ГОУВПО КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Л.Г. Лелевкина, И.В. Гончарова, Н.М. Комарцов

# ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

**Контрольно-обучающая компьютерная программа тестирования**

Издательство Кыргызско-Российского Славянского университета

Бишкек 2009

УДК 517

**Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.**

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ: Учебно-методическое пособие. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2009. –53с.

Данное методическое пособие положено в основу компьютерной контрольно обучающей программы тестирования.

Методическое пособие содержит краткие теоретические основы одного из основных разделов математического анализа «Дифференцирование функций одной переменной». Решены и разобраны все типичные задачи данного раздела, они снабжены краткими теоретическими и подробнейшими методическими указаниями.

Для активизации самостоятельной работы студентов и проверки уровня усвоенного материала приведено 20 вариантов заданий заложенных в компьютерную контрольно-обучающую программу тестирования для самостоятельного решения. Каждый вариант содержит по 8 примеров с четырьмя формами ответов, одна из которых является правильной, а остальные формы учитывают возможные наиболее часто допускаемые типичные ошибки. Задачи охватывают основной материал данного раздела, стимулируют его усвоение и проверяют уровень подготовленности студентов.

Такая структура методического пособия направлена на развитие у студентов навыков самостоятельного решения задач и позволяет до начала экзаменационной сессии проверить уровень усвоения материала путем прохождения компьютерного тестирования и способствуют развитию самоконтроля.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов естественно-технического, экономического и архитектурно-строительного факультетов дневной и заочной форм обучения.

Рецензенты: д.ф.-м.н., проф. Иманалиев Т.М.

д.ф.-м.н., проф. Чекеев А.А.

Печатается по решению кафедры высшей математики и РИСО КРСУ

## §1. Определение производной, ее физический и геометрический смысл

*Приращением аргумента* $x$ функции $y = f(x)$ в точке $x_0$ называют разность $\Delta x = x - x_0$. *Приращением функции* $y = f(x)$ в точке $x_0$ называют разность $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

*Производной функции* $y = f(x)$ *в точке* $x_0$ называют предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Другие обозначения производной: $y'$, $\dfrac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл производной функции в точке $x_0$: производная равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $x_0$.

Пусть $y = f(t)$ – закон прямолинейного движения точки. Тогда $f'(t_0)$ равна скорости этой точки в момент $t_0$. В этом состоит механический смысл производной.

Обобщая можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная $f'(x)$ есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит физический смысл производной.

Операция нахождения производной называется *дифференцированием*. В результате дифференцирования функции $f(x)$ возникает новая функция $z = f'(x)$. От нее также может быть взята производная $z'$. Так возникают вторые производные $y''$, $f''(x)$. Производная от производной второго порядка называется производной третьего порядка $y''' = (y'')'$ и т.д. Начиная с производной четвертого порядка, производные обозначают римскими цифрами или числами в скобках ($y^{IV}$ или $y^{(4)}$ - производная четвертого порядка)

## §2. Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$.

1. Придадим аргументу $x$ приращение $\Delta x$,

2. Тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$,

3. Составим отношение приращения функции к приращению аргумента $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$,

4. Перейдем к пределу: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$.

Следуя приведенному алгоритму, найдем производные следующих функций.

***Дифференцирование степенной функции*** $y = x^n$

<u>1 способ</u>

1. Дадим аргументу $x$ приращение $\Delta x$

2. Функция получит приращение $\Delta y = (x + \Delta x)^n - x^n$,

По формуле бинома Ньютона имеем

$$\Delta y = \left( x^n + n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + ... + (\Delta x)^n \right) - x^n =$$

$$= n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + ... + (\Delta x)^n$$

3. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{n \cdot x^{n-1} \cdot \Delta x + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x^2 + ... + (\Delta x)^n}{\Delta x} =$$

$$= n \cdot x^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + ... + (\Delta x)^{n-1}$$

4. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left( n \cdot x^{n-1} + \frac{n \cdot (n-1)}{2!} \cdot x^{n-2} \cdot \Delta x + ... + (\Delta x)^{n-1} \right) = n \cdot x^{n-1}$$

Таким образом, $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$

<u>Второй способ : $y = x^\alpha$</u>

1. Дадим аргументу $x$ приращение $\Delta x$

2. Функция получит приращение $\Delta y = (x+\Delta x)^{\alpha} - x^{\alpha} = x^{\alpha}\left[\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]$,

3. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]}{\Delta x},$$

4. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1\right]}{x\cdot\frac{\Delta x}{x}} = x^{\alpha-1}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha} - 1}{\frac{\Delta x}{x}} = \alpha\cdot x^{\alpha-1},$$

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

***Дифференцирование логарифмической функции:*** Рассмотрим логарифмическую функцию $y=\log_a x$, $x>0$, $a\neq 1$

1. Дадим аргументу $x$ приращение $\Delta x$

2. Приращение функции $\Delta y = \log_a(x+\Delta x) - \log_a x = \log_a\frac{x+\Delta x}{x} = \log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$,

3. $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right),$$

4. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)\right] = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right] == \frac{1}{x}\cdot\log_a e = \frac{1}{x}\cdot\frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{x\cdot\ln a}$$

$$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}, \qquad \left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}.$$

***Дифференцирование функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$***

Для функции $y=\sin x$ имеем:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}2\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

Таким образом, получено $(\sin x)'=\cos x$

Аналогично, проводится дифференцирование функции $y=\cos x$: воспользуемся формулой производной сложной функции

$(\cos x)'=-\sin x$

## §3. Основные правила дифференцирования

Пусть функции $u$=$u$($x$) и $v$=$v$($x$) – две дифференцируемые в некотором интервале $(a;b)$ функции. Тогда

1. Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций:

$$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

2. Производная произведения двух функций определяется по формуле

$$(uv)'=u'v+uv'.$$

Следствие: $(Cu)'=Cu' \quad (C=Const)$

3. Производная частного двух функций определяется по формуле:

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

Следствие: $\left(\frac{C}{v}\right)'=-\frac{C\cdot v'}{v^2}$, $(C=Const)$.

Воспользуемся формулой производного частного двух функций для нахождения производных функций $y=tgx$ и $y=ctgx$:

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)' \cdot \sin x - \cos x \cdot (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x} =.$$

**Пример 1.** Найти производную функции $y = \dfrac{\cos x}{x^3 + 9}$**.**

$$y' = \left(\frac{\cos x}{x^3 + 9}\right)' = \frac{(\cos x)'(x^3 + 9) - \cos x(x^3 + 9)'}{(x^3 + 9)^2} == \frac{-\sin x \cdot (x^3 + 9) - 3x^2 \cos x}{(x^3 + 9)^2}.$$

## §4. Дифференцирование сложных функций

Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, тогда $y = f(\varphi(x))$ - сложная функция с промежуточным аргументом $u$ и независимым аргументом $x$.

Если функция $u = \varphi(x)$ имеет производную $u'_x$ в точке $x$, а функция $y = f(u)$ имеет производную $y'_u$ в соответствующей точке $u = \varphi(x)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ имеет производную $y'_x$ в точке $x$, которая находится по формуле

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Т.о. для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу.

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = g(x)$, то $y'_x = y'_v \cdot u'_v \cdot v'_x$

Воспользуемся формулой производной сложной функции для нахождения производной функции $y = \cos x$:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right),\ (\cos x)' = \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x,$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

**Пример 2**. Найти производную функции $y = \sin\sqrt{1 - x^2}$ **.**

$$y' = \left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)' = \cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\right)' =$$

$$= \cos\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\left(1-x^2\right)' = -2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\cos\sqrt{1-x^2} =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\sqrt{1-x^2}.$$

## §5. Дифференцирование обратных функций

Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале $(a;b)$ и имеет неравную нулю производную $f'(x)$ в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция $x = \varphi(y)$ также имеет производную $\varphi'(y)$ в соответствующей точке, определяемую равенством

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

Воспользуемся правилом дифференцирования обратных функций для нахождения производных следующих функций

***Дифференцирование показательной функции:***

Рассмотрим функцию $y = a^x$, обратная ей функция $x = \log_a y$, $y > 0,\ 0 < a \neq 1$. По правилу дифференцирования обратных функций получим $(a^x)' = \dfrac{1}{(\log_a y)'} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{y\ln a}} = y\cdot\ln a = a^x\ln a$,

$(a^x)' = a^x \ln a$, $\qquad (e^x)' = e^x$ .

Второй способ: найдем сначала производную функции $y = e^x$. Придадим аргументу $x$ приращение $\Delta x$, тогда функция получит приращение $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$. Имеем

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x$ (при вычислении предела воспользовались вторым замечательным пределом).

Т.о. $\left(e^x\right)' = e^x$.

