n}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$, то за направляющий вектор $\vec{a}$ прямой можно принять векторное произведение $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$:

$$\vec{a} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}.$$

Отсюда координаты направляющего вектора $\vec{a}$ находятся из общих уравнений прямой по следующим формулам:

$$l = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

3. Параметрические уравнения прямой

Пусть даны канонические уравнения

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

прямой, проходящей через точку $M\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно вектору $\vec{a} = (l;\ m;\ n)$.

Приравняем каждое из отношений произвольному параметру *t,* выразим *x, y* и *z.* Получаем *параметрические уравнения* прямой*:*

$$\begin{cases} x = x_0 + l\,t \\ y = y_0 + m\,t\ , \\ z = z_0 + n\,t \end{cases}$$

где *t* – произвольно изменяющийся параметр,

x, y, z – функции от *t;* при изменении *t* величины *x, y, z* меняются так, что точка *M (x; y; z*) движется по данной прямой.

Обратно, из параметрических уравнений можно получить канонические уравнения прямой. Для этого необходимо выразить параметр *t*:

$$t = \frac{x - x_0}{l}, \quad t = \frac{y - y_0}{m}, \quad t = \frac{z - z_0}{n}.$$

Так как во всех трех соотношениях параметр *t* имеет одно и то же значение, то получаем *канонические уравнения* прямой

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

4. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть на прямой даны две точки $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ – направляющий вектор этой прямой. Каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ параллельно вектору $\vec{a} = (l;\ m;\ n)$, имеет вид

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}.$$

Подставив в это уравнение координаты вектора

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1),$$

получим уравнение прямой, *проходящей через две заданные точки* M_1 и M_2:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Примеры.

1) Написать канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M\ (2;\ 2;\ -5)$ параллельно вектору $\vec{a} = (1;\ 2;\ 0)$.

Решение. Из условия $x_0 = 2,\ y_0 = 2,\ z_0 = -5$. Координаты направляющего вектора $l = 1,\ m = 2,\ n = 0$.

Получаем искомые уравнения

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+5}{0}.$$

2) Определить, при каком значении D прямая

$$\begin{cases} 2x + y - 4z + D = 0 \\ x - 3y + 4z - 6 = 0 \end{cases}$$

пересекает ось Oy.

Решение. Прямая пересекает ось Oy, если $x = 0$ и $z = 0$. Получаем:

$$\begin{cases} 2\cdot 0 + y - 4\cdot 0 + D = 0 \\ 0 - 3y + 4\cdot 0 - 6 = 0 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} y + D = 0 \\ -3y - 6 = 0 \end{cases}.$$

Отсюда $D = 2$.

3) Найти какую-нибудь точку M на прямой

$$\begin{cases} 3x - y + z + 4 = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{cases}.$$

Решение. Положим $z = -4$. Получим систему

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y + 9 = 0 \end{cases}.$$

Решая ее, находим $x = -2.25,\ y = -6.75$. Итак, мы нашли координаты точки $M\ (-2.\,25;\ -6.75;\ -4)$.

§ 2. Деление отрезка в данном отношении. Расстояние между двумя точками

Пусть требуется разделить отрезок $M_1\ M_2$, соединяющий точки $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$, в заданном отношении $\lambda > 0$, т.е. найти координаты точки $M\ (x;\ y;\ z)$ отрезка $M_1\ M_2$ такой, что $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{MM_2}$. Имеем:

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1;\ \ y - y_1;\ \ z - z_1), \text{ т.е.}$$

$$\overrightarrow{M_1M} = (x - x_1)\ i + (\ y - y_1)\ j + (\ z - z_1)\ k \quad \text{и}$$

$$\overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x;\ y_2 - y;\ z_2 - z),$$

$$\text{т.е. } \overrightarrow{MM_2} = (x_2 - x)\ i + (\ y_2 - y)\ j + (\ z_2 - z)\ k.$$

Точка M делит отрезок $M_1\ M_2$ в отношении λ, если $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\ \overrightarrow{MM_2}$ или

$$(x - x_1)\ i + (\ y - y_1)\ j + (\ z - z_1)\ k =$$
$$= \lambda\cdot(x_2 - x)\ i + \lambda\cdot(\ y_2 - y)\ j + \lambda\cdot(\ z_2 - z)\ k.$$

Учитывая, что равные векторы имеют равные координаты, получаем

$$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x, \quad y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda y \quad \text{и} \quad z - z_1 = \lambda z_2 - \lambda z$$

Итак, координаты точки $M\ (x;\ y;\ z)$, которая делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = \dfrac{M_1M}{MM_2}$, находятся по формулам

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, если M – *середина* отрезка M_1M_2, то $\lambda = 1$ и координаты находятся по формулам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\qquad y=\frac{y_1+y_2}{2},\qquad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

Пусть даны две точки $M_1\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$. Расстояние d между ними в пространстве определяется как длина вектора

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$$

и находится по формуле

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

Примеры.

1) Найти координаты точки $A\ (x;\ 0;\ 0)$, равноудаленной от точек $B\ (1;\ 2;\ 5)$ и $C\ (2;\ 3;\ -4)$.

Решение. Используем формулу расстояния d между двумя точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

$$AB=\sqrt{(1-x)^2+2^2+5^2}=\sqrt{x^2-2x+30},$$

$$AC=\sqrt{(2-x)^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{x^2-4x+24}.$$

По условию $AB = AC$, поэтому

$$\sqrt{x^2-2x+30}=\sqrt{x^2-4x+24}\quad \text{или}$$

$$x^2-2x+30=x^2-4x+24.$$

Решим это уравнение: $2x=-6,\quad x=-3.$

Отсюда точка A имеет координаты $A\ (-3;\ 0;\ 0)$.

2) Даны вершины треугольника $M_1\ (4;\ 3;\ -2)$, $M_2\ (2;\ 5;\ 2)$ и $M_3\ (0;\ 1;\ 4)$. Найти координаты середин его сторон.

Решение. Найдем координаты середины отрезка M_1M_2:

$$x=\frac{4+2}{2}=3,\quad y=\frac{3+5}{2}=4,\quad z=\frac{-2+2}{2}=0.$$

Получаем точку $(3;\ 4;\ 0)$. Аналогично для второй точки – середины отрезка M_2M_3:

$$x=\frac{2+0}{2}=1,\quad y=\frac{5+1}{2}=3,\quad z=\frac{2+4}{2}=3\quad \text{или}\quad (1;\ 3;\ 3).$$

Для третьей точки

$$x=\frac{4+0}{2}=2,\quad y=\frac{3+1}{2}=2,\quad z=\frac{-2+4}{2}=1\quad \text{или}\quad (2;\ 2;\ 1).$$

Итак, искомые координаты $(3;\ 4;\ 0)$, $(1;\ 3;\ 3)$, $(2;\ 2;\ 1)$.

§ 3. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве

1. Взаимное расположение прямых и плоскостей

Рассмотрим прямую

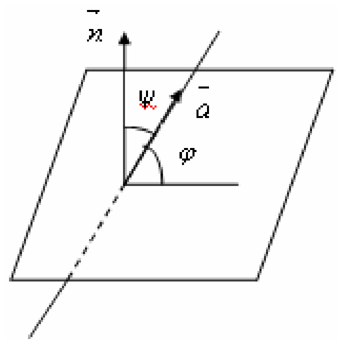
$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

проходящую через точку $M\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно вектору $\vec{a}=(l;\ m;\ n)$, и плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0$$

с нормальным вектором $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$.

Угол между прямой и плоскостью – это любой из двух смежных углов, образованных прямой и ее проекцией на плоскость.



Обозначим через φ – угол между прямой и плоскостью, через ψ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{n}$. Очевидно, что косинус угла между ними находится по формуле

$$cos\ \psi\ = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{n})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}.$$

Найдем синус угла φ, считая $\varphi \le \frac{\pi}{2}$.

$$sin\ \varphi = sin\ (\frac{\pi}{2} - \psi) = cos\ \psi.$$

Так как $sin\ \varphi \ge 0$, получаем

$$sin\varphi = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{n}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{n}|}.$$

Если известны координаты направляющего вектора прямой $\vec{a} = (l;\ m;\ n)$ и нормального вектора плоскости $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$, то синус *угла* между прямой и плоскостью находится по формуле

$$sin\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Если *прямая параллельна плоскости,* то векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$ перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю, т.е.

$$\vec{n}\ \cdot\ \vec{a}\ = 0.$$

Поэтому *условием параллельности* прямой и плоскости является условие

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Если *прямая перпендикулярна плоскости,* то векторы $\vec{a}$ и $\vec{n}$ параллельны. Поэтому равенство

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}$$

является *условием перпендикулярности* прямой и плоскости.

2. Взаимное расположение двух прямых

Пусть даны две прямые в каноническом виде – прямая

$$\frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

с направляющим вектором $\vec{a}_1 = (l_1;\ m_1;\ n_1)$, проходящая через точку $M_1\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$, и прямая

$$\frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}$$

с направляющим вектором $\vec{a}_2 = (l_2;\ m_2;\ n_2)$, проходящая через точку $M_2\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Найдем *угол* между двумя прямыми, т.е. угол между их направляющими векторами. Известна формула нахождения скалярного произведения двух векторов:

$$(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2) = |\,\vec{a}_1\,|\cdot|\,\vec{a}_2\,|\cdot cos\ \varphi.$$

Откуда $$cos\varphi = \frac{(\vec{a}_1\cdot\vec{a}_2)}{|\vec{a}_1|\cdot|\vec{a}_2|}.$$

Запишем правую часть в координатной форме и получим формулу нахождения *угла* между двумя прямыми

$$cos\varphi = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Две прямые *параллельны*, если их направляющие векторы $\vec{a}_1 = (l_1;\ m_1;\ n_1)$, $\vec{a}_2 = (l_2;\ m_2;\ n_2)$ коллинеарны, т.е. их координаты пропорциональны. Следовательно, должно выполняться условие

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Две прямые *перпендикулярны,* если их направляющие векторы перпендикулярны, т.е.

$$l_1\,l_2 + m_1\,m_2 + n_1\,n_2 = 0.$$

3. Пересечение прямой и плоскости

Пусть заданы прямая

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},$$

проходящая через точку $M\ (x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно вектору $\vec{a}=(l;\ m;\ n)$, и плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0$$

с нормальным вектором $\vec{n}=(A;\ B;\ C)$. Уравнение прямой эквивалентно системе

$$\begin{cases} x=x_0+l\,t \\ y=y_0+m\,t \\ z=z_0+n\,t \end{cases}.$$

Подставим x, y, z из этой системы в уравнение плоскости:

$$t\,(Al+Bm+Cn)=-(x_0+y_0+z_0+D).$$

Если $Al+Bm+Cn=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$,

то прямая *лежит* на плоскости, и, следовательно, имеет бесконечное множество решений.