Теперь рассмотрим функцию $y = a^x$, $x \in R$. Так как $y = a^x = e^{x \ln a}$, то по формуле производной сложной функции находим

$$\left(a^x\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a} \cdot \left(x \ln a\right)' = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a$$

$$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$$

***Дифференцирование обратных тригонометрических функций***

Пусть $y = \arcsin x, \quad -1 \le x \le 1$. Обратная ей функция имеет вид $x = \sin y$, $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$. По правилу дифференцирования обратных функций получим

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Пусть $y = \arccos x, \quad -1 \le x \le 1$. Обратная ей функция имеет вид $x = \cos y, \quad -\pi < y < \pi$, По правилу дифференцирования обратных функций получим

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Найдем производную функции $y = arctgx$, $x \in R$. Она является обратной к функции $x = tgy$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Тогда по правилу дифференцирования обратных функций получим

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

$$(arctgx)' = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Найдем производную функции $y = arcctgx$, $x \in R$. Она является обратной к функции $x = ctgy$, $0 < y < \pi$, по правилу дифференцирования обратных функций получим

$$(arcctgx)' = \frac{1}{(ctgy)'} = -\frac{1}{1 + ctg^2 y} = -\frac{1}{1 + x^2},$$

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

**Пример 3.** Найти производную функции $y = x^4 5^x$

$$y' = \left(x^4 2^x\right)' = \left(x^4\right)' 5^x + x^4 \left(5^x\right)' = 4x^3 5^x + x^4 5^x \ln 5.$$

**Пример 4.** Найти производную функции $y = \left(2arctgx + 3^x\right)\left(5\arcsin - \sqrt{3}\right)$

$$y' = \left(2arctgx + 3^x\right)' \cdot \left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right) + \left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right)' \cdot \left(2arctgx + 3^x\right) =$$

$$\left(\left(2arctgx\right)' + \left(3^x\right)'\right) \cdot \left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right) + \left(\left(5\arcsin x\right)' - \left(\sqrt{3}\right)'\right) \cdot \left(2arctgx + 3^x\right) =$$

$$\left(2\left(arctgx\right)' + \left(3^x\right)'\right) \cdot \left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right) + \left(5\left(\arcsin x\right)' - \left(\sqrt{3}\right)'\right) \cdot \left(2arctgx + 3^x\right) =$$

$$\left(2 \cdot \frac{1}{1 + x^2} + 3^x \ln 3\right) \cdot \left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right) + \left(5 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - 0\right) \cdot \left(2arctgx + 3^x\right) =$$

$$\left(\frac{2}{1 + x^2} + 3^x \ln 3\right) \cdot \left(5\arcsin x - \sqrt{3}\right) + \frac{5}{\sqrt{1 - x^2}} \cdot \left(2arctgx + 3^x\right)$$

## §6. Гиперболические функции и их дифференцирование

В математике, механике, электротехнике встречаются гиперболические функции, определяемые следующими формулами:

$shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ - гиперболический синус,

$chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ - гиперболический косинус,

$thx = \dfrac{shx}{chx} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ - гиперболический тангенс,

$cthx = \dfrac{chx}{shx} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ - гиперболический котангенс, $x \neq 0$.

Они удовлетворяют тем же основным формулам, что и обычные тригонометрические функции:

$sh(x+y) = shx \cdot chy + chx \cdot shy$, $\quad ch(x+y) = chx \cdot chy + shx \cdot shy$,

$sh2x = 2shx \cdot chx$, $\quad ch2x = ch^2x + sh^2x$, $\quad ch^2x - sh^2x = 1$

Найдем их производные:

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = chx \ ,$$

$$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) = shx \, ,$$

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{\left(e^x - e^{-x}\right)'\left(e^x + e^{-x}\right) - \left(e^x - e^{-x}\right)\left(e^x + e^{-x}\right)'}{(e^x + e^{-x})^2} =$$

$$= \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)^2 - \left(e^x - e^{-x}\right)^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2}{\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2} = \frac{ch^2x - sh^2x}{ch^2x} = \frac{1}{ch^2x}$$

Аналогично можно показать, что $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2x}$.

## §7. Таблица производных для функций независимой переменной $x$ и для сложных функций

| $x$ – независимая переменная | $u = u(x)$ - зависимая переменная |
|---|---|
| 1. $C' = 0 \quad (C = Const)$, | 1. $(c)' = 0$ |
| 2. $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, | 2. $(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$ |
| 3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$ | 3. $(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$, $(e^u)' = e^u \cdot u'$ |
| 4. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ | 4. $(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$, $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$ |
| 5. $(\sin x)' = \cos x$, | 5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, |
| 6. $(\cos x)' = -\sin x$, | 6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$, |
| 7. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, | 7. $(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$, |
| 8. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, | 8. $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$, |
| 9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, | 9. $(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; |
| 10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, | 10. $(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$; |
| 11. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, | 11. $(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$; |
| 12. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$. | 12. $(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$; |
| 13. $(shx)' = chx$ | 13. $(shu)' = chu \cdot u'$ |
| 14. $(chx)' = shx$ | 14. $(chu)' = shu \cdot u'$ |
| 15. $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$ | 15. $(thu)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'$ |
| 16. $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2 x}$ · | 16. $(cthu)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'$ |

**Пример 5**. Найти производную функции $y=\dfrac{3\ln x-tgx}{5x^2+2\cos x}$

$$y'=\frac{(3\ln x-tgx)'\cdot(5x^2+2\cos x)-(5x^2+2\cos x)'\cdot(3\ln x-tgx)}{(5x^2+2\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\left((3\ln x)'-(tgx)'\right)\cdot(5x^2+2\cos x)-\left((5x^2)'+(2\cos x)'\right)\cdot(3\ln x-tgx)}{(5x^2+2\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\left(3\cdot(\ln x)'-(tgx)'\right)\cdot(5x^2+2\cos x)-\left(5\cdot(x^2)'+(2\cos x)'\right)\cdot(3\ln x-tgx)}{(5x^2+2\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\left(3\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot(5x^2+2\cos x)-(5\cdot 2x+2(-\sin x))\cdot(3\ln x-tgx)}{(5x^2+2\cos x)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{3}{x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot(5x^2+2\cos x)-(10x-2\sin x)\cdot(3\ln x-tgx)}{(5x^2+2\cos x)^2}$$

**Пример 6.** Найти производную функции $y=\sqrt{3x}+\dfrac{1}{2x^3}$**.**

$$y'=\left(\sqrt{3x}+\frac{1}{2x^3}\right)'=\left(3^{1/2}x^{1/2}\right)'+\left(\frac{1}{2}x^{-3}\right)'=\sqrt{3}\left(x^{1/2}\right)'+\frac{1}{2}\left(x^{-3}\right)'=\frac{\sqrt{3}}{2}x^{-1/2}-\frac{3}{2}x^{-4}.$$

**Пример 7**. Найти производную функции $y=arctge^{-x}$.

Это сложная функция вида $y=arctgU$, где $U=e^v$, $V=-x$.

Тогда:

$$y'_x=(arctgU)'_u\cdot U'=\frac{1}{1+U^2}\cdot(e^v)'_v\cdot V'=\frac{1}{1+U^2}\cdot e^v\cdot(-x)'_x=$$

$$=\frac{1}{1+e^{2(-x)}}\cdot e^{-x}\cdot(-1)=\frac{-e^{-x}}{1+e^{-2x}}$$

## §8. Логарифмическое дифференцирование

В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать, а затем результат продифференцировать. Такую операцию называют логарифмическим дифференцированием.

**Пример 8**. Найти производную функции $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x}\cdot\sqrt[4]{x^8+10x}}{(x+10)^5}$

Прологарифмируем функцию

$$\ln y = \ln\frac{\sqrt[3]{x^3+2x}\cdot\sqrt[4]{x^8+10x}}{(x+10)^5}$$

$$\ln y = \ln\sqrt[3]{x^3+2x} + \ln\sqrt[4]{x^8+10x} - \ln(x+10)^5$$

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(x^3+2x) + \frac{1}{4}\ln(x^8+10x) - 5\ln(x+10)$$

Вычисляя производную левой и правой частей равенства, получим:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{3}\frac{1}{x^3+2x}\cdot(3x^2+2) + \frac{1}{4}\frac{1}{x^8+10x}(8x^7+10) - 5\frac{1}{x+10}$$

Умножая обе части этого равенства на $y$ и учитывая, что $y$ есть заданная функция, получим:

$$y' = \frac{\sqrt[3]{x^3+2x}\cdot\sqrt[4]{x^8+10x}}{(x+10)^5}\left(\frac{3x^3+2x}{3(x^3+2x)} + \frac{8x^7+10}{4(x^8+10x)} - \frac{5}{x+10}\right)$$

**К логарифмическому дифференцированию прибегают <u>всегда,</u> когда следует найти производную <u>степенно-показательной функции</u>** $y = u(x)^{v(x)}$, где $u$=$u(x)$, $v$=$v(x)$ – заданные дифференцируемые функции от $x$. Найдем производную этой функции.

$$y = u^v; \qquad \ln y = \ln u^v$$
$$\ln y = v \ln u$$
$$\frac{1}{y} \cdot y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} \cdot u'$$
$$\Rightarrow y' = y(v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u')$$
$$y' = u^v (v' \ln u + v \cdot \frac{1}{u} \cdot u')$$

Запоминать эту формулу необязательно, легче запомнить суть логарифмического дифференцирования.

**Пример 9.** Найти производую функции $y = x^{e^x} \cdot x^9$

Пролагорифмируем обе части равенства:

$\ln y = \ln(x^{e^x} \cdot x^9); \qquad \ln y = \ln x^{e^x} + \ln x^9;$

$\ln y = e^x \ln x + 9 \ln x;$

Продифференцируем обе части равенства:

$\frac{y'}{y} = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} + \frac{9}{x}; \qquad y' = y(e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} + \frac{9}{x})$

$y' = x^{e^x} x^9 (e^x \ln x + \frac{e^x + 9}{x})$

## §9. Диференцирование функции заданных параметрически

Пусть зависимость между аргументом $x$ и функцией $y$ задана параметрически в виде двух уравнений $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где $t$ - параметр.

Производная функции заданной параметрически вычисляется по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

**Пример 10**. Найти производую $y'_x$ функции $\begin{cases} x = \ln(1 - t^2) \\ y = \arcsin t \end{cases}$

Вычислим $x'_t$ и $y'_t$ :

$$x'_t = \frac{1}{1-t^2}(-2t) = -\frac{2t}{1-t^2}, \qquad y'_t = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x_t} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}}{-\frac{2t}{1-t^2}} = \frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}(-2t)} = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{2t}$$

## §10. Производные высших порядков от функций заданных параметрически

Пусть функция задана параметрически уравнениями: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$

Найдем вторую производную:

$$y''_x = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

Аналогично получим:

$$y_x''' = \frac{(y_x'')'_t}{x_t'},$$

$$y_x^{IV} = \frac{(y_x''')'_t}{x_t'},....$$

**Пример 11.** Найти вторую производную функции

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

$$y'_x = \frac{(\sin^3 t)'_t}{(\cos^3 t)'_t} = \frac{3\sin^2 t\cos t}{3\cos^2 t(-\sin t)} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -tgt$$

$$y_{xx}'' = \frac{(-tgt)'_t}{(\cos^3 t)'_t} = \frac{-\frac{1}{\cos^2 t}}{3\cos^2 t(-\sin t)} = \frac{1}{3\cos^4 t\sin t}$$

## §11. Дифференцирование неявных функций

Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения $F(x,y)=0$, не разрешенного относительно $y$.

Для нахождения производной от $y$ по $x$ функции заданной неявно нет необходимости разрешать это уравнение относительно $y$: достаточно продифференцировать это уравнение по $x$, рассматривая при этом $y$ как функцию $x$, и полученное затем уравнение разрешить относительно $y'$.

Производная неявной функции выражается через аргумент $x$ и функцию $y$.

**Пример 12**. Найти производную функции $x^3+3y^3-xy=0$

Продифференцируем по $x$ равенство $x^3+3y^3-xy=0$:

$$3x^2+3\cdot 3y^2\cdot y'-xy'-y=0$$

Из полученного соотношения найдем $y'$:

$3x^2-y=(-9y^2+x)y'$

$y'=\dfrac{3x^2-y}{x-9y^2}$

## §12. Производные высших порядков неявно заданной функции

Продифференцировав по $x$ первую производную функции заданной неявно, получим вторую производную от неявной функции. В нее войдут $x$, $y$, $y'$. Подставляя уже найденное значение у’ в выражение второй производной, выразим $y''$ через $x$ и $y$.

Аналогично находят производную третьего (и дальше) порядка.

**Пример 13.** Найти, $y''$ если $x^2+y^2=1$

Продифференцируем уравнение $x^2+y^2-1=0$ по $x$:

$$2x + 2y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Найдем вторую производную

$$y'' = -\frac{1 \cdot y - x \cdot y'}{y^2} = -\frac{y - x \cdot (-\frac{x}{y})}{y^2} = -\frac{y^2 + x^2}{y} = -\frac{1}{y^3}$$

(т.к. $x^2 + y^2 = 1$).

## Варианты для самостоятельного решения

## Вариант 1

**Найти производные:**

**1)** $y=\dfrac{3x+\sin x}{\cos x-10}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=-\dfrac{3+\cos x}{\sin x}$; б) $y'=\dfrac{3-\cos x}{\sin^3 x}$ ;

в) $y'=\dfrac{3x\sin x-7\cos x-29}{(\cos x-10)^2}$; г) $y'=\dfrac{\cos 2x-3x\sin x-7\cos x-30}{(\cos x-10)^2}$ .

**2)** $y=\ln^4(2x+1)$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=8\ln^3(2x+1)$ ; б) $y'=\dfrac{8\ln^3(2x+1)}{2x+1}$;

в) $y'=\dfrac{8}{(2x+1)^3}$ ; г) $y'=8\ln(2x+1)\cdot 2$.

**3)** $x^3+\ln y-x^2e^y=0$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=(2xye^y-3x^2)y\dfrac{1}{x^2ye^y}$ ; б) $y'=(2xye^y-3x^x y)y\dfrac{1}{1-x^2ye^y}$ ;

в) $y'=(2xye^y-3x^2y)\cdot\dfrac{1}{1-x^2ye^y}$ ; г) $y'=\dfrac{2xye^y-3x^2}{1-xye^y}\cdot y$ .

**4)** $y=(2tg3x+1)^{\sin 3x}$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=(2tg3x+1)^{\sin 3x}\cos 3x$ ;

б) $y'=[3\cos 3x\ln(2tg3x+1)+\dfrac{6\sin 3x\sec^2 3x}{2tg3x+1}]\cdot(2tg3x+1)^{\sin 3x}$ ;

в) $y'=(2tg3x+1)^{\sin 3x}\cdot\ln(2tg3x+1)$ ;

г) $y'=(2tg3x+1)^{\sin 3x-1}\cdot\cos 3x\cdot 3$.

**5)** $y=2x^4-\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}+1$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=8x^3-\sqrt[3]{x^2}$ ; б) $y'=8x^3-\sqrt[3]{x^4}$ ;

в) $y' = 8x^3 + \dfrac{1}{x\sqrt[3]{x}}$ ; г) $y' = 8x^3 - \sqrt[3]{x^2} + 1$.

**6**) $y = (x + x^3) \cdot arctgx$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = (1 + 3x^2)arctgx + x$ ; б) $y' = \dfrac{1+3x^2}{1+x^2}$ ;

в) $y' = 3x^2 arctgx + x$ ; г) $y' = (1 + 3x^2) \cdot (1 + x^2)$ .

**7**) $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$ . Найти $y''_x$ .

Ответы:

а) $y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 - 1}$ ; б) $y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 + t}$ ;

в) $y''_x = \dfrac{10t}{3t^2 + 3}$ ; г) $y''_x = -\dfrac{10t}{3t^2 - 3}$ .

**8**) $y = 7^{2x} + \dfrac{4}{\sqrt[5]{x^2}}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 7^x \ln 7 \cdot 2 + \dfrac{2}{5} x^{-\frac{3}{5}}$ ; б) $y' = x \cdot 7^{x-1} + \dfrac{2}{5} x^{\frac{1}{5}}$ ;

в) $y' = 7^{2x} \ln 7 \cdot 2 - \dfrac{8}{5x\sqrt[5]{x^2}}$ ; г) $y' = 7^x \ln 7 + x \cdot 7^{x-1} + \dfrac{4}{x\sqrt[3]{x^2}}$ .

## Вариант 2

**Найти производные:**

**1)** $y = \dfrac{\sqrt{1+9x^2}}{arctg3x}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = -27x\sqrt{1+9x^2}$ ; б) $y' = \dfrac{18x\sqrt{1+9x^2} + arctg3x}{arctg3x}$ ;

в) $y' = \dfrac{9x \cdot arct3x - 3}{\sqrt{1+9x^2}(arctg3x)^2}$ ; г) $y' = \dfrac{9xarctg3x - 3}{(arctg3x)^2}$ .

**2**) $y = e^{5x-2} + \sqrt[7]{x^2}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = (5x-2)\cdot e^{5x-3} + \dfrac{1}{7\sqrt[7]{x}}$ ;  б) $y' = e^{5x-3} + \dfrac{2x}{7\sqrt[7]{x^{12}}}$;

в) $y' = e^{5x-3}\ln 5 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ ;  г) $y' = 5e^{5x-2} + \dfrac{2x}{7\sqrt[7]{x^{12}}}$ .

**3**) $y = \sin^3 4x$.  Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 12\sin^2 4x\cos 4x$ ;  б) $y' = 6\sin\ \ 8x\sin 4x$;

в) $y' = 4\sin^3 4x\cos 4x$ ;  г). $y' = 12\cos^2 4x$ .

**4**) $\begin{cases} y = t - \ln\sin t \\ x = t + \ln\cos t \end{cases}$ .  Найти $y''_x$.

Ответы:

а) $y''_x = \dfrac{1}{\sin^2 t(1-tgt)}$ ;  б) $y''_x = \dfrac{1}{\cos^2 t(1-ctgt)}$ ;

г) $y''_x = \dfrac{\sin t}{\cos^2 t(\cos t - \sin t)}$;  д) $y''_x = \dfrac{1}{\sin^2 t(1+tgt)}$ .

**5**) $y = 2x^3 + \dfrac{2x}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}$ .  Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 6x^2 + \sqrt{x} + 1$ ;  б) $y' = \dfrac{6x^6\sqrt{x} + x^2 - \sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}$ ;

в) $y' = 6x^6\sqrt{x} + x^2 - \sqrt{x}$ ;  г) $y' = 6x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2}$ .

**6**) $y = (\sin 2x + 1)^{5x}$ .  Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = (\sin 2x + 1)^{5x}\ln 5x$ ;  б) $y' = (\sin 2x + 1)^{5x-1}$;

в) $y' = (\sin 2x + 1)^{5x}[5\ln(\sin 2x + 1) + \dfrac{10x\cos 2x}{\sin 2x + 1}]$ ;

г) $y' = (\sin 2x + 1)^{5x-1}\ln\sin 2x$ .

**7**) $y = x\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \sqrt{x^2 + a^2}$ .  Найти $y'$.

Ответы:

а). $y' = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$ ;  б) $y' = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + a^2}}$;

в) $y'=\dfrac{x}{x+\sqrt{x^2+a^2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}$ ;  г) $y'=\dfrac{1+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+a^2}}-2\sqrt{x^2+a^2}$ .

**8**) $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$ .  Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{1}{e^y x\cdot 2^{xy}\ln 2}$ ;  б) $y'=e^y y-2^{xy}\ln xy$ ;

в) $y'=e^x-y2^{xy}\ln 2$ ;  г) $y'=-\dfrac{e^x-y2^{xy}\ln 2}{e^y-x2^{xy}\ln 2}$ .