Если $Al+Bm+Cn=0$, $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$,

то прямая *параллельна* плоскости и *не лежит* на ней, значит, решений нет.

Если $Al+Bm+Cn\neq 0$, то

$$t=-\frac{x_0+y_0+z_0+D}{Al+Bm+Cn}$$

и существует *одна точка* пересечения, т.е. имеется единственное решение.

Примеры.

1) При каком значении C и D прямая

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+5}{2}$$

принадлежит плоскости $Cx+y+D=0$?

Решение. Прямая лежит на плоскости, если она параллельна плоскости и хотя бы одна ее точка принадлежит плоскости т.е. выполняются следующие равенства

$$\begin{cases} -1C+4=0 \\ 2C-1+D=0 \end{cases}.$$

Решив эту систему, получим, что при $C=4$ и $D=-7$ данная прямая принадлежит плоскости.

2) При каких значениях A и D прямая $\begin{cases} x=3+4t \\ y=1-4t \\ z=-3+t \end{cases}$

лежит в плоскости $Ax+2y-3z+D=0$?

Решение. Из условия $x_0=2,\ y_0=4,\ z_0=1,\ l=3,\ m=6,\ n=1.$ Получаем

$$\begin{cases} A\cdot 3+2\cdot 6-3\cdot 1=0 \\ A\cdot 2+2\cdot 4-3\cdot 1+D=0 \end{cases}.$$

Решаем систему и находим $A=-3,\ D=1.$

3) Найти точку пересечения прямой

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{2}$$

и плоскости $2x+4y-3z-1=0.$

Решение. Параметрическое уравнение прямой имеет вид

$$\begin{cases} x=-t-2 \\ y=t+1 \\ z=2t-3 \end{cases}.$$

Подставим в уравнение плоскости вместо переменных x, y, z их выражения:

$$2\,(-t-2)+4\,(t+1)-3\,(2t-3)-1=0.$$
$$-2t-4+4t+4-6t+9-1=0.$$
$$-4t+8=0,\quad t=2.$$

Таким образом, координаты искомой точки (– 4; 3; 1).

4) Определить, при каком значении m пара уравнений

$$\begin{cases} x=2+2t \\ y=-4+mt\,, \\ z=-3+3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x=6t \\ y=1+4t \\ z=-2+9t \end{cases}$$

будет определять параллельные прямые.

Решение. Направляющие векторы прямых имеют координаты $\vec{a}_1=(2;\ m;\ 3)$, $\vec{a}_2=(6;\ 4;\ 9)$. Подставим их в условие параллельности прямых:

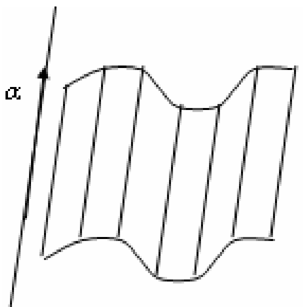
$$\frac{2}{6}=\frac{m}{4}=\frac{3}{9}.$$

Отсюда $m=12$.

Глава 5. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Уравнением данной поверхности (в выбранной системе координат) называется такое уравнение с тремя переменными $P\,(x;\ y;\ z)=0,$ которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на этой поверхности, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.

§ 1. Цилиндрические поверхности



Пусть заданы вектор $\vec{a}$ и некоторая кривая, лежащая на плоскости. Ес-

ли через каждую точку этой кривой провести прямую параллельно данному вектору $\vec{a}$, то получим поверхность, называемую *цилиндрической поверхностью* или *цилиндром.*

Прямые, параллельные вектору $\vec{a}$ и принадлежащие цилиндрической поверхности, называются *образующими* этой поверхности, а кривая называется *направляющей* цилиндрической поверхности.

Уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Ox, имеет вид

$$F\,(y;\ z)=0.$$

Если образующие параллельны оси Oy, то уравнение цилиндрической поверхности имеет вид

$$F\,(x;\ z)=0.$$

Если образующие параллельны оси Oz, то уравнение цилиндрической поверхности имеет вид

$$F\,(x;\ y)=0.$$

Название цилиндрической поверхности определяется названием ее направляющей. Пусть в пространстве $Oxyz$ направляющая параллельна оси Oz, а образующая лежит в плоскости Oxy.

Если направляющей является эллипс с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в плоскости Oxy, то соответствующая цилиндрическая поверхность называется *эллиптическим цилиндром.*

Частным случаем эллиптического цилиндра при $a=b=R$ является *круговой цилиндр*, его уравнение

$$x^2+y^2=R^2.$$

Если направляющей является гипербола с уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

то она определяет в пространстве *гиперболический цилиндр.*

Если направляющей является парабола с уравнением

$$y^2 = 2px,$$

то она определяет в пространстве *параболический цилиндр.*

Все эти поверхности называются *цилиндрами второго порядка,* так как их уравнения – это уравнения второй степени относительно текущих координат x, y, z.

§ 2. Сфера

Сфера – это множество точек пространства, равноудаленных от заданной точки, называемой центром.

Каноническое уравнение сферы с центром в точке $C\ (a;\ b;\ c)$ и радиусом r определяется уравнением

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2.$$

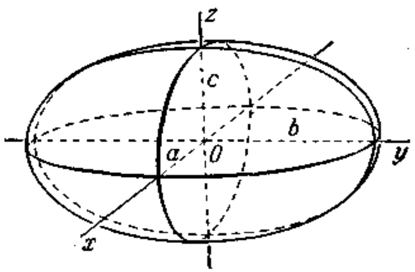
Уравнение *сферы* радиуса r, центр которой находится в начале координат, имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

§ 3. Эллипсоид

Эллипсоид – это поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется *каноническим уравнением*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 .$$



Величины a, b, c – *полуоси* эллипсоида. Если все они различны, эллипсоид называется *трёхосным*. В

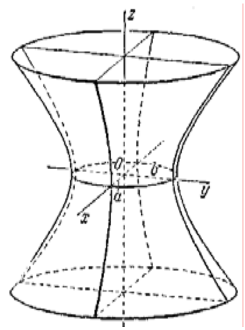
случае, когда какие-нибудь две из них одинаковы, эллипсоид является *поверхностью вращения*.

Если $a = b$, то осью вращения будет Oz.

При $a = b < c$ эллипсоид вращения называется *вытянутым*, при $a = b > c$ – *сжатым*.

В случае, когда $a = b = c$, эллипсоид представляет собой *сферу*.

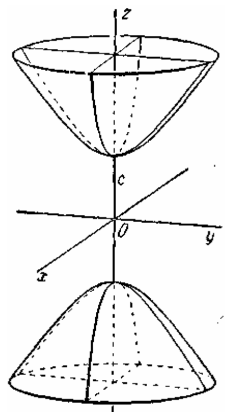
§ 4. Гиперболоид



Гиперболоид – это поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется *каноническими уравнениями.* Гиперболоид, определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 ,$$

называется *однополостным.*



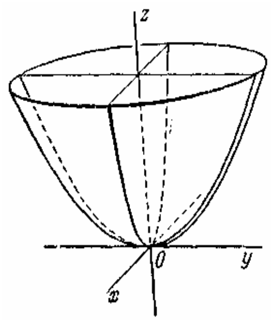
Гиперболоид, определяемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 ,$$

называется *двуполостным*.

Величины a, b, c называются *полуосями* гиперболоида. Данные гиперболоиды при $a = b$ являются *поверхностями вращения*.

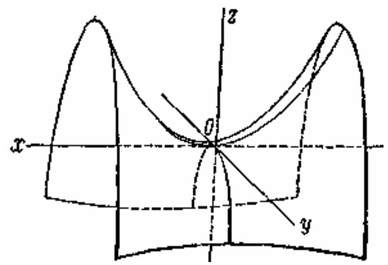
§ 5. Параболоид



Параболоид – это поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется каноническими уравнениями. Параболоид, определяемый уравнением

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

называется *эллиптическим.*



Уравнение *гиперболического* параболоида имеет вид

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

Величины a и b – *полуоси* параболоида.

При $a = b$ эллиптический параболоид является *поверхностью вращения* (вокруг оси Oz).

§ 6. Уравнения линии. Пересечение трёх поверхностей

Линия в пространстве определяется совместным заданием двух уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z,) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

как пересечение двух поверхностей $F(x, y, z) = 0$ и $\Phi(x, y, z) = 0$.

Если $F(x, y, z) = 0$, $\Phi(x, y, z) = 0$, $\Psi(x, y, z) = 0$ – уравнения трёх поверхностей, то для разыскания точек их пересечения нужно совместно решить систему $\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ \Phi(x, y, z) = 0 \\ \Psi(x, y, z) = 0 \end{cases}$. Каждое решение x, y, z этой системы представляет собой координаты одной из точек пересечения данных поверхностей.

Примеры.

1) Определить координаты центра C и радиус r сферы, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8z - 11 = 0.$$

Решение. Преобразуем условие

$$(x^2 - 6x) + y^2 + (z^2 + 8z) - 11 = 0.$$

Выделим полный квадрат в скобках и получим уравнение сферы

$$(x - 3)^2 + y^2 + (z + 4)^2 = 36$$

с центром в точке $C(3; 0; -4)$ и радиусом $r = 6$.

2) Установить, какая линия определяется уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 16 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Решение: Первое уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = 16$$

определяет уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом, равным 4. Второе уравнение $y = 0$ определяет координатную плоскость Oxz. Запись двух уравнений в систему означает их пересечение. Поэтому искомой линией является окружность, лежащая на плоскости Oxz с центром в начале координат и радиусом, равным 4.

3) Какую поверхность определяет в пространстве уравнение $x^2 = 4y$?

Решение. Уравнение $x^2 = 4y$ определяет параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz. Направляющей цилиндрической поверхности является парабола $x^2 = 4y$, $z = 0$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Вариант 1

1) Составить общее уравнение прямой

$$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$$

и указать координаты нормального вектора.

Ответы:

1) $2x - 2y - 15 = 0$; $n = (2; -2)$ 2) $5x - y + 5 = 0$; $n = (5; -1)$

3) $2x + 3y - 6 = 0$; $n = (2; 3)$ 4) $-x + 2y - 3 = 0$, $n = (-1; 2)$

2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a + 2)x + (a^2 - 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

параллельна оси абсцисс. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $a = -2$, $5y - 33 = 0$;   2) $a = -3$, $x - 21 = 0$;

3) $a = 3$, $5x + 8 = 0$;   4) $a = \frac{5}{3}$, $3x - 6y = 0$.