## Вариант 3

**Найти производные:**

**1**) $y=3x^2-\dfrac{4x}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x}$ .  Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=6x-2\sqrt{x}+3$ ;  б) $y'=\dfrac{6\sqrt{x^3}-4x^2-3\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}$ ;

в) $y'=\dfrac{6\sqrt{x^3}-2x^2-3\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}$ ;  г) $y'=6x-\dfrac{2}{\sqrt{x}}-\dfrac{3}{x^2}$ .

**2**) $y=\dfrac{arctg5x}{(1+25x^2)}$ .  Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=1+arctg5x(1+25x^2)$ ;  б) $y'=\dfrac{5(1-10xarctg5x)}{(1+25x^2)^2}$;

в) $y'=\dfrac{50x\cdot arctg5x-1}{(1+25x^2)^2}$ ;  г) $y'=\dfrac{1+25x^2}{50x}$ .

**3**) $y=ctg^2 3x$ .  Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=-\dfrac{1}{\sin^4 3x}$ ;  б) $y'=6ctg3x$ ;

в) $y'=-\dfrac{3}{\sin^4 3x}$ ;  г) $y'=-\dfrac{6\cos 3x}{\sin^3 3x}$ .

**4**) $y=(x-x^3)\arccos x$.  Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=(1-3x^2)\arccos x-x\sqrt{1-x^2}$ ;  б) $y'=\dfrac{1-3x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

в) $y' = (1 - x^3)\arccos x - x$ ; г) $y' = \dfrac{3x^2 - 1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

**5**) $y = \ln\sin x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x$ . Найти $y'$.

Ответы:

а). $y' = ctgx + \cos^2 x \cdot \sin x$ ; б). $y' = -ctgx - \sin^3 x \cdot \cos x$ ;

в) $y' = -ctgx - \cos^2 x \cdot \sin x$; г) $y' = ctgx - \sin^3 x \cdot \cos x$ .

**6**) $y = (3x - 1)^{\sin 2x}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а). $y' = 3\sin 2x(3x - 1)^{\sin 2x - 1}$ ;

б) $y' = [2\cos 2x \ln(3x - 1) + \dfrac{3\sin 2x}{3x - 1}](3x - 1)^{\sin 2x}$ ;

в) $y' = (3x - 1)^{\sin 2x} \ln(3x - 1)\cos 2x$ ;

г) $y' = \cos 2x \ln(3x - 1) + \dfrac{\sin 2x}{3x - 1}$ .

**7**) $\ln y = arctg\dfrac{x}{y}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{y^2}{y^2 + x^2 - xy}$ ; б). $y' = -\dfrac{y^2}{y^2 + x^2 + xy}$ ;

в) $y' = -\dfrac{y^2}{x^2 + y^2 - xy}$ ; г) $y' = \dfrac{y^2}{y^2 + x^2 + xy}$.

**8**) $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t} \\ y = \sqrt{t - t^2} \end{cases}$ . Найти $y''_x$.

Ответы:

а) $y''_x = -4\sqrt{t - t^2}$ ; б) $y''_x = 4t \cdot \sqrt{t - t^2}$ ;

в) $y''_x = 4\sqrt{t - t^2}$ ; г) $y''_x = -4\sqrt{1 - t}$ .

## Вариант 4

**Найти производные:**

**1**) $y = -\dfrac{3}{x} + 5\sqrt[5]{x} - \dfrac{4}{\sqrt[4]{x}}$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = -\dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^6}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ ;    б) $y' = \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^4}} + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$;

в) $y' = 3 + 5\sqrt[5]{x^6} - \sqrt[4]{x^3}$ ;    г) $y' = -\dfrac{3}{x^2} - 6^{-\frac{6}{5}} + x^{-\frac{5}{4}}$ .

**2**) $y = e^{x^2 + \cos x}$ .    Найти *y′*.

Ответы:

а) $y' = e^{x^2+\cos x} \cdot (2x - \sin x)$ ;    б) $y' = (x^2 + \cos x)e^{x^2+\cos x - 1}$;

в) $y' = e^{x^2+\cos x} \cdot (x^2 + \cos x)$;    г) $y' = (x^2 + \cos x)e^{x^2+\cos x} \ln(x^2 + \cos x)$.

**3**) $y = \dfrac{\arccos x}{1 - x^2}$.    Найти *y′*.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{1}{2x\sqrt{1-x^2}}$ ;    б) $y' = \dfrac{2x\arccos x - \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$;

в) $y' = \dfrac{-2x + 2x\arccos x}{(\sqrt{1-x^2})^3}$ ;    г) $y' = \dfrac{-2x\arccos x + \sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$ .

**4**) $e^x + e^y + 2xy + y^2 = 0$.    Найти *y′*.

Ответы:

а) $y' = -\dfrac{e^x + 2y}{e^y + 2x + 2y}$ ;    б) $y' = -\dfrac{e^y + 2y}{e^x + 2x}$ ;

в) $y' = \dfrac{e^x + 2x}{e^y + 2y}$ ;    г) $y' = \dfrac{e^y + 2x + 2y}{e^x + 2}$ .

**5**) $y = \ln^3(tg3x)$ .    Найти *y′*.

Ответы:

а) $y' = 3\ln^2(tg3x)\dfrac{1}{\cos^2 3x}$;    б) $y' = \ln^3(tg3x)\dfrac{3}{tg3x\cos^2 3x}$;

в) $y' = 3\ln^2(tg3x)\dfrac{1}{tg3x}$ ;    г) $y' = \dfrac{9\ln^2(tg3x)}{\sin 3x \cos 3x}$.

**6**) $y = (tg2x)^{\sin x}$ .    Найти *dy/dx*.

Ответы:

а) $y' = \sin x(tg2x)^{\sin x - 1}\dfrac{2}{\cos^2 2x}$ ;    б) $y' = (tg2x)^{\sin x} cosx \ln(tg2x)$ ;

в) $y' = \sin x (tg 2x)^{\sin x - 1}$;    г) $y' = (tg 2x)^{\sin x}[\cos x \cdot \ln(tg 2x) + \dfrac{2\sin x}{\cos^2 2x \cdot tg 2x}]$;

**7)** $y = (x - \dfrac{1}{3}x^3)\arccos x$ .    Найти *y′*.

Ответы:

а) $y' = -\sqrt{1 - x^2}$ ;    б) $y' = (1 - x^2)\arccos x$ ;

в) $y' = (1 - x^2)\arccos x - (x - \dfrac{x^3}{3}) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$;    г) $y' = -(x - \dfrac{x^3}{3}) \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ .

**8)** $\begin{cases} y = t - \ln\sin t \\ x = t + \ln\cos t \end{cases}$.    Найти *dy/dx*.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{\cos t - \sin t}{\sin t}$ ;    б) $y' = \dfrac{\sin t}{\cos t}$ ;

в) $y' = \dfrac{1 + ctgt}{1 - ctgt}$ ;    г) $y' = -ctgt$ .

## Вариант №5

**Найти производные:**

**1)** $y = \dfrac{5x^2 + 6x + 7}{\sin x}$ .    Найти *y′*.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{(10x + 6)\sin x - (5x^2 + 6x + 7)\cos x}{\sin^2 x}$ ;

б) $y' = \dfrac{(5x^2 + 6x + 7)\cos x - (10x + 6)\sin x}{\sin^2 x}$;

в) $y' = \dfrac{10x + 6}{\cos x}$ ;    г) $y' = \dfrac{(10x + 6)\sin x + (5x^2 + 6x + 7)\cos x}{\sin^2 x}$;

**2)** $y = \sin^4(x^3 + 8)$ .    Найти *y′*.

Ответы:

а) $y' = 4\sin^3(x^3 + 8)$ ;    б) $y' = 4\sin^3(x^3 + 8) \cdot \cos(x^3 + 8)$;

в) $y' = 12x^2 \sin^3(x^3 + 8) \cdot \cos(x^3 + 8)$ ;    г) $y' = \cos(x^3 + 8)$.

**3)** $x^2 + yx + e^y = 0$.    Найти *y′*.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{e^y + x}{2x + y}$ ;    б) $y' = \dfrac{2x + y}{e^y + x}$;

в) $y' = e^{y}(2x+y)$ ; г) $y' = -\dfrac{2x+y}{e^{y}+x}$.

**4)** $y = (arctgx)^{x}$ . Найти: $y'$.

Ответы:

а) $y' = (arctgx)^{x}(\ln arctgx + \dfrac{x}{arctgx})$ ; б) $y' = x(arctgx)^{x-1}$;

в) $y' = x(arctgx)^{x-1} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$ ; г) $y' = (arctgx)^{x}(\ln arctgx + \dfrac{x}{(1+x^2)arctgx})$.

**5)** $y = x^2 + \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}} + 3x$ . Найти: $y'$.

Ответы:

а) $y' = 2x + \sqrt[4]{x} + 3$; б) $y' = 2x - \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x^7}} + 3$;

в) $y' = 2x + 3 - \sqrt[4]{x^7}$ ; г) $y' = 2x - \dfrac{4}{3\sqrt[4]{x^7}} + 3$.

**6)** $y = (x^2 + 2x)\cos x$ . Найти: $y'$.

Ответы:

а) $y' = (2x+2)\cos x - (x^2+2x)\sin x$; б) $y' = (2x+2)\cos x + (x^2+2x)\sin x$;

в) $y' = -(2x+2)\sin x$; г) $y' = (2x+2)\sin x + (x^2+2x)\cos x$.

**7)** $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ . Найти $y_x'' = ?$.

Ответы:

а) $y_x'' = \dfrac{1}{3\cos^4 t \sin t}$; б) $y_x'' = \dfrac{\sin t}{\cos^4 t}$;

в) $y_x'' = \dfrac{\cos t}{3\sin^4 t}$ ; г) $y_x'' = \dfrac{1}{3\sin^4 t \cos t}$.