3) Определить взаимное расположение прямых

$$12x + 15y - 8 = 0, \qquad 4x + 5y - 7 = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются;   2) параллельны;

3) перпендикулярны;   4) совпадают.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = +\sqrt{9 - x^2}\ .$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;

2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;

3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

$$6x - 8y + lz - 9 = 0, \qquad 3x + my + 2z - 3 = 0.$$

Ответы:

1) $l = 3,\ m = 4$; 2) $l = 1,\ m = -4$;
3) $l = 4,\ m = 1$; 4) $l = 4,\ m = -4$.

6) Привести уравнение плоскости

$$2x - 2y + z - 18 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - 6 = 0$, 2) $\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 1 = 0$;

3) $\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{11}{14} = 0$; 4) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{11}{14} = 0$.

7) Вычислить расстояние d от точки $M(-2; -4; 3)$ до плоскости

$$2x - y + 2z + 3 = 0.$$

Ответы:

1) $d = 5$; 2) $d = 3$; 3) $d = 1$; 4) $d = 8$.

8) При каком значении m прямая

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$$

перпендикулярна плоскости

$$9x - 3y - 6z + 5 = 0?$$

Ответы:

1) $m = -1$; 2) $m = 1$; 3) $m = -2$; 4) $m = 4$.

9) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M(2; 0; -3)$ параллельно вектору $a = (2; -3; 5)$.

Ответы:

1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$;

3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$.

10) Составить уравнение линии пересечения плоскости Oxz и сферы с центром в начале координат и радиусом, равным 3.

Ответы:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3 \\ y = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ x = 0 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ y = 0 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 0. \end{cases}$

Вариант 2

1) Написать параметрическое уравнение прямой

$$2x - 3y - 6 = 0.$$

1) $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ x = -3t \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 2t. \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 2t \\ z = 3 + 3t. \end{cases}$

2) Определить, при каких значениях m и n две прямые

$$mx + 8y + n = 0, \qquad 2x + my - 1 = 0$$

перпендикулярны.

Ответы:

1) $m = 2,\ n = 1$; 2) $m = -1,\ n = 5$;
3) $m = 0,\ n$ – любое; 4) $m = 6,\ n$ – любое.

3) Определить, какое из следующих уравнений является уравнением в отрезках на осях для прямой

$$x + y - 5 = 0.$$

а) $\frac{x}{5} - \frac{y}{5} = 1$; *б)* $\frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1$;

$$в)\ \frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1; \qquad г) -\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1.$$

Ответы:

1) г; 2) а; 3) б; 4) в.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = 15 - \sqrt{64 - x^2}\ .$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости над прямой

$$y - 15 = 0;$$

2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости под прямой

$$y - 15 = 0;$$

3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

4) половина гиперболы, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M\ (2;\ 1;\ -1)$ и имеет нормальный вектор $n = (1,\ -2;\ 3)$.

Ответы:

1) $x - 2y + 3z + 3 = 0$; 2) $2x - y + 2z + 3 = 0$;

3) $3x + 2y + z + 1 = 0$; 4) $5x + 2y - 3z = 0$.

6) Привести уравнение плоскости

$$x - y - z\ \sqrt{2}\ + 16 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{2}{3}\ x + \frac{2}{3}\ y + \frac{2}{3} z + 2 = 0$; 2) $-\frac{1}{2}\ x + \frac{1}{2}\ y + \frac{\sqrt{2}}{2}\ z - 8 = 0$;

3) $\frac{2}{7}\ x + \frac{3}{7}\ y - \frac{6}{7}\ z - 1 = 0$; 4) $\frac{2}{3}\ x - \frac{2}{3}\ y + \frac{1}{3}\ z - 2 = 0$.

7) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M\ (4;\ 1;\ 2)$ параллельно заданной плоскости

$$3y + 2z - 5 = 0.$$

Ответы:

1) $3y + 2z - 7 = 0$; 2) $2y + 5z + 9 = 0$;

3) $5x - 2z + 2 = 0$; 4) $3y + 2z + 4 = 0$.

8) Найти координаты точки $A\ (0;\ 0;\ z)$, равноудаленной от точек $B\ (10;\ 0;\ -2)$ и $C\ (9;\ -2;\ 1)$.

Ответы:

1) A (0; 0; – 3); 2) A (0; 0; $-\frac{9}{2}$);

3) A (0; 0; 7); 4) A (0; 0; – 2).

9) Определить, при каком значении D прямая

$$\begin{cases} x + 2y - z + D = 0 \\ 2x - y + 4z - 8 = 0 \end{cases}$$

пересекает ось Oy.

Ответы:

1) $D = 3$; 2) $D = 4$; 3) $D = -6$; 4) $D = 16$.

10) Установить, какая линия определяется уравнением

$$\begin{cases} x - 2 = 0 \\ \ y = 0. \end{cases}$$

Ответы:

1) прямая, проходящая через точку (2; 0; 0) параллельно оси Oz;

2) ось ординат;

3) прямая, проходящая через точку (2; 0; 0) параллельно оси Ox;

4) уравнение определяет единственную точку (2; 0; 0).

Вариант 3

1) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через $M = (3;\ -2)$ параллельно вектору $a = (1;\ 3)$.

Ответы:

1) $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = t. \end{cases}$

2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a + 2)\,x + (a^2 - 9)\,y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

проходит через начало координат. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $a = 2$, $4y + 3 = 0$; 2) $a_1 = -3$, $x - 2 = 0$; $a_2 = 3$, $5x + 6 = 0$;

3) $a = 1$, $2y + 7 = 0$; 4) $a_1 = 1$, $3x - 8y = 0$; $a_2 = \frac{5}{3}$, $33x - 56y = 0$.

3) Определить, какое из следующих уравнений прямых является нормальным:

а) $\frac{3}{5}x - \frac{1}{5}y - 3 = 0$; б) $x - 2 = 0$;

в) $\frac{5}{13}x - \frac{2}{13}y + 2 = 0$; г) $y + 2 = 0$.

Ответы:

1) в; 2) а; 3) б; 4) г.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = -\sqrt{25 - x^2}\ .$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в правой полуплоскости;

2) половина эллипса, расположенная в левой полуплоскости;

3) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;

4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $n = (5;\,0;\,-3)$.

Ответы:

1) $2y + 3z + 3 = 0$; 2) $x + 3y - z = 0$;

3) $3x + 4z + 1 = 0$; 4) $5x - 3z = 0$.

6) Определить, при каких значениях l и m следующие пары уравнений будут определять параллельные плоскости:

$$2x + ly + 3z - 5 = 0, \qquad mx - 6y - 6z + 2 = 0.$$

Ответы:

1) $l = 3$, $m = -4$; 2) $l = 3$, $m = 2$;

3) $l = 3$, $m = 4$; 4) $l = 1$, $m = 3$.

7) Вычислить расстояние d от точки $M\,(1;\,2;\,-3)$ до плоскости

$$5x - 3y + z + 4 = 0.$$

Ответы:

1) $d = 1$; 2) $d = 0$ – точка M лежит на плоскости;

3) $d = 2$; 4) $d = 6$.

8) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M\;(2;\,0;\,-3)$ параллельно оси Ox.

Ответы:

1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$;

3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$.

9) Найти координаты точки $A\;(x;\,0;\,0)$, равноудаленной от точек $B\;(4;\,0;\,5)$ и $C\;(5;\,4;\,2)$.

Ответы:

1) A (3; 0; 0); 2) A (2; 0; 0);

3) A (4; 0; 0); 4) A (– 2; 0; 0).

10) Выяснить, какой геометрический образ определяется уравнением

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 49$$

в декартовых прямоугольных координатах пространства.

Ответы:

1) сфера с центром в начале координат и радиусом, равным 7;

2) сфера с центром в точке (– 2; 3; – 5) и радиусом, равным 49;

3) сфера с центром в точке (2; 3; 5) и радиусом, равным 7;

4) сфера с центром в точке (2; – 3; 5) и радиусом, равным 7.

Вариант 4

1) Дана прямая

$$2x + 5y + 1 = 0.$$

Определить угловой коэффициент k прямой, параллельной данной прямой.

Ответы:

1) $k = 0$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\dfrac{2}{5}$; 4) $k = -\dfrac{5}{2}$.

2) Определить, при каких значениях m и n две прямые

$$mx + 8y + n = 0, \qquad 2x + my - 1 = 0$$

совпадают.

Ответы:

1) $m = 2$, $n = 2$; 2) $m = -4$, $n = 2$ или $m = 4$, $n = -2$;
3) $m = -3$, $n = 4$; 4) $m = 3$, $n = 1$ или $m = 4$, $n = 2$.

3) Определить, какое из следующих уравнений является уравнением в отрезках на осях для прямой

$$2x - 3y - 6 = 0:$$

$$а)\ \frac{x}{6} - \frac{y}{6} = 1; \qquad б)\ \frac{x}{5} + \frac{y}{5} = 1;$$

$$в)\ \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1; \qquad г)\ -\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1.$$

1) а; 2) г; 3) б; 4) в.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$x = -2 - \sqrt{9 - y^2}.$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная влево от прямой

$$x + 2 = 0;$$

2) полуокружность, расположенная вправо от прямой

$$x + 2 = 0;$$

3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;
4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Найти точки пересечения плоскости

$$3x - 3y + z - 9 = 0$$

с осями координат.

Ответы:

1) (3; 0; 0), (0; – 3; 0), (0; 0; 9); 2) (1; 0; 0), (0; – 2; 0), (0; 0; – 6);
3) (1; 0; 0), (0; 8; 0), (0; 0; 5); 4) (2; 0; 0), (0; 6; 0), (0; 0; – 1).

6) Привести уравнение плоскости

$$-4x - 4y + 2z + 1 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{2}{3}z - 6 = 0$; 2) $\dfrac{3}{7}x - \dfrac{6}{7}y + \dfrac{2}{7}z + 7 = 0$;

3) $\dfrac{2}{7}x - \dfrac{3}{7}y - \dfrac{6}{7}z + \dfrac{11}{14} = 0$; 4) $\dfrac{2}{3}x + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{1}{3}z - \dfrac{1}{6} = 0$.

7) Найти угол между плоскостями

$$x - 3y + 5 = 0, \qquad 2x - y + 5z - 16 = 0.$$

Ответы:

1) $\cos\alpha = 0$; 2) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$; 4) $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$.

8) При каком значении C и D прямая

$$\frac{x+2}{-2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{2}$$

принадлежит плоскости

$$x + 2y + Cz + D = 0?$$

Ответы:

1) $C = -2$, $D = 6$; 2) $C = -1$, $D = 5$;

3) $C = 2$, $D = 6$; 4) $C = 3$, $D = 2$.

9) Определить, при каком значении m пара уравнений

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -4 - t \\ z = 3 + t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = 4t \\ y = 1 + mt \\ z = -6 + 2t \end{cases}$$

будет определять параллельные прямые.

Ответы:

1) $m = 6$; 2) $m = -2$; 3) $m = 3$; 4) $m = 1$.

10) Установить, какая линия определяется уравнением

$$\begin{cases} x + 2 = 0 \\ y - 3 = 0. \end{cases}$$

Ответы:

1) прямая, проходящая через точку (– 2; 3; 0) параллельно оси Oz;

2) ось аппликат;

3) сфера с центром в точке (2; 3; 5);

4) прямая, проходящая через точку (2; 3; 0) параллельно оси Oy..

Вариант 5

1) Составить уравнение прямой, зная её угловой коэффициент $k = -2$ и отрезок $b = -5$, отсекаемый ею на оси Oy.

Ответы:

1) $3x + 2y + 1 = 0$; 2) $2x + y + 5 = 0$;

3) $3x + 8 = 0$; 4) $y + 2 = 0$.

2) Определить, при каких значениях m и n прямая

$$(3m + n + 3)\, x + (m - 2n + 2)\, y + 6m + 9 = 0$$

параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, равный -3 (считая от начала координат). Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $m = 7$, $n = 2$, $y + 3 = 0$; 2) $m = -2$, $n = 3$, $-6y - 3 = 0$;

3) $m = -7$, $n = 4$, $y - 5 = 0$; 4) $m = 3$, $n = 1$, $y + 3 = 0$.

3) Определить, какое из следующих уравнений прямых является нормальным:

$$а)\ \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 2 = 0; \qquad б)\ y - 5 = 0;$$

$$в)\ \frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 1 = 0; \qquad г)\ 3x + 4 = 0.$$

Ответы:

1) в; 2) б; 3) а; 4) г.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$x = -\sqrt{4 - y^2}\ .$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в левой полуплоскости;

2) полуокружность, расположенная в правой полуплоскости;

3) половина эллипса, расположенная в правой полуплоскости;

4) половина эллипса, расположенная в левой полуплоскости.

5) Определить взаимное расположение плоскостей

$$3x - 2y - 7 = 0, \qquad 6x - 4y - 3 = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;

3) перпендикулярны; 4) совпадают.

6) Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями

$$x - 2y + 2z - 3 = 0 \quad и \quad 2x - 4y + 4z - 30 = 0.$$

Ответы:

1) $d = 6$; 2) $d = 3$; 3) $d = 4$; 4) $d = 2$.

7) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M\ (1; -5; 4)$ параллельно заданной плоскости

$$4x - 7z + 6 = 0.$$

Ответы:

1) $y - 6z + 3 = 0$; 2) $6x + 3y - 2z = 0$;

3) 4x – 7z + 2 = 0; 4) 4x – 7z + 24 = 0.

8) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку *M (2; 0; – 3)* параллельно оси *Oz*.

Ответы:

1) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$; 2) $\frac{x-2}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{0}$;

3) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z+3}{1}$.

9) Определить, при каком значении *D* прямая

$$\begin{cases} x+2y-z+D=0 \\ 2x-y+4z-8=0 \end{cases}$$

пересекает ось *Oz*.

Ответы:

1) *D* = 2; 2) *D* = 3; 3) *D* = – 1; 4) *D* = 6.

10) Составить уравнения линии пересечения сферы, центр которой находится в начале координат и радиус равен 5, с плоскостью, параллельной плоскости *Oxz* и лежащей в левом полупространстве на расстоянии двух единиц от нее.

Ответы:

1) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ y+2=0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=5 \\ y-2=0 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=25 \\ y=0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ y=0. \end{cases}$

Вариант 6

1) Составить общее уравнение прямой

$$-\frac{1}{5}(x+10)+3\left(y-\frac{2}{3}\right)=0$$

и указать координаты нормального вектора.

Ответы:

1) x – 5y – 15 = 0, *n* = (1; – 5); 2) 2x – y + 2 = 0, *n* = (2; – 1);

3) 4x + 2y + 1 = 0, *n* = (4; 2); 4) x – 15y + 20 = 0, *n* = (1; – 15).

2) Определить взаимное расположение прямых

$$3x + 5y – 4 = 0, \qquad 6x + 10y + 7 = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;

3) перпендикулярны; 4) совпадают.

3) Дана прямая

$$2x + 3y – 6 = 0.$$

Составить для нее уравнение «в отрезках на осях».

Ответы:

1) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}=1$; 2) $\frac{x}{3}+\frac{z}{2}=1$;

3) $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$; 4) $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$x=-2+\sqrt{9-y^2}\ .$$

Ответы:

1) половина эллипса, расположенная вправо от прямой x + 2 = 0;

2) полуокружность, расположенная влево от прямой x + 2 = 0;

3) полуокружность, расположенная вправо от прямой x + 2 = 0;

4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Определить, при каких значениях *l* и *m* данные плоскости будут совпадать:

$$2x + my + 6z – 10 = 0, \qquad x – 5y – lz – 5 = 0.$$

Ответы:

1) *l* = – 3, *m* = – 10; 2) *l* = 3, *m* = – 4;

3) *l* = 3, *m* = 4; 4) *l* = 1, *m* = 3.

6) Привести уравнение плоскости

$$3x – 4y – 1 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z + 2 = 0$; 2) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{5}z = 0$;

3) $y - 2 = 0$; 4) $x + 3 = 0$.

7) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат параллельно плоскости

$$5x - 3y + 2z - 3 = 0.$$

Ответы:

1) $5x - 3y + 2z = 0$; 2) $5x - 2y + 5z - 6 = 0$;

3) $2x - 2y + z - 6 = 0$; 4) $2x - 5y + 7z - 6 = 0$.

8) При каком значении m прямая

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{m} = \frac{z+3}{-2}$$

параллельна плоскости

$$x - 3y + 6z + 7 = 0?$$

Ответы:

1) $m = -3$; 2) $m = 1$; 3) $m = -5$; 4) $m = 4$.

9) Найти координаты точки $A\ (0;\ y;\ 0)$, равноудаленной от точек $B\ (0;\ -2;\ 4)$ и $C\ (-4;\ 0;\ 4)$.

Ответы:

1) A (0; 3; 0); 2) A (0; – 2; 0);

3) A (0; 2; 0); 4) A (0; – 4; 0).

10) Выяснить, какой геометрический образ определяется уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25$$

в декартовых прямоугольных координатах пространства.

Ответы:

1) сфера с центром в начале координат и радиусом, равным 25;

2) эллипсоид вращения;

3) сфера с центром в начале координат и радиусом, равным 5;

4) параболоид вращения.

Вариант 7

1) Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M = (\frac{1}{2};\ \frac{3}{2})$ параллельно вектору $a = (-3;\ -2)$.

Ответы:

1) $\frac{x - \frac{3}{2}}{3} = \frac{y - \frac{1}{2}}{-2}$; 2) $\frac{x+3}{4} = \frac{y-4}{1}$;

3) $\frac{x - \frac{1}{2}}{-2} = \frac{y-3}{3}$; 4) $\frac{x - \frac{1}{2}}{-3} = \frac{y - \frac{3}{2}}{-2}$.

2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a + 1)\,x + (a^2 - 5)\,y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

параллельна оси абсцисс. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $a = -2$, $5y - 8 = 0$; 2) $a = -1$, $-y + 4 = 0$;

3) $a = -3$, $x - 6 = 0$; 4) $a = \frac{5}{3}$, $3x - 5y = 0$.

3) Привести общее уравнение прямой

$$12x - 5y + 13 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y + 5 = 0$; 2) $\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y + 2 = 0$;

3) $-\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 1 = 0$; 4) $x + 3 = 0$.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$x = +\sqrt{16 - y^2}\ .$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;

2) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

3) полуокружность, расположенная в левой полуплоскости;

4) полуокружность, расположенная в правой полуплоскости;

5) Определить взаимное расположение плоскостей

$$2x - 3y + 5z - 7 = 0, \qquad 4x - 6y + 10z + 3 = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;

3) перпендикулярны; 4) совпадают.

6) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M\ (2;\ 3;\ 5)$ и перпендикулярной вектору $n = (4;\ 6;\ 0)$.

Ответы:

1) $-y + 6z + 3 = 0$; 2) $2x + 2y - z = 0$;

3) $x + 5z + 1 = 0$; 4) $2x + 3y - 13 = 0$.

7) Найти точки пересечения плоскости

$$2x - 3y - 4z - 24 = 0$$

с осями координат.

Ответы:

1) (2; 0; 0), (0; – 3; 0), (0; 0; 5); 2) (12; 0; 0), (0; – 8; 0), (0; 0; – 6);

3) (1; 0; 0), (0; 8; 0), (0; 0; 3); 4) (0; 6; 0), (9; 0; 0), (0; 0; – 5).

8) При каких значениях A и B плоскость

$$Ax + y + Bz - 5 = 0$$

перпендикулярна прямой

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -5 + 3t \end{cases}.$$

Ответы:

1) $A = 3,\ B = -1$; 2) $A = -3,\ B = -2$;

3) $A = 4,\ B = -3$; 4) $A = -2,\ B = -3$.

9) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M\ (-2;\ 0;\ 1)$ и имеющий направляющий вектор $a = (2;\ -3;\ 4)$.

Ответы:

1) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$; 2) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$;

3) $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-4}{5} = \dfrac{z-3}{2}$; 4) $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-6}{3} = \dfrac{z+3}{0}$.

10) Определить координаты центра C и радиус r сферы, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y - 5 = 0.$$

Ответы:

1) $C\ (-2;\ 0;\ 1),\ r = 4$; 2) $C\ (-2;\ 4;\ 0),\ r = 5$;

3) $C\ (1;\ 0;\ 4),\ r = 5$; 4) $C\ (2;\ -4;\ 1),\ r = 3$.

Вариант 8

1) Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для прямой

$$5x + 3y + 2 = 0.$$

Ответы:

1) $k = 2,\ b = 1$; 2) $k = -\dfrac{5}{3},\ b = -\dfrac{2}{3}$;

3) $k = \dfrac{5}{3},\ b = \dfrac{2}{3}$; 4) $k = -5,\ b = 0$.

2) Определить, при каких значениях m и n две прямые

$$mx + 8y + n = 0, \qquad 2x + my - 1 = 0$$

параллельны.