**8)** $y = 2^{\sqrt{tgx}}$ . Найти: $y'$.

Ответы:

а) $y' = 2^{\sqrt{tgx}} \dfrac{\ln 2}{2\sqrt{tgx}\cos^2 x}$ ; б) $y' = \sqrt{tgx}\,2^{\sqrt{tgx}-1}$;

в) $y' = \sqrt{tgx}\,2^{\sqrt{tgx}-1} \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ; г) $y' = 2^{\sqrt{tgx}} \ln 2$.

**Вариант №6**

**Найти производные:**

**1)** $y = \ln\sin 10 - \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ . Найти: $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{-\sin x(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}$ ;

б) $y' = \dfrac{\cos 10}{\sin 10} - \dfrac{\sin x(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}$;

в) $y' = \dfrac{(1+\cos^2 x)}{\cos^2 x}$ ;

г) $y' = \dfrac{\cos x(1+\sin^2 x)}{\cos^2 x}$.

**2)** $y = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ . Найти: $y'$.

Ответы:

а) $y' = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x-1}}$ ;

б) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}}$;

в) $y' = \sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$ ;

г) $y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{(1-x)x}}$.

**3)** $x^3 y + x^2 y^2 + xy^3 = 0$. Найти: $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{-3x^2 y - y^3}{x^3 + 3x^2 y}$ ;

б) $y' = \dfrac{-3x^2 y - 2xy^2 - y^3}{x^3 + 2x^2 y + 3xy^2}$;

в) $y' = \dfrac{3x^2 y + xy^2 + y^3}{x^3 + 2x^2 y + 3xy^2}$ ;

г) $y' = \dfrac{yx - y^2}{x^2 y + y^3}$.

**4)** $y = x^{tgx}$ . Найти: $y'$.

Ответы:

а) $y' = tgx \cdot x^{tgx-1}$ ;

б) $y' = tgx \cdot x^{tgx-1} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

в) $y' = x^{tgx}\left(\dfrac{\ln x}{\cos^2 x} + \dfrac{tgx}{x}\right)$ ;

г) $y' = x^{tgx}\ln x$.

**5)** $y = \dfrac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$ . Найти: $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{3}{1+x^2}$ ;

б) $y' = \dfrac{3\sqrt{(1+x^2)}}{2}$;

в) $y'=\dfrac{3}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ ;  г) $y'=\dfrac{3}{\sqrt{1+x^2}}$.

**6)** $y=\ln^2(1+x^3)$.  Найти: $y'$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{6x^2\ln(1+x^3)}{1+x^3}$ ;  б) $y'=2\ln(1+x^2)$;

в) $y'=\dfrac{2\ln(1+x^3)}{1+x^3}$ ;  г) $y'=\dfrac{3x^2}{x^3+1}$.

**7)** $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$.  Найти $y_x''=?$.

Ответы:

а) $y''_x=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ ;  б) $y''_x=\dfrac{\sin t}{1-\cos^2 t}$;

в) $y''_x=\dfrac{1}{(1-\cos t)^2}$ ;  г) $y''_x=\dfrac{-1}{(1-\cos t)^2}$.

**8)** $y=8x^3+\dfrac{8}{x^3}$.  Найти $y''=?$.

Ответы:

а) $y''=24(x^2+\dfrac{1}{x^5})$ ;  б) $y''=36(x-\dfrac{1}{x^5})$;

в) $y''=48(x+\dfrac{2}{x^5})$ ;  г) $y''=4(x^2+\dfrac{1}{x^4})$.

## Вариант № 7

**Найти производные:**

**1)** $y=e^x(\cos 2x+\sin 2x)$.  Найти $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=e^x(3\cos 2x-\sin 2x)$;  б) $y'=e^x(3\sin 2x-\cos 2x)$;

в) $y'=e^x(\cos 2x-\sin 2x)$;  г) $y'=e^x(\sin 2x-\cos 2x)$.

**2)** $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.  Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}$;  б) $y'=-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

в) $y'=\dfrac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ ;  г) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}}$.

**3)** $x\sin y - y\sin x = 0$. Найти $y' = ?$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{y\cos y}{x\cos x}$ ; б) $y' = \dfrac{\sin y}{\sin x}$;

в) $y' = \dfrac{y\cos x - \sin y}{x\cos y - \sin x}$; г) $y' = \dfrac{x\cos y - \sin x}{y\sin y - \sin y}$.

**4)** $y = (1+\cos x)^{\sin x}$ . Найти: $y' = ?$.

Ответы:

а) $y' = (1+\cos x)^{\sin x}(\cos\ln(1+\cos x) - \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x})$; б) $y' = \sin x(1+\cos x)^{\sin x - 1}$;

в) $y' = -\sin^2 x(1+\cos x)^{\sin x - 1}$;

г) $y' = (1+\cos x)^{\sin x}(\cos\ln(1+\cos x) + \dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x})$.

**5)** $y = \sqrt[4]{x} + \dfrac{2}{\sqrt[5]{x}} + 1$. Найти: $y' = ?$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{2}{5}\sqrt[5]{x}$ ; б) $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^6}}$;

в) $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^5}} - \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^4}}$; г) $y' = \dfrac{1}{5\sqrt[4]{x}} - \dfrac{1}{3\sqrt{x^4}}$.

**6)** $y = \dfrac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ . Найти: $y' = ?$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{3/2}}$; б) $y' = \dfrac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)}$;

в) $y' = \dfrac{x\arcsin x}{1-x^2}$ ; г) $y' = \dfrac{\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

**7)** $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 2 - \cos t \end{cases}$. Найти: $y_x'' = ?$;

Ответы:

а) $y_x''=\dfrac{1}{1-\cos t}$; б) $y_x''=\dfrac{1}{(1-\cos t)^2}$;

в) $y_x''=-\dfrac{1}{(1-\cos t)^2}$; г) $y_x''=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$.

**8)** $y=\ln\dfrac{x^2+1}{x^4+1}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{-2x^5-4x^3+2x}{(x^2+1)(x^4+1)}$; б) $y'=\dfrac{-3x^5+2x-3x^3}{(x^2+1)(x^4+1)}$;

в) $y'=\dfrac{x^4+1}{(x^2+1)}$; г) $y'=\dfrac{-3x^2-2x^5}{(x^2+1)(x^4+1)^2}$.

## Вариант №8

**Найти производные**

**1)** $y=\sqrt{(4+x)(1+x)}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{3x+6}{2\sqrt{(4+x)(1+x)}}$; б) $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{(4+x)(1+x)}}$;

в) $y'=\dfrac{2x+5}{2\sqrt{(4+x)(1+x)}}$; г) $y'=\dfrac{2x-5}{2\sqrt{(4+x)(1+x)}}$.

**2)** $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{x^2-1-x^2\ln x}{x(x^2-1)^{3/2}}$; б) $y'=\dfrac{2\sqrt{x^2-1}}{x^2}$;

в) $y'=\dfrac{x^2-1+x^2\ln x}{x(x^2+1)^{3/2}}$; г) $y'=\dfrac{x^2-1-x^2\ln x}{x(x^2+1)^{3/2}}$.

**3)** $\cos(xy)=y$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{y\sin(xy)}{1-x\sin(xy)}$; б) $y'=\dfrac{y\sin(xy)}{1-y\sin(xy)}$;

в) $y'=\dfrac{1-y\sin(xy)}{x\sin(xy)}$; г) $y'=\dfrac{x\cos(xy)}{1-x\sin(xy)}$.

**4)** $y=(\arcsin x)^x$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y' = (\arcsin)^x (\ln \arcsin x + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x})$;  б) $y' = x(\arcsin x)^{x-1}$;

в) $y' = \dfrac{x(\arcsin x)^{x-1}}{\sqrt{1-x^2}}$;  г) $y' = (\arcsin x)^x (\ln \arcsin x - \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x})$.

**5)** $y = \sqrt[4]{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+2}$.  Найти: $y' = ?$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{(x^2+1)^3}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x^3+2)^2}}$;  б) $y' = \dfrac{x}{2\sqrt[4]{(x^2+1)^3}} + \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+2)^2}}$;

в) $y' = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x^2+1}} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x^3+2}}$;  г) $y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x^2+1)^4}} + \dfrac{1}{3\sqrt{(x^3+2)^3}}$.

**6)** $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.  Найти: $y' = ?$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$;  б) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1 + \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^2}})$;

в) $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$;  г) $y' = \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}(1+\sqrt{1+x^2})$.

**7)** $\begin{cases} x = \sin^2 t \\ y = \ln\cos t \end{cases}$.  Найти: $y_x'' = ?$.

Ответы:

а) $y_x'' = -\dfrac{1}{\cos^4 t}$;  б) $y_x'' = -\dfrac{1}{2\cos^2 t}$;

в) $y_x'' = -\dfrac{\sin t}{\cos^3 t}$;  г) $y_x'' = -\dfrac{1}{2\cos^4 t}$.

**8)** $y = x(\sin\ln x - \cos\ln x)$.  Найти: $y' = ?$.

Ответы:

а) $y' = 2\sin\ln x$;  б) $y' = 2\cos\ln x$;

в) $y' = \sin\ln x + x\sin\ln x - \cos\ln x + x\cos\ln x$;  г) $y' = 2(\sin\ln x - \cos\ln x)$.

## Вариант № 9

**Найти производные**

**1)** $y = \dfrac{(6x^2+5)^3}{2x-3}$.  Найти: $y' = ?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{(6x^2+5)^2(60x^2-108x-10)}{(2x-3)^2}$; б) $y'=\dfrac{(6x^2+5)^2(60x^2-118)}{(2x-3)^2}$;

в) $y'=\dfrac{3(6x^2+5)^2\cdot 12x}{2}$; г) $y'=\dfrac{3(6x^2+5)^2}{2}$.