Ответы:

1) $m = 3,\ n = 4$; 2) $m = -4,\ n \neq 2$ или $m = 4,\ n \neq -2$;

3) $m = -3,\ n = 2$; 4) $m = 1,\ n = 4$ или $m = 2,\ n = 4$.

3) Определить, какое из следующих уравнений является уравнением в отрезках на осях для прямой

$$x + 4y - 8 = 0.$$

а) $\frac{x}{5} - \frac{y}{5} = 1;$ б) $\frac{x}{4} + \frac{y}{8} = 1;$

в) $\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1;$ г) $\frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1.$

Ответы:

1) г; 2) в; 3) б; 4) а.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = 15 + \sqrt{64 - x^2}\ .$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная над прямой $y - 15 = 0$;
2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;
3) половина эллипса, расположенная над прямой $y - 15 = 0$;
4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Определить, при каком значении l пара уравнений

$$5x + y - 3z - 2 = 0, \qquad 2x + ly - 3z + 1 = 0$$

будет определять перпендикулярные плоскости.

Ответы:

1) $l = -19$; 2) $l = 12$; 3) $l = 3$; 4) $l = 1$.

6) Привести уравнение плоскости

$$-z + 3 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{5}z = 0$; 2) $-y - 2 = 0$;

3) $x + 5 = 0$; 4) $z - 3 = 0$.

7) Найти угол между плоскостями

$$x - 3y + z - 1 = 0, \qquad x + z - 1 = 0.$$

Ответы:

1) $\cos\alpha = \frac{13}{6}$; 2) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{22}}$;

3) $\cos\alpha = 0$; 4) $\cos\alpha = 0.5$.

8) При каких значениях A и D прямая

$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - 4t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

лежит в плоскости

$$Ax + 2y - 4z + D = 0?$$

Ответы:

1) $A = 3,\ D = -23$; 2) $A = -3,\ D = -2$;
3) $A = 23,\ D = -3$; 4) $A = 3,\ D = -1$.

9) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M\ (2;\ 0;\ -3)$ параллельно оси Oy.

Ответы:

1) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$; 2) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$;

3) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$.

10) Установить, какая линия определяется уравнением

$$\begin{cases} x - 5 = 0 \\ z + 2 = 0. \end{cases}$$

Ответы:

1) прямая, проходящая через точку (5; 0; – 2) параллельно оси Oy;
2) прямая, проходящая через точку (5; 0; 2) параллельно оси Oz;
3) прямая, проходящая через точку (0; 5; – 2) параллельно оси Ox;
4) уравнение определяет единственную точку (0; 2; 5).

Вариант 9

1) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через $M\ (2;\ 0)$ параллельно вектору $a = (0;\ -3)$.

Ответы:

1) $\begin{cases} x=-2t \\ y=3 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x=2t \\ y=t \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x=2 \\ y=-3t \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x=-3 \\ y=2t. \end{cases}$

2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a^2+2)\,x+(a-3)\,y-a+5=0$$

параллельна оси ординат. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $a = 3$, $11x + 2 = 0$; 2) $a = -3$, $x - 56 = 0$;

3) $a = 0$, $5x - 4 = 0$; 4) $a = \frac{5}{3}$, $3x - 6y = 0$.

3) Определить взаимное расположение прямых

$$y+3=0, \qquad 5x-7=0.$$

Ответы:

1) перпендикулярны; 2) параллельны;

3) пересекаются; 4) совпадают.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y=\frac{3}{4}\sqrt{16-x^2}\ .$$

Ответы:

1) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;

3) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;

4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M\,(3;-5;-2)$ и перпендикулярной вектору $n=(4;-6;1)$.

Ответы:

1) $-y + 6z + 3 = 0$; 2) $2x + 2y - z = 0$;

3) $x + 5z + 1 = 0$; 4) $4x - 6y + z - 40 = 0$.

6) Вычислить расстояние d от точки $M\,(3;-6;7)$ до плоскости

$$4x-3z-1=0.$$

Ответы:

1) $d = 1$; 2) $d = 0$ – точка M лежит на плоскости;

3) $d = 2$; 4) $d = 3$.

7) Найти отрезки, отсекаемые плоскостью

$$3x-4y-24z+12=0$$

на координатных осях.

Ответы:

1) $a = -3$, $b = 1$, $c = 5$; 2) $a = 5$, $b = 6$, $c = 2$;

3) $a = -7$, $b = 2$, $c = 1$; 4) $a = -4$, $b = 3$, $c = \frac{1}{2}$.

8) При каких значениях A и B плоскость

$$Ax+By+3z-5=0$$

перпендикулярна прямой

$$\begin{cases} x=3+2t \\ y=5-3t \\ z=-2-2t\,? \end{cases}$$

Ответы:

1) $A = 3$, $B = -5{,}5$; 2) $A = -3$, $B = -2$;

3) $A = 4.5$, $B = -3$; 4) $A = -3$, $B = 4.5$.

9) Определить, при каком значении D прямая

$$\begin{cases} 2x+3y-z+D=0 \\ 3x-2y+2z-6=0 \end{cases}$$

пересекает ось Oy.

Ответы:

1) $D = -6$; 2) $D = 9$; 3) $D = -2$; 4) $D = 5$.

10) Определить координаты центра C и радиус r сферы, заданной уравнением

$$x^2+y^2+z^2-6x+4z-3=0.$$

Ответы:

1) $C\ (-3;\ 2;\ 0),\ r = 3;$ 2) $C\ (2;\ 0;\ -2),\ r = 2;$

3) $C\ (0;\ 2;\ 3),\ r = 4;$ 4) $C\ (3;\ 0;\ -2),\ r = 4.$

Вариант 10

1) Написать каноническое уравнение прямой

$$2x - 3y - 6 = 0.$$

Ответы:

1) $\frac{x-3}{3} = \frac{y}{2};$ 2) $\frac{x}{3} = \frac{y-3}{1};$

3) $\frac{x-5}{3} = \frac{y-3}{5};$ 4) $\frac{x-3}{2} = \frac{y}{3}$

2) Определить взаимное расположение прямых

$$5x - 2y + 7 = 0, \qquad 5x - 3y - 7 = 0.$$

Ответы:

1) перпендикулярны; 2) параллельны;

3) пересекаются; 4) совпадают.

3) Дана прямая

$$4x - 3y + 24 = 0.$$

Составить для нее уравнение «в отрезках на осях».

Ответы:

1) $\frac{x}{-6} + \frac{y}{8} = 1;$ 2) $\frac{x}{6} + \frac{y}{-8} = 1;$

3) $\frac{x}{4} + \frac{y}{-3} = 1;$ 4) $\frac{x}{4} + \frac{z}{-3} = 1.$

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = -\frac{5}{3}\sqrt{9 - x^2}\ .$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;

2) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости;

3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

4) часть параболы, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Определить, при каком значении l ара уравнений

$$2x - 2z + 5 = 0, \qquad lx + y - 4z - 8 = 0$$

будет определять перпендикулярные плоскости.

Ответы:

1) $l = -2;$ 2) $l = 1;$ 3) $l = 3;$ 4) $l = -4.$

6) Привести уравнение плоскости

$$-x + 5 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $-\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z - 2 = 0;$ 2) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{5}z = 0;$

3) $y - 2 = 0;$ 4) $x - 5 = 0.$

7) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M\ (-1;\ 2;\ 4)$ параллельно заданной плоскости

$$5x - 3y + 2 = 0.$$

Ответы:

1) $-y + 6z + 3 = 0;$ 2) $2x + 2y - z = 0;$

3) $5x - 3y + 11 = 0;$ 4) $5x - 3y + 10 = 0.$

8) При каких значениях t и C прямая

$$\frac{x-2}{t} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$$

перпендикулярна к плоскости

$$3x - 2y + Cz + 1 = 0?$$

Ответы:

1) $t = 3,\ C = -5.5;$ 2) $t = -3,\ C = -2;$

3) $t = -6;\ C = 1.5;$ 4) $t = 6,\ C = -1.5.$

9) Определить, при каком значении m пара уравнений

$$\begin{cases} x = t \\ y = -4t, \\ z = -3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = -8 - 4t \\ z = -3 + mt \end{cases}$$

будет определять параллельные прямые.

Ответы:

1) $m = 5$; 2) $m = 1$; 3) $m = 2$; 4) $m = -3$.

10) Установить, какая линия определяется уравнением

$$\begin{cases} y + 2 = 0 \\ z - 5 = 0. \end{cases}$$

Ответы:

1) прямая, проходящая через точку (0; – 2; 5) параллельно оси Ox;
2) прямая, проходящая через точку (5; 0; 2) параллельно оси Oy;
3) прямая, проходящая через точку (5; – 2; 0) параллельно оси Oy);
4) уравнение определяет единственную точку (0; 2; 3).

Вариант 11

1) Составить уравнение прямой, зная её угловой коэффициент $k = 3$ и отрезок $b = 0$, отсекаемый ею на оси Oy.

Ответы:

1) $12x - 3y = 0$; 2) $12x - 4y + 9 = 0$;
3) $12x - 5y + 4 = 0$; 4) $3x - y = 0$.

2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a + 2)\, x + (a^2 - 9)\, y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

параллельна оси ординат. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $a = 3$, $2y - 3 = 0$; 2) $a_1 = -3$, $x - 56 = 0$; $a_2 = 3$, $5x + 8 = 0$;
3) $a = 5$, $4y - 3 = 0$; 4) $a_1 = 1$, $3x - 8y = 0$; $a_2 = \frac{5}{3}$, $3x + 5y = 0$.

3) Определить, какое из следующих уравнений прямых является нормальным:

а) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - 3 = 0$; б) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{5}y - 1 = 0$;
в) $\frac{5}{13}x - \frac{12}{13}y + 2 = 0$; г) $-x + 2 = 0$.

Ответы:

1) г; 2) а; 3) б; 4) в.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$x = -\frac{2}{3}\sqrt{9 - y^2}\ .$$

Ответы:

1) часть гиперболы, расположенная в верхней полуплоскости;
2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;
3) часть параболы, расположенная в верхней полуплоскости;
4) половина эллипса, расположенная в левой полуплоскости.

5) Определить взаимное расположение плоскостей

$$2x + 3y - z - 3 = 0, \qquad x - y - z + 5 = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;
3) перпендикулярны; 4) совпадают.

6) Найти угол между плоскостями

$$4x - 5y + 3z - 1 = 0, \qquad x - 4y - z + 9 = 0.$$

Ответы:

1) $\cos\ \alpha = \frac{7}{10}$; 2) $\cos\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$
3) $\cos\ \alpha = 0$; 4) $\cos\ \alpha = 0.4$.

7) Найти точки пересечения плоскости

$$5x - 2y + z - 10 = 0$$

с осями координат.

Ответы:

1) (5; 0; 0), (0; – 7; 0), (0; 0; 1); 2) (2; 0; 0), (0; – 4; 0), (0; 0; – 5);

3) (2; 0; 0), (0; 6; 0), (0; 0; 8); 4) (2; 0; 0), (0; – 5; 0), (0; 0; 10).

8) Найти координаты точки *A(0; 0; z),* равноудаленной от точек *B(5, 1, 0)* и *C(0, 2, 3).*

Ответы:

1) $A\ (0; 0; -\frac{13}{6})$; 2) A (0; 0; – 3);

3) A (0; 0; 5); 4) $A\ (0; 0; -\frac{1}{6})$.

9) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку *M (3; 1; – 2)* параллельно вектору *a = (1; – 1; 6).*

Ответы:

1) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{6}$; 2) $\frac{x-2}{5}=\frac{y}{2}=\frac{z+3}{-1}$;

3) $\frac{x-5}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{7}$; 4) $\frac{x+2}{3}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+3}{0}$.

10) Составить уравнение линии пересечения плоскости *Oyz* и сферы, центр которой находится в точке *C* (5; – 2; 1) и радиус равен 13.

Ответы:

1) $\begin{cases}(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=169\\ x=0\end{cases}$;

2) $\begin{cases}(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=169\\ x-1=0\end{cases}$;

3) $\begin{cases}(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=13\\ x=0\end{cases}$;

4) $\begin{cases}(x-5)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=169\\ y=0\end{cases}$.

Вариант 12

1) Составить общее уравнение прямой

$$\begin{cases}x=3+2t,\\ y=-1+t\end{cases}$$

и указать координаты нормального вектора.

Ответы:

1) x – 2y –5 = 0; *n* = (1; – 2) 2) 2x – y + 2 = 0; *n* = (2; – 1)

3) 3x + 2y + 1 = 0; *n* = (3; 2) 4) 5x + 2y – 3 = 0, *n* = (2; – 1)

2) Определить, при каких значениях *m* и *n* прямая

$$(m + 2n - 3)\,x + (2m - n + 1)\,y + 6n + 9 = 0$$

параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, равный *– 3* (считая от начала координат). Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) *m* = 1, *n* = 3, y + 2 = 0; 2) *m* = 7, n = – 2 , y + 3 = 0;

3) *m* = 7, *n* = 3, y – 3 = 0; 4) *m* = 5, *n* = 1, y + 6 = 0.

3) Определить, какое из следующих уравнений прямых является нормальным:

а) $\frac{2}{5}x-\frac{4}{5}y+8=0$; *б)* $\frac{7}{5}x-\frac{3}{5}y-1=0$;

в) $y+2=0$; *г)* $-\frac{5}{13}x+\frac{12}{13}y-2=0$.

Ответы:

1) г; 2) а; 3) в; 4) б.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$x=\frac{1}{7}\sqrt{49-y^2}\ .$$

Ответы:

1) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

2) полуокружность, расположенная в нижней полуплоскости;

3) часть гиперболы, расположенная в верхней полуплоскости;

4) половина эллипса, расположенная в правой полуплоскости.

5) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку *M (1; 3; 1)* и имеет нормальный вектор *n = (2, – 1; 5).*

Ответы:

1) 2x – y + 5z – 4 = 0; 2) 2x – y + 3z + 3 = 0;

3) 2x + 2y + 3z + 1 = 0; 4) 4x + y – 2z + 1 = 0.

6) Определить взаимное расположение плоскостей

$$2x - 5y + z = 0, \qquad 2x - 5y + z + 3 = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;

3) перпендикулярны; 4) совпадают.

7) Найти отрезки, отсекаемые плоскостью

$$x - 5y - 2z + 10 = 0$$

на координатных осях.

Ответы:

1) $a = -3$, $b = 1$, $c = 5$; 2) $a = 5$, $b = 6$, $c = 2$;

3) $a = -7$, $b = 2$, $c = 1$; 4) $a = -10$, $b = 2$, $c = 5$.

8) Определить, при каком значении D прямая

$$\begin{cases} 2x + 3y - z + D = 0 \\ 3x - 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

пересекает ось Ox.

Ответы:

1) $D = -4$; 2) $D = 1$; 3) $D = -2$; 4) $D = 4$.

9) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку *M (2; 0; – 3)* параллельно прямой

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{-1}.$$

Ответы:

1) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; 2) $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$;

3) $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$; 4) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$.

10) Определить координаты центра C и радиус r сферы, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 10z + 2 = 0.$$

Ответы:

1) $C\,(-1; 5; 1)$, $r = 5$; 2) $C\,(2; 1; -5)$, $r = 4$;

3) $C\,(1; 1; 5)$, $r = 4$; 4) $C\,(1; -1; 5)$, $r = 5$.

Вариант 13

1) Составить уравнение прямой, зная её угловой коэффициент $k = -\frac{3}{4}$ и отрезок $b = 3$, отсекаемый ею на оси Oy.

Ответы:

1) x + 5 = 0; 2) x + 3y + 9 = 0;

3) 3y + 2 = 0; 4) 3x + 4y – 12 = 0.

2) Определить, при каком значении a прямые

$$ax + 2y + 5 = 0, \qquad 2x - 3y + 2 = 0.$$

перпендикулярны.

Ответы:

1) $a = 2$; 2) $a = -3$;

3) $a = 1$; 4) $a = 3$.

3) Дана прямая

$$2x + 3y - 12 = 0.$$

Составить для нее уравнение «в отрезках на осях».

Ответы:

1) $\frac{x}{6} + \frac{y}{4} = 1$; 2) $\frac{x}{12} - \frac{y}{6} = 1$;

3) $\frac{x}{3} - \frac{y}{5} = 1$; 4) $-\frac{x}{3} + \frac{y}{12} = 1$.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9}\ .$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;
2) часть параболы, расположенная в нижней полуплоскости;
3) часть гиперболы, расположенная в верхней полуплоскости;
4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Определить, при каких значениях l и m плоскости

$$mx + 2y - 4z + 1 = 0, \qquad 9x + 6y - lz + 3 = 0$$

будут совпадать.

Ответы:

1) $l = 3$, $m = 2$; 2) $l = 12$, $m = 3$;
3) $l = 3$, $m = 4$; 4) $l = 1$, $m = 3$.

6) Составить уравнение плоскости, которая проходит через начало координат и имеет нормальный вектор $n = (2; 1; -6)$.

Ответы:

1) $2y + 3z + 6 = 0$; 2) $x + 2y - 6z = 0$;
3) $2x + 6z + 1 = 0$; 4) $2x + y - 6z = 0$.

7) Привести уравнение плоскости

$$4x - 6y - 12z - 11 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z + 1 = 0$; 2) $\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 2 = 0$;
3) $\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{11}{14} = 0$; 4) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - z - \frac{11}{14} = 0$.

8) Даны вершины треугольника $M_1\ (3;\ 2;\ -5)$, $M_2\ (1;\ -4;\ 3)$ и $M_3\ (-3;\ 0;\ 1)$. Найти координаты середин его сторон.

Ответы:

1) (2; 1; – 5), (– 4; – 4; 3), (1; 6; 2); 2) (0; 1; – 2), (2; 4; 3), (1; 4; 5);

3) (2; – 1; – 1), (– 1; – 2; 2), (0; 1; – 2); 4) (3; 4; 5), (2; – 5; 8), (6; 3; 1).

9) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M\ (2;\ 0;\ -3)$ и имеющий направляющий вектор $a = (5;\ 2;\ -1)$.

Ответы:

1) $\frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-3}{2}$; 2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$;
3) $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$; 4) $\frac{x-5}{4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+3}{0}$.

10) Выяснить, какой геометрический образ определяется уравнением

$$z + 5 = 0$$

в декартовых прямоугольных координатах пространства.

Ответы:

1) плоскость, параллельная плоскости Oyz, и лежащая в ближнем полупространстве на расстоянии пяти единиц от нее;
2) плоскость, параллельная плоскости Oxy, и лежащая в нижнем полупространстве на расстоянии пяти единиц от нее;
3) плоскость, параллельная плоскости Oyz, и лежащая в верхнем полупространстве на расстоянии двух единиц от нее;
4) плоскость, параллельная плоскости Oxz, и лежащая в дальнем полупространстве на расстоянии пяти единиц от нее.

Вариант 14

1) Дана прямая

$$5x + 4y + 2 = 0.$$

Определить угловой коэффициент k прямой, перпендикулярной данной прямой.

Ответы:

1) $k = \dfrac{4}{5}$; 2) $k = 3$; 3) $k = -\dfrac{5}{3}$; 4) $k =$ 0.

2) Определить, при каком значении m две прямые

$$(m-1)\,x + my - 5 = 0, \qquad mx + (2m-1)\,y + 7 = 0$$

пересекаются в точке, лежащей на оси абсцисс.

Ответы:

1) $m = 3$; 2) $m = \dfrac{7}{12}$;

3) $m = \dfrac{7}{2}$; 4) $m = 6$.

3) Определить, какое из следующих уравнений прямых является нормальным:

$$а)\ \frac{3}{7}x - \frac{2}{7}y - 1 = 0; \qquad б)\ \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y - 6 = 0;$$

$$в)\ -y - 2 = 0; \qquad г)\ -3x + 2 = 0.$$

Ответы:

1) б; 2) г; 3) в; 4) а.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = -3\sqrt{x^2 + 1}\,.$$

Ответы:

1) ветвь гиперболы, расположенная в верхней полуплоскости.
2) часть параболы, расположенная в нижней полуплоскости;
3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;
4) ветвь гиперболы, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Определить взаимное расположение плоскостей

$$2x - y - 2z + 5 = 0, \qquad x + 5y - z = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;
3) перпендикулярны; 4) совпадают.

6) Найти точки пересечения плоскости

$$2x + y - 4z - 4 = 0$$

с осями координат.

Ответы:

1) (1; 0; 0), (0; – 3; 0), (0; 0; 7); 2) (11; 0; 0), (0; – 4; 0), (0; 0; – 3);
3) (2; 0; 0), (0; 4; 0), (0; 0; – 1); 4) (0; 9; 0), (9; 0; 0), (0; 0; – 1).

7) Вычислить расстояние d о т точки $M\ (2;\ -1;\ -1)$ до плоскости

$$16x - 12y + 15z - 4 = 0.$$

Ответы:

1) $d = 5$; 2) $d = 2$;
3) $d = 1$; 4) $d = 0$ – точка M лежит на плоскости.