**2)** $y=\dfrac{1}{8}\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\dfrac{1}{4}arctgx$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{1}{8}\dfrac{1-x}{1+x}+\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+x^2}$; б) $y'=\dfrac{1}{2(1-x^4)}$;

в) $y'=\dfrac{1}{8}\dfrac{1-x}{1+x^2}+\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; г) $y'=\dfrac{x}{4(1-x^2)}$.

**3)** $2x^2+y^2-4x+10y+5=0$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{4x-4}{2y+10}$; б) $y'=\dfrac{4-4x}{2y+10}$;

в) $y'=\dfrac{2y+10}{4x-4}$; г) $y'=\dfrac{2y+4}{4x+4}$.

**4)** $y=(tgx)^{\ln x}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\ln x(tgx)^{\ln x-1}$; б) $y'=\ln x(tgx)^{\ln x-1}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}$;

в) $y'=(tgx)^{\ln x}(\dfrac{\ln tgx}{x}+\dfrac{\ln x}{\sin x\cos x})$; г) $y'=(tgx)^{\ln x}(\dfrac{\ln tgx}{x}+\dfrac{\ln x}{tgx})$.

**5)** $y=(x^2-5)\sqrt{x}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\sqrt{x}$; б) $y'=\dfrac{5(x^2-1)}{2\sqrt{x}}$;

в) $y'=\dfrac{3x^2+5}{2\sqrt{x}}$; г) $y'=2x\sqrt{x}$.

**6)** $\begin{cases} x=\sqrt{t} \\ y=\ln t \end{cases}$. Найти: $.\, y_x''=?$

Ответы:

а) $y_x''=-\frac{2}{t}$;  б) $y_x''=-\frac{1}{\sqrt{t^3}}$;

в) $y_x''=\frac{1}{t}$;  г) $y_x''=\frac{2}{\sqrt{t^3}}$.

**7)** $y=(tgx-ctgx)^2$.  Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=2(tgx-ctgx)$;  б) $y'=-\frac{\cos x}{\sin^3 x}$;

в) $y'=\frac{-16\cos 2x}{\sin^3 2x}$;  г) $y'=\frac{-\sin 2x}{\cos^3 2x}$.

**8)** $y=(x^2+1)\ln x$.  Найти: $y''=?$

Ответы:

а) $y''=x$;  б) $y''=2\ln x+1-\frac{1}{x^2}$;

в) $y''=2\ln x+1$.  г) $y''=2x\ln x+x+\frac{1}{x}$.

## Вариант № 10

**Найти производные:**

**1)** $y=\sqrt{\frac{x^2+2}{x+1}}$.  Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+1}{x^2+2}}$;  б) $y'=\frac{1}{2}\frac{3x^2+2x+2}{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{3/2}}$;

в) $y'=\frac{x}{2}(\frac{x+1}{x^2+2})^{\frac{1}{2}}$;  г) $y'=\frac{1}{2}\frac{x^2+2x-2}{(x^2+2)^{\frac{1}{2}}(x+1)^{3/2}}$.

**2)** $y=\frac{(1+x^2)arctgx-x}{2}$.  Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=xarctgx$;  б) $y'=\frac{2xarctgx+x^2}{4}$;

в) $y'=\frac{2xarctgx-1}{2}$;  г) $y'=\frac{x}{1+x^2}-1$.

**3)** $y=tg(x+y)$.  Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{1}{\cos^2(x+y)}$; б) $y'=\dfrac{1}{\cos^2(x+y)-1}$;

в) $y'=\dfrac{1}{\cos^2(x+y)}-1$; г) $y'=\dfrac{\cos^2(x+y)-1}{\cos^2(x+y)}$.

**4)** $y=x^{\sqrt{x}}$ . Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=x^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ ; б) $y'=\sqrt{x}x^{\sqrt{x}-1}$;

в) $y'=x^{\sqrt{x}}\ln x$; г) $y'=x^{\sqrt{x}}\left(\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

**5)** $y=\ln\dfrac{x^3-9}{x^3-1}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{x^3-1}{x^3-9}$ ; б) $y'=\dfrac{24x^2}{(x^3-9)(x^3-1)}$;

в) $y'=\dfrac{12x^3}{(x^3-1)^2(x^3-9)}$ ; г) $y'=\dfrac{16x^4}{(x^3-9)^2(x^3-1)}$.

**6)** $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=arctgt \end{cases}$. Найти: $y_x''=?$.

Ответы:

а) $y_x''=-\dfrac{1+t^2}{4t^3}$ ; б) $y_x''=\dfrac{1+t^3}{t^4}$;

в) $y_x''=-\dfrac{1+t}{t^2}$ ; г) $y_x''=-\dfrac{1}{t^2}$.

**7)** $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y_x'=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$; б) $y_x'=-tgx$;

в) $y_x'=\dfrac{1}{1-\sin x}$; г) $y_x'=\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$.

**8)** $y=x^2\sin(3x+1)$. Найти: $y''=?$.

Ответы:

а) $y''=2\sin(3x+1)+12x\cos(3x+1)-9x^2\sin(3x+1)$;

б) $y''=4\sin(3x+1)-9x^2\sin(3x+1)$;

в) $y''=2\cdot\cos(3x+1)+6x\sin(3x+1)$; г) $y''=12x\cos(3x+1)$.

## Вариант № 11

**Найти производные:**

**1)** $y=\dfrac{5x}{(5-2x)^3}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{4(5+4x)}{(5-2x)^4}$; б) $y'=\dfrac{5}{3(5-2x)^2}$;

в) $y'=\dfrac{5(5+4x)}{(5-2x)^4}$; г) $y'=\dfrac{5}{-6(5-2x)^2}$.

**2)** $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=-\dfrac{2}{(x+1)^2}ctg\dfrac{2x+4}{x+1}$; б) $y'=\dfrac{1}{\sin\dfrac{2x+4}{x+1}}$;

в) $y'=-\dfrac{2}{(x+1)^2}tg\dfrac{2x+4}{x+1}$; г) $y'=ctg\dfrac{2x+4}{x+1}$.

**3)** $e^x-e^y=y-x$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{e^x+1}{e^y+1}$; б) $y'=\dfrac{e^y+1}{e^x+1}$;

в) $y'=\dfrac{1-e^x}{1-e^y}$; г) $y'=\dfrac{e^x-1}{e^y+1}$.

**4)** $y=x^{2^{\cos x}}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=2^{\cos x}x^{2^{\cos x}-1}$; б) $y'=x^{2^{\cos x}}2^{\cos x}(-\sin x\ln 2+\dfrac{1}{x})$;

в) $y'=2^{\cos x}x^{2^{\cos x}-1}\cdot\ln 2$ ; г) $y'=x^{2^{\cos x}}\ln x\cdot 2^{\cos x}\cdot\ln 2$.

**5)** $y=e^{x\ln x}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=x\ln xe^{x\ln x-1}$; б) $y'=e^{x\ln x}$;

в) $y'=e^{x\ln x}(1+\ln x)$; г) $y'=e^{x\ln x-1}(1-\ln x)$.

**6)** $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} \\ y=\arcsin t \end{cases}$. Найти: $y_x''=?$.

Ответы:

а) $y_x''=-\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}$ ; б) $y_x''=\dfrac{t^3}{\sqrt{1-t^2}}$;

в) $y_x''=-\dfrac{t^2}{\sqrt{(1-t^2)^2}}$; г) $y_x''=-t$.

**7)** $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\dfrac{1}{2}\arcsin x$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x^2}$ ; б) $y'=\sqrt{1-x^2}$ ;

в) $y'=\dfrac{-2x+1}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y'=\dfrac{x+2}{\sqrt{1-x^2}}$.

**8)** $y=(x^2+1)e^{2x+1}$. Найти: $y_x''=?$.

Ответы:

а) $y=2xe^{2x+1}$; б) $y=4xe^{2x+1}$;

в) $y=2e^{2x+1}(x^2+x+1)$ ; г) $y=e^{2x+1}(8x^2+4x+6)$.

## Вариант № 12

**Найти производные:**

**1)** $y=\sqrt[3]{(4+5x)^2}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{2}{\sqrt[3]{4+5x}}$; б) $y'=\dfrac{2}{3}(4+5x)^{-\frac{1}{3}}$;

в) $y'=\dfrac{10}{3\sqrt[3]{4+5x}}$ ; г) $y'=\dfrac{1}{3}(25x^2+40x+16)^{-\frac{2}{3}}$.

**2)** $y=\arcsin e^{x^2}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-(e^{x^2})^2}}$; б) $y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-(e^{x^2})^2}}$;

в) $y'=\dfrac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$; г) $y'=\dfrac{e^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$.

**3)** $5x^2+3xy-2y^2+3=0$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{10x+3y}{4y-3x}$; б) $y'=\dfrac{3x-4y}{3y+10x}$;

в) $y'=\dfrac{5x+3}{4y-x}$; г) $y'=\dfrac{3x-4y}{3y-10x}$.

**4)** $y=(\sin 3x)^x$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=x(\sin 3x)^{x-1}\cos 3x\cdot 3$; б) $y'=(\sin 3x)^x\ln\sin 3x$;

в) $y'=(\sin 3x)^x(\ln\sin 3x+3xctg3x)$; г) $y'=(\sin 3x)^x(\ln\sin 3x+3xtg3x)$.

**5)** $y=x\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\sqrt{x}+arctg\sqrt{x}$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$; б) $y'=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}+arctg\sqrt{x}$;

в) $y'=\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $y'=\dfrac{1}{1-x^2}$.