8) При каком значении m прямая

$$\frac{x-5}{4} = \frac{y+2}{m} = \frac{z+8}{2}$$

перпендикулярна плоскости

$$2x - 3y + z + 4 = 0?$$

Ответы:

1) $m = -6$; 2) $m = 1$; 3) $m = -5$; 4) $m = 4$.

9) Найти координаты точки $A\ (0;\ y;\ 0)$, равноудаленной от точек $B\ (0;\ 5;\ -9)$ и $C\ (-1;\ 0;\ 5)$.

Ответы:

1) A (0; $\dfrac{1}{5}$; 0); 2) A (0; 3; 0);
3) A (0; 8; 0); 4) A (0; – 2; 0).

10) Установить, какая линия определяется уравнением

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9 \\ z = 0. \end{cases}$$

Ответы:

1) окружность, лежащая на плоскости Oxy с центром в начале координат и радиусом, равным 3;

2) окружность, лежащая на плоскости *Oyz* с центром в начале координат и радиусом, равным 3;
3) сфера с центром в начале координат и радиусом 3;
4) окружность, лежащая на плоскости *Oxz* с центром в начале координат и радиусом, равным 9.

Вариант 15

1) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через $M = (3;-5)$ параллельно вектору $a = (4;\ 1)$.

Ответы:

1) $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2t \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -5 + t \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 2 + t. \end{cases}$

2) Определить, при каком значении m данные прямые

$$mx + 2y + 5 = 0, \qquad 2x - 3y + 2 = 0.$$

будут перпендикулярны.

Ответы:

1) $m = 3$; 2) $m = -4$;
3) $m = 4$; 4) $m = 1$.

3) Определить, какое из следующих уравнений является уравнением в отрезках на осях для прямой

$$3x - y + 12 = 0.$$

а) $\frac{x}{12} + \frac{y}{4} = 1$; б) $\frac{x}{12} - \frac{y}{9} = 1$;

в) $\frac{x}{3} - \frac{y}{3} = 1$; г) $-\frac{x}{4} + \frac{y}{12} = 1$.

1) а; 2) г; 3) в; 4) б.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$x = -\frac{4}{3}\sqrt{y^2 + 9}\,.$$

Ответы:

1) ветвь гиперболы, расположенная в левой полуплоскости.
2) ветвь гиперболы, расположенная в нижней полуплоскости.
3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;
4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M\ (5;\ 3;\ -3)$ параллельно заданной плоскости

$$2y + 5z + 4 = 0.$$

Ответы:

1) $2y + 5z + 3 = 0$; 2) $2y + 5z + 9 = 0$;
3) $5x - 2z + 2 = 0$; 4) $4x - 7z + 24 = 0$.

6) Привести уравнение плоскости

$$5y - 12z + 26 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $-\frac{5}{13}y + \frac{12}{13}z - 2 = 0$; 2) $\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{1}{5}z = 0$;

3) $y - 5 = 0$; 4) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}z - 1 = 0$

7) Найти угол между плоскостями

$$3x - y + 2z + 15 = 0, \qquad 5x + 9y - 3z - 1 = 0.$$

Ответы:

1) $\cos\alpha = \frac{13}{6}$; 2) $\cos\alpha = 0$;

3) $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; 4) $\cos\alpha = 0.5$.

8) При каком значении m прямая

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{m} = \frac{z+2}{-3}$$

параллельна плоскости

$$x - 4y + 2z + 9 = 0?$$

Ответы:

1) $m = -1$; 2) $m = 2$; 3) $m = -6$; 4) $m = 3$.

9) Определить, при каком значении m пара уравнений

$$\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{-2}, \qquad \frac{x-7}{5} = \frac{y}{6} = \frac{z-1}{1}$$

будет определять перпендикулярные прямые.

Ответы:

1) $m = 4$; 2) $m = 2$; 3) $m = 3$; 4) $m = 1$.

10) Определить координаты центра C и радиус r сферы, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y - 1 = 0.$$

Ответы:

1) $C\ (2; -2; 0)$, $r = 3$; 2) $C\ (0; 2; -2)$, $r = 4$;
3) $C\ (1; 2; 0)$, $r = 3$; 4) $C\ (2; 0; 1)$, $r = 1$.

Вариант 16

1) Дана прямая

$$4x - 7y + 9 = 0.$$

Определить угловой коэффициент k прямой, перпендикулярной к данной прямой.

Ответы:

1) $k = 0\ 2$; 2) $k = -\frac{7}{4}$; 3) $k = \frac{7}{4}$; 4) $k = 3$.

2) Определить, при каких значениях m и n прямая

$$(m + 2n - 7)\,x + (2m - n + 4)y + 2m - 1 = 0$$

параллельна оси абсцисс и отсекает на оси ординат отрезок, равный 5 (считая от начала координат). Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $m = 7$, $n = 4$, $6y - 3 = 0$; 2) $m = -2$, $n = 1$, $-6y + 5 = 0$;
3) $m = -1$, $n = 9$, $-6y + 1 = 0$; 4) $m = 3$, $n = 2$, $8y + 5 = 0$.

3) Привести общее уравнение прямой

$$4x - 3y - 10 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$; 2) $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 10 = 0$;

3) $\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 1 = 0$; 4) $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - 1 = 0$.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = +\frac{2}{5}\sqrt{x^2 + 25}.$$

Ответы:

1) часть параболы, расположенная во втором координатном углу;
2) ветвь гиперболы, расположенная в правой полуплоскости;
3) ветвь гиперболы, расположенная в верхней полуплоскости;
4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Определить взаимное расположение плоскостей

$$x + 2 = 0, \qquad 5y + 3 = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;
3) перпендикулярны; 4) совпадают.

6) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M\ (0; 0; 0)$ и перпендикулярной вектору $n = (0; -7; 4)$.

Ответы:

1) $-y + 6z + 3 = 0$; 2) $2x + 2y - z = 0$;
3) $x + 5z + 1 = 0$; 4) $7y - 4z = 0$.

7) Дано уравнение плоскости

$$x + 2y - 3z - 6 = 0.$$

Написать для него уравнение «в отрезках на осях».

Ответы:

1) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{-7}=1$; 2) $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{-2}=1$;

3) $\dfrac{x}{6}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{-2}=1$; 4) $\dfrac{2x}{5}+\dfrac{y}{8}+\dfrac{z}{-2}=1$.

8) При каком значении m прямая

$$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{m}=\frac{z+2}{-3}$$

перпендикулярна плоскости

$$4x-3y-6z+1=0?$$

Ответы:

1) $m=-1.5$; 2) $m=1$; 3) $m=-2.5$; 4) $m=4$.

9) Определить, при каком значении D прямая

$$\begin{cases}2x+3y-z+D=0\\3x-2y+2z-6=0\end{cases}$$

пересекает ось Oz.

Ответы:

1) $D=3$; 2) $D=2$; 3) $D=-4$; 4) $D=4$.

10) Установить, какая линия определяется уравнением

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=49\\ \quad y=0.\end{cases}$$

Ответы:

1) окружность, лежащая на плоскости Oxz с центром в начале координат и радиусом, равным 7;

2) окружность, лежащая на плоскости Oxy с центром в начале координат и радиусом, равным 49;

3) окружность, лежащая на плоскости Oxz с центром в начале координат и радиусом, равным 49;

4) сфера с центром в начале координат и радиусом 7.

Вариант 17

1) Составить общее уравнение прямой

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{4}$$

и указать координаты нормального вектора.

Ответы:

1) $4x-2y-5=0$, $n=(4;-2)$; 2) $4x-3y-10=0$, $n=(4;-3)$;

3) $3x+y+1=0$, $n=(3;1)$; 4) $x+2y-2=0$, $n=(1;2)$.

2) Определить взаимное расположение прямых

$$2x-4y+3=0, \qquad 2x+y=0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;

3) совпадают; 4) перпендикулярны.

3) Дана прямая

$$3x-5y-15=0.$$

Составить для нее уравнение «в отрезках на осях».

Ответы:

1) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{-3}=1$; 2) $\dfrac{x}{5}+\dfrac{z}{3}=1$;

3) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=1$; 4) $\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{-5}=1$.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y=+2\sqrt{x}.$$

Ответы:

1) часть параболы, расположенная во втором координатном углу;

2) часть параболы, расположенная в четвертом координатном углу;

3) часть параболы, расположенная в первом координатном углу;

4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Определить, при каком значении l пара уравнений

$$3x-5y+lz-3=0, \qquad x+3y+2z+5=0$$

будет определять перпендикулярные плоскости.

Ответы:

1) $l = 3$; 2) $l = 12$; 3) $l = 6$; 4) $l = 1$.

6) Привести уравнение плоскости

$$y + 2 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $-\dfrac{5}{13}y + \dfrac{12}{13}z + 1 = 0$; 2) $-y + 2 = 0$;

3) $-y - 2 = 0$; 4) $x - 2 = 0$.

7) Найти угол между плоскостями

$$6x + 2y - 4z + 17 = 0, \qquad 9x + 3y - 6z - 4 = 0.$$

Ответы:

1) $\cos\ \alpha = 0.6$; 2) $\cos\ \alpha = 1$;

3) $\cos\ \alpha = 0$; 4) $\cos\ \alpha = 0.2$.

8) Определить, при каком значении m пара уравнений

$$\frac{x+2}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{4}, \qquad \frac{x-1}{m} = \frac{y-8}{4} = \frac{z+1}{2}$$

будет определять перпендикулярные прямые.

Ответы:

1) $m = 5$; 2) $m = 1$; 3) $m = 3$; 4) $m = 2$.

9) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M\ (5;\ 6;\ -3)$ и имеющий направляющий вектор $a = (4;\ 3;\ 0)$.

Ответы:

1) $\dfrac{x+2}{2} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-1}{4}$; 2) $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-4}{5} = \dfrac{z-3}{2}$;

3) $\dfrac{x-2}{5} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$; 4) $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-6}{3} = \dfrac{z+3}{0}$.

10) Составить уравнение линии пересечения двух сфер, одна из которых имеет радиус, равный 6, и центр в начале координат, другая имеет радиус, равный *5*, и центр *С (1; —2; 2)*.

Ответы:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 25 \end{cases}$;

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 5 \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 36 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 25 \end{cases}$;

4) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 36 \end{cases}$.

Вариант 18

1) Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M = (3;\ -4)$ параллельно вектору $a = (1;\ -4)$.

Ответы:

1) $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y+4}{-4}$; 2) $\dfrac{x+3}{4} = \dfrac{y-4}{1}$;

3) $\dfrac{x-1}{-4} = \dfrac{y-3}{3}$; 4) $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+4}{3}$.