**6)** $\begin{cases} x=\dfrac{1}{t} \\ y=arctgt \end{cases}$. Найти: $y_x''=?$.

Ответы:

а) $y_x''=\dfrac{2t^3}{(1+t^2)^2}$; б) $y_x''=\dfrac{t}{1+t^2}$;

в) $y_x''=\dfrac{1+t^2}{t^3}$; г) $y_x''=\dfrac{t^4}{1+t^3}$.

**7)** $y=tg^4(x^2+1)$. Найти: $y'=?$.

Ответы:

а) $y'=4tg^3(x^2+1)$; б) $y'=\dfrac{4tg^3(x^2+1)}{\cos^2(x^2+1)}$;

в) $y'=\dfrac{8xtg^3(x^2+1)}{\cos^2(x^2+1)}$; г) $y'=\dfrac{1}{\cos^2(x^2+1)}$.

**8.)** $y=(x^3+x)\ln x$. Найти: $y''=?$.

Ответы:

а) $y''=6x\ln x$; б) $y''=(6x+2x^2)\ln x$;

в) $y''=6x\ln x+5x+\dfrac{1}{x}$ ; г) $y''=-\dfrac{6}{x}$.

## Вариант 13

**Найти производные:**

**1**) $y=4x^2-\dfrac{5x}{\sqrt{x}}+\dfrac{8}{x}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=8x-5\sqrt{x}+8$ ; б) $y'=\dfrac{8\sqrt{x^3}-5x^2-8\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}$ ;

в) $y'=\dfrac{8\sqrt{x^3}-2x^2-8\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x}}$ ; г) $y'=8x-\dfrac{5}{2\sqrt{x}}-\dfrac{8}{x^2}$ ;

**2**) $y=\dfrac{arctg3x}{(1+9x^2)}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=1+arctg3x(1+9x^2)$ ; б) $y'=\dfrac{3(1-6xarctg3x)}{(1+9x^2)^2}$ ;

в) $y'=\dfrac{18x\cdot arctg3x-1}{(1+9x^2)^2}$ ; г) $y'=\dfrac{1+9x^2}{18x}$ ;

**3**) $y=ctg^2 5x$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=-\dfrac{1}{\sin^4 5x}$ ; б) $y'=10ctg5x$ ;

в) $y'=-\dfrac{5}{\sin^4 5x}$ ; г) $y'=-\dfrac{10\cos 5x}{\sin^3 5x}$ ;

**4**) $y=(x-x^3)\arcsin x$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=(1-3x^2)\arccos x+x\sqrt{1-x^2}$ ; б) $y'=\dfrac{1-3x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

в) $y'=(1-x^3)\arccos x-x$ ; г) $y'=-\dfrac{3x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

**5**) $y = \ln\cos x - \frac{1}{3}\sin^3 x$ . Найти $y'$.

Ответы:

а). $y' = -tgx - \sin^2 x \cdot \cos x$ ; б). $y' = \frac{1}{\cos x} - \sin^2 x$ ;

в) $y' = -ctgx - \sin^2 x \cdot \cos x$ ; г) $y' = -tgx - \sin^2 x$ .

**6**) $y = (2x-1)^{\sin 3x}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а). $y' = 2\sin 3x(2x-1)^{\sin 3x - 1}$ ;

б) $y' = [3\cos 3x \ln(2x-1) + \frac{2\sin 3x}{2x-1}](2x-1)^{\sin 3x}$ ;

в) $y' = (2x-1)^{\sin 3x}\ln(2x-1)\cos 3x$ ;

г) $y' = \cos 3x \ln(2x-1) + 2\frac{\sin 3x}{3x-1}$ .

**7**) $arctg\frac{x}{y} = \ln y$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \frac{y^2}{y^2 + x^2 - xy}$ ; б). $y' = -\frac{y^2}{y^2 + x^2 + xy}$ ;

в) $y' = -\frac{y^2}{x^2 + y^2 - xy}$ ; г) $y' = \frac{y^2}{y^2 + x^2 + xy}$ .

**8**) $\begin{cases} x = \arccos\sqrt{t} \\ y = \sqrt{t - t^2} \end{cases}$ . Найти $y''_x$.

Ответы:

а) $y''_x = -4\sqrt{t - t^2}$ ; б) $y''_x = 4t \cdot \sqrt{t - t^2}$ ;

в) $y''_x = 4\sqrt{t - t^2}$ ; г) $y''_x = -4\sqrt{1 - t}$ .

## Вариант № 14

**Найти производные:**

**1)** $y = \frac{2x^2 + tgx}{3^x - \sqrt{2}}$ . Найти $y'$ .

Ответы:

а) $y' = \dfrac{\left(4x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\left(3^x - \sqrt{2}\right) - 3^x \ln 3\left(2x^2 + tgx\right)}{\left(3^x - \sqrt{2}\right)^2}$;

б) $y' = \dfrac{\left(2x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\left(3^x - \sqrt{2}\right) - 3^x\left(2x^2 + tgx\right)}{\left(3^x - \sqrt{2}\right)^2}$ ;

в) $y' = \dfrac{4x + \dfrac{1}{\cos^2 x}}{3^x \ln 3}$;

г) $y' = \dfrac{\left(4x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right)\left(3^x - \sqrt{2}\right) + 3^x \ln 3\left(2x^2 + tgx\right)}{3^x - \sqrt{2}}$.

**2)** $y = arctg^3(3x+4)$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 3arctg^2(3x+4)$ ;

б) $y' = \dfrac{3arctg^2(3x+4)}{9x^2+24x+17}$ ;

в) $y' = \dfrac{9arctg^2(3x+4)}{9x^2+24x+17}$ ;

г) $y' = \dfrac{9arctg^2(3x+4)}{3x+5}$.

**3)** $2x^2 + 3^y + x\ln y = 0$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 4x + 3^y \ln 3 + \dfrac{1}{y}$ ;

б) $y' = \dfrac{4x + \ln y}{3^y \ln 3 + \dfrac{x}{y}}$ ;

в) $y' = \dfrac{2x + \ln y}{3^y + \dfrac{x}{y}}$ ;

г) $y' = -\dfrac{4x + \ln y}{3^y \ln 3 + \dfrac{x}{y}}$.

**4)** $y = (2\sin 2x - 3)^{\cos 3x}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = (2\sin 2x - 3)^{\cos 3x - 1} 4\cos 2x \cos 3x$;

б) $y' = (2\sin 2x - 3)^{\cos 3x}\left(-3\sin 3x \ln(2\sin 2x - 3) + \dfrac{4\cos 3x \cos 2x}{2\sin 2x - 3}\right)$;

в) $y' = (2\sin 2x - 3)^{\cos 3x} \ln(2\sin 2x - 3)(-3\sin 3x)$;

г) $y' = -3\sin 3x \ln(2\sin 2x - 3) + \dfrac{4\cos 3x \cos 2x}{2\sin 2x - 3}$.

**5)** $y = 5x^3 + \dfrac{2}{\sqrt[4]{x}} - 3$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 15x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x^5}}$ ; б) $y' = 15x^2 - \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^5}}$ ;

в) $y' = 15x^2 + \dfrac{1}{2}\sqrt[4]{x^3}$ ; г) $y' = 15x^2 - \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x^5}} - 3$.

**6)** $y = \left(x^2 - 1\right)\arccos x$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = (2x-1)\arccos x - \dfrac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}$; б) $y' = 2x\arccos x + \dfrac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}$;

в) $y' = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}$; г) $y' = 2x\arccos x - \dfrac{x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

**7)** $\begin{cases} x = t^2 - 3t + 4 \\ y = 5t^4 + 2t^2 + 1 \end{cases}$. Найти $y''_x$.

Ответы:

а) $y''_x = \dfrac{80t^3 - 180t^2 - 12}{\left(2t-3\right)^2}$ ; б) $y''_x = 30t^2 + 2$ ;

в) $y''_x = \dfrac{80t^3 - 180t^2 - 12}{\left(2t-3\right)^3}$ ; г) $y''_x = \dfrac{1}{30t^2 + 2}$.

8) $y = \log_5\left(3x+1\right) + \dfrac{6}{\sqrt[4]{x^3}}$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{3}{\left(3x+1\right)\ln 5} - \dfrac{9}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$ ; б) $y' = \dfrac{3}{3x+1} - \dfrac{9}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$ ;

в) $y' = \dfrac{3}{\left(3x+1\right)\ln 5} + \dfrac{3}{2}\sqrt[4]{x}$ ; г) $y' = \dfrac{1}{\left(3x+1\right)\ln 5} - \dfrac{9}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$.

## Вариант № 15

**Найти производные:**

1) $y = \dfrac{4x^3 - \log_2 x}{e^x + 5}$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{12x^2 - \dfrac{1}{x\ln 2}}{e^x}$ ; б) $y' = \dfrac{\left(12x^2 - \dfrac{1}{x\ln 2}\right)\left(e^x + 5\right) - e^x\left(4x^3 - \log_2 x\right)}{\left(e^x + 5\right)^2}$ ;

в) $y' = \dfrac{\left(4x^2 - \dfrac{1}{x}\right)\left(e^x + 5\right) - e^x\left(4x^3 - \log_2 x\right)}{\left(e^x + 5\right)^2}$;

г) $y' = \dfrac{\left(12x^2 - \dfrac{1}{x\ln 2}\right)\left(e^x + 5\right) + e^x\left(4x^3 - \log_2 x\right)}{e^x + 5}$.