2) Определить, при каком значении a прямая

$$a\,x + (a^2 - 4)\,y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$$

параллельна оси абсцисс. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $a = -5$, $5y - 1 = 0$; 2) $a = 0$, $-4y + 5 = 0$;

3) $a = 3$, $5x + 4 = 0$; 4) $a = \dfrac{5}{3}$, $3x - 7y = 0$.

3) Привести общее уравнение прямой

$$2x - y - \sqrt{5} = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$; 2) $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 10 = 0$;

3) $\frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y - 1 = 0$; 4) $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - 1 = 0$.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$x = -\sqrt{3y}\ .$$

Ответы:

1) часть параболы, расположенная во втором координатном углу;
2) часть параболы, расположенная в первом координатном углу;
3) половина гиперболы, расположенная в верхней полуплоскости;
4) половина эллипса, расположенная в нижней полуплоскости.

5) Определить взаимное расположение плоскостей

$$4x + 2y - 4z + 5 = 0, \qquad 2x + y + 2z - 1 = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;
3) перпендикулярны; 4) совпадают.

6) Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M\ (1;\ 2;\ 3)$ и перпендикулярной вектору $n = (0;\ 1;\ 0)$.

Ответы:

1) $-y + 6z + 3 = 0$; 2) $2x + 2y - z = 0$;
3) $x + 5z + 1 = 0$; 4) $y - 2 = 0$.

7) Найти точки пересечения плоскости

$$x - 6y - 3z + 12 = 0$$

с осями координат.

Ответы:

1) (12; 0; 0), (0; – 3; 0), (0; 0; 4); 2) (– 12; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 4);
3) (2; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 3); 4) (0; 8; 0), (1; 0; 0), (0; 0; – 2).

8) При каком значении C прямая

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y+3}{-8} = \frac{z+1}{-1}$$

параллельна плоскости

$$2x - y + Cz - 2 = 0?$$

Ответы:

1) $C = 2$; 2) $C = -2$; 3) $C = 4$; 4) $C = -4$.

9) Определить, при каком значении m пара уравнений

$$\begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = -1 + t\ , \\ z = 3 + 2t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2t \\ y = 1 + mt \\ z = 5 + 4t \end{cases}$$

будет определять перпендикулярные прямые.

Ответы:

1) $m = 1$; 2) $m = -3$; 3) $m = 4$; 4) $m = 2$.

10) Выяснить, какой геометрический образ определяется уравнением

$$y + 2 = 0$$

в декартовых прямоугольных координатах пространства.

Ответы:

1) плоскость, параллельная плоскости Oyz;
2) плоскость, параллельная плоскости Oxy, и лежащая в правом полупространстве на расстоянии двух единиц от нее;
3) плоскость, параллельная плоскости Oyz, и лежащая в ближнем полупространстве на расстоянии двух единиц от нее;
4) плоскость, параллельная плоскости Oxz, и лежащая в левом полупространстве на расстоянии двух единиц от нее.

Вариант 19

1) Дана прямая

$$4x + 8y + 1 = 0.$$

Определить угловой коэффициент k прямой, параллельной данной прямой.

Ответы:

1) $k = 2$; 2) $k = 3$; 3) $k = -0.5$; 4) $k = 7$.

2) Определить, при каком значении m две прямые

$$(m-1)\,x + y - 5 = 0, \quad x + (2m-2)\,y + 7 = 0$$

перпендикулярны.

Ответы:

1) $m = 3$; 2) $m = 1$;

3) $m = 2$; 4) $m = 5$.

3) Привести общее уравнение прямой

$$2x + 2y - \frac{3\sqrt{2}}{2} = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $\frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y - 2 = 0$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{3}{4} = 0$;

3) $\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y + 3 = 0$; 4) $\frac{2}{\sqrt{5}}x + \frac{1}{\sqrt{5}}y + 1 = 0$.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$y = 3 - 4\sqrt{x-1}\,.$$

Ответы:

1) часть параболы, расположенная под прямой

$$y - 3 = 0;$$

2) часть параболы, расположенная в первом координатном углу;

3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

4) часть параболы, расположенная над прямой

$$y + 3 = 0.$$

5) Найти расстояние между двумя параллельными плоскостями

$$2x - y + 2z + 5 = 0 \quad \text{и} \quad 4x - 2y + 4z + 40 = 0.$$

Ответы:

1) $d = 1$; 2) $d = 5$; 3) $d = 4$; 4) $d = 2$.

6) Определить, при каком значении l пара уравнений

$$2x - 2y - 2 = 0, \qquad lx + y - 3z - 1 = 0$$

будет определять перпендикулярные плоскости.

Ответы:

1) $l = 6$; 2) $l = 8$; 3) $l = 2$; 4) $l = 1$.

7) Вычислить расстояние d от точки $M\,(9;\,2;\,-2)$ до плоскости

$$12y - 5z + 5 = 0.$$

Ответы:

1) $d = 4$; 2) $d = 0$ – точка M лежит на плоскости;

3) $d = 1$; 4) $d = 3$.

8) Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку $M\,(-2;\,4;\,3)$ и имеющий направляющий вектор $a = (1;\,5;\,2)$.

Ответы:

1) $\frac{x-5}{4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+3}{0}$; 2) $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$;

3) $\frac{x+2}{1} = \frac{y-4}{5} = \frac{z-3}{2}$; 4) $\frac{x+2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{4}$.

9) Найти координаты точки $A\,(x;\,0;\,0)$, равноудаленной от точек $B\,(-2;\,0;\,6)$ и $C\,(0;\,-2;\,-4)$.

Ответы:

1) $A\,(3;\,0;\,0)$; 2) $A\,(-4;\,0;\,0)$;

3) $A\,(-5;\,0;\,0)$; 4) $A\,(-2;\,0;\,0)$.

10) Установить, какая линия определяется уравнением

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x = 0. \end{cases}$$

Ответы:

1) окружность, лежащая на плоскости Oyz с центром в начале координат и радиусом, равным 5;

2) сфера с центром в начале координат и радиусом 5;

3) окружность, лежащая на плоскости *Oyz* с центром в начале координат и радиусом, равным 25;

4) окружность, лежащая на плоскости *Oxz* с центром в начале координат и радиусом, равным 5.

Вариант 20

1) Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через $M = (-1; 2)$ параллельно вектору $a = (3; 2)$.

Ответы:

1) $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 0 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$;

3) $\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -5 + t \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x = -5 + t \\ y = 3 + 4t. \end{cases}$

2) Определить, при каком значении a прямая

$$(a^2 - 20)x + (a - 5)y - a + 5 = 0$$

параллельна оси ординат. Напишите уравнение этой прямой.

Ответы:

1) $a = 3$, $7x + 2 = 0$; 2) $a = -3$, $x + 9 = 0$;

3) $a = 0$, $3x - 1 = 0$; 4) $a = 5$, $x = 0$.

3) Дана прямая

$$5x + 2y - 10 = 0.$$

Составить для нее уравнение «в отрезках на осях».

Ответы:

1) $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} = 1$; 2) $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$;

3) $\frac{y}{5} + \frac{z}{-2} = 1$; 4) $\frac{x}{5} + \frac{z}{-2} = 1$.

4) Установить, какая линия определяется уравнением

$$x = 2 - \sqrt{6 - 2y}\ .$$

Ответы:

1) полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости;

2) часть параболы, расположенная под прямой

$$x - 2 = 0;$$

3) половина эллипса, расположенная в верхней полуплоскости;

4) часть параболы, расположенная влево от прямой

$$x - 2 = 0.$$

5) Определить взаимное расположение плоскостей

$$3x - y - 2z - 5 = 0, \qquad x + 9y - 3z + 2 = 0.$$

Ответы:

1) пересекаются; 2) параллельны;

3) перпендикулярны; 4) совпадают.

6) Привести уравнение плоскости

$$2z - 1 = 0$$

к нормальному виду.

Ответы:

1) $-y - \frac{1}{2} = 0$; 2) $z - \frac{1}{2} = 0$;

3) $x - 5 = 0$; 4) $z - 1 = 0$.

7) Найти угол между плоскостями

$$x - y\sqrt{2} + z - 1 = 0, \quad x + y\sqrt{2} - z + 3 = 0.$$

Ответы:

1) $\cos\ \alpha = \frac{1}{4}$; 2) $\cos\ \alpha = -1$;

3) $\cos\ \alpha = 0.2$; 4) $\cos\ \alpha = -\frac{1}{2}$.

8) При каком значении C и D прямая

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{4}$$

принадлежит плоскости

$$2x + y + Cz + D = 0?$$

Ответы:

1) $C = -1,\ D = 5$; 2) $C = -1,\ D = -5$;
3) $C = 2,\ D = 3$; 4) $C = 1,\ D = -2$.

9) Определить, при каком значении D прямая

$$\begin{cases} x + 2y - z + D = 0 \\ 2x - y + 4z - 8 = 0 \end{cases}$$

пересекает ось Ox.

Ответы:

1) $D = -5$; 2) $D = 2$; 3) $D = -4$; 4) $D = 0$.

10) Определить координаты центра C и радиус r сферы, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 + 10x - 8y + 5 = 0.$$

Ответы:

1) $C\,(-5; 4; 0)$, $r = 6$; 2) $C\,(0; 5; -4)$, $r = 4$;
3) $C\,(5; 2; 0)$, $r = 5$; 4) $C\,(5; 0; 1)$, $r = 6$.

ЛИТЕРАТУРА

1) *Ермаков В.И. и др.* Общий курс высшей математики для экономистов / Под ред. проф. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА, 2003. – 656 с.
2) *Кремер Н.Ш. и др.* Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов. 2-е изд., перер. и доп. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 2006. – 471 с.
3) *Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г.* Математика в экономике: Учебник: В 2-х ч. Ч.2 – М.: Финансы и статистика, 1999. – 376 с.
4) *Колесников А.Н.* Краткий курс математики для экономистов: Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 1999.
5) *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1984.
6) *Данко П.Е., Попов А.Г.* Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч 1. 2-е изд.: Учебное пособие для втузов. – М.: Высшая школа, 1974. – 416 с.
7) *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике. Любое издание.
8) *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. Любое издание.
9) *Фильчаков П.Ф.* Справочник по высшей математике. Любое издание.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Жылдыз Рахманкуловна Джаналиева,
Салтанат Байызбековна Доулбекова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Учебно-методическое пособие

Подписано в печать 6.05.2010. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Объем 6,75 п.л.
Тираж 50 экз. Заказ 40.

Издательство КРСУ
720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720048, г. Бишкек, ул. Горького, 2