2) $y = \arcsin^2(4x - 1)$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{8\arcsin(4x-1)}{\sqrt{8x - 16x^2}}$; б) $y' = \dfrac{2\arcsin(4x-1)}{\sqrt{8x - 16x^2}}$ ;

в) $y' = 2\arcsin(4x-1)$ ; г) $y' = \dfrac{8\arcsin(4x-1)}{\sqrt{16x^2 - 8x + 2}}$.

3) $x^2 y^3 + x - \sin y = 0$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 2xy^3 + 3x^2y^2 + 1 - \cos y$ ; б) $y' = \dfrac{2xy^3 + 1}{3x^2y^2 - \cos y}$;

в) $y' = -\dfrac{1}{6xy^2 - \cos y}$; г) $y' = -\dfrac{2xy^3 + 1}{3x^2y^2 - \cos y}$.

**4)** $y = \left(3e^{2x} - 4\right)^{ctg\,4x}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \left(3e^{2x} - 4\right)^{ctg\,4x}\left(-\dfrac{4}{\sin^2 4x}\ln\left(3e^{2x} - 4\right) + \dfrac{6e^{2x}ctg\,4x}{3e^{2x} - 4}\right)$ ;

б) $y' = ctg\,4x \cdot 6e^{2x}\left(3e^{2x} - 4\right)^{ctg\,4x - 1}$;

в) $y' = \left(3e^{2x} - 4\right)^{ctg\,4x}\ln\left(3e^{2x} - 4\right)\left(-\dfrac{4}{\sin^2 4x}\right)$;

г) $y' = -\dfrac{4}{\sin^2 4x}\ln\left(3e^{2x} - 4\right) + \dfrac{6e^{2x}ctg\,4x}{3e^{2x} - 4}$.

**5)** $y = 6x^8 - \dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}} + 1$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 48x^7 + \frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ ; б) $y' = 48x^7 + \frac{8}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ ;

в) $y' = 48x^7 - \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$ ; г) $y' = 48x^7 + \frac{8}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} + 1$.

**6)** $y = \left(3x^2 - 4x\right)\arcsin x$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \frac{6x-4}{\sqrt{1-x^2}}$ ; б) $y' = (6x-4)\arcsin x - \frac{3x^2-4x}{\sqrt{1-x^2}}$ ;

в) $y' = (6x-4)\arcsin x + \frac{3x^2-4x}{\sqrt{1-x^2}}$ ; г) $y' = (3x-4)\arcsin x - \frac{3x^2-4x}{\sqrt{1-x}}$.

**7)** $\begin{cases} x = t^4 - 5t^2 + 2 \\ y = t^6 - 3t^4 + 4 \end{cases}$ . Найти $y''_x$.

Ответы:

а) $y''_x = \frac{6t^4 - 30t^2 + 30}{\left(2t^2-5\right)^3}$ ; б) $y''_x = \frac{15t^4 - 18t^2}{6t^2-5}$ ;

в) $y''_x = \frac{12t^5 - 60t^3 + 60t}{\left(2t^2-5\right)^2}$ ; г) $y''_x = \frac{6t^2-5}{15t^4 - 18t^2}$.

**8)** $y = 8^{7x-4} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^5}}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 7\cdot 8^{7x-4}\ln 8 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ ; б) $y' = 7\cdot 8^{7x-4} + \frac{10}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}$ ;

в) $y' = 7\cdot 8^{7x-4}\ln 8 + \frac{10}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}$ ; г) $y' = 8^{7x-4}\ln 8 + \frac{10}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^8}}$.

## Вариант № 16

**Найти производные:**

**1)** $y = \frac{5x^2 - 1 + \cos x}{2^x + x^3}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \frac{10x - \sin x}{2^x\ln 2 + 3x^2}$; б) $y' = \frac{(5x+\sin x)\left(2^x + x^3\right) - \left(2^x + 3x^2\right)\left(5x^2 - 1 + \cos x\right)}{\left(2^x + x^3\right)^2}$ ;

в) $y' = \dfrac{(10x - \sin x)(2^x + x^3) - (2^x \ln 2 + 3x^2)(5x^2 - 1 + \cos x)}{(2^x + x^3)^2}$;

г) $y' = \dfrac{(10x - \sin x)(2^x + x^3) + (2^x \ln 2 + 3x^2)(5x^2 - 1 + \cos x)}{2^x + x^3}$.

**2)** $y = \cos^4(5x - 2)$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 20\cos^3(5x-2)\sin(5x-2)$; б) $y' = -4\cos^3(5x-2)\sin(5x-2)$;

в) $y' = 4\cos^3(5x-2)$; г) $y' = -20\cos^3(5x-2)\sin(5x-2)$.

**3)** $\ln(x+2) - x\cos y + y^2 = 0$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{\cos y - \dfrac{1}{x+2}}{x\sin y + 2y}$; б) $y' = -\dfrac{\cos y - \dfrac{1}{x+2}}{x\sin y + 2y}$;

в) $y' = -\dfrac{1}{(x+2)(\sin y + 2y)}$ ; г) $y' = \dfrac{1}{(x+2)} - \cos y + x\sin y + 2y$.

4) $y = (3\ln(5x) + 1)^{\sin 3x}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = (3\ln(5x)+1)^{\sin 3x}\left(3\cos 3x \ln(3\ln(5x)+1) + \dfrac{3\sin 3x}{x(3\ln(5x)+1)}\right)$;

б) $y' = \sin 3x(3\ln(5x)+1)^{\sin 3x - 1}\dfrac{3}{x}$;

в) $y' = (3\ln(5x)+1)^{\sin 3x}\ln(3\ln(5x)+1)3\cos 3x$;

г) $y' = 3\cos 3x\ln(3\ln(5x)+1) + \dfrac{3\sin 3x}{x(3\ln(5x)+1)}$.

**5)** $y = 4x^4 + \dfrac{3}{\sqrt[4]{x^3}} - 2$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 16x^3 - \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$; б) $y' = 16x^3 - \dfrac{9}{4}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}}$;

в) $y' = 16x^3 + \dfrac{3}{4}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ ; г) $y' = 16x^3 - \dfrac{9}{4}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^7}} - 2$.

**6)** $y = (5x^4 + 3x^3)arcctgx$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \left(5x^3 + 3x^2\right)arcctgx - \frac{5x^4 + 3x^3}{1+x}$;

б) $y' = \left(20x^3 + 9x^2\right)arcctgx + \frac{5x^4 + 3x^3}{1+x^2}$;

в) $y' = -\frac{20x^3 + 9x^2}{1+x^2}$; г) $y' = \left(20x^3 + 9x^2\right)arcctgx - \frac{5x^4 + 3x^3}{1+x^2}$.

**7)** $\begin{cases} x = 2^t \\ y = 2^t\left(t^4 - 3t^3 + 4\right) \end{cases}$. Найти $y''_x$.

Ответы:

а) $y''_x = \frac{8t^3 \ln 2 + t^4 \ln^2 2 + 12t^2}{\ln^2 2}$; б) $y''_x = \frac{12t^2 + 4t^3 \ln 2}{2^t \ln^2 2}$;

в) $y''_x = \frac{12t^2 + 4t^3 \ln 2}{\ln 2}$; г) $y''_x = \frac{\ln^2 2}{8t^3 \ln 2 + t^4 \ln^2 2 + 12t^2}$.

**8)** $y = \log_3\left(4x-2\right) - \frac{7}{\sqrt[5]{x^3}}$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \frac{4}{(4x-2)\ln 3} - \frac{7}{5}\sqrt[5]{x^2}$; б) $y' = \frac{4}{(4x-2)} + \frac{21}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}}$;

в) $y' = \frac{4}{(4x-2)\ln 3} + \frac{21}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}}$; г) $y' = \frac{1}{(4x-2)\ln 3} + \frac{21}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}}$.

## Вариант № 17

**Найти производные:**

1) $y = \frac{x^4 + \ln x}{ctgx - \sin 1}$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \frac{\left(4x^3 + \frac{1}{x}\right)\left(ctgx - \sin 1\right) + \frac{1}{\sin^2 x}\left(x^4 + \ln x\right)}{\left(ctgx - \sin 1\right)^2}$; б) $y' = \frac{4x^3 + \frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}$;

в) $y' = \frac{\left(x^3 + \frac{1}{x}\right)\left(ctgx - \sin 1\right) + \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \cos 1\right)\left(x^4 + \ln x\right)}{\left(ctgx - \sin 1\right)^2}$;

г) $y' = \frac{\left(4x^3 + \frac{1}{x}\right)\left(ctgx - \sin 1\right) - \frac{1}{\sin^2 x}\left(x^4 + \ln x\right)}{ctgx - \sin 1}$.

**2)** $y = tg^3(2x+1)$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \frac{6tg^2(2x+1)}{\sin^2(2x+1)}$; б) $y' = \frac{3tg^2(2x+1)}{\cos^2(2x+1)}$;

в) $y' = 3tg^2(2x+1)$; г) $y' = \frac{6tg^2(2x+1)}{\cos^2(2x+1)}$.

**3)** $2^{x+3} - \cos x \cdot tgy + arctgy = 0$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \frac{2^{x+3}\ln 2 + \sin xtgy}{\frac{1}{1+y^2} - \frac{\cos x}{\cos^2 y}}$; б) $y' = -\frac{2^{x+3}\ln 2 + \sin xtgy}{\frac{1}{1+y^2} - \frac{\cos x}{\cos^2 y}}$;

в) $y' = -\frac{2^{x+3}}{\frac{\sin x}{\cos^2 y} + \frac{1}{1+y^2}}$; г) $y' = 2^{x+3}\ln 2 + \sin xtgy - \frac{\cos x}{\cos^2 y} + \frac{1}{1+y^2}$.

4) $y = \left(2 \cdot 3^{5x-1} - 4\right)^{arctg\,2x}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \left(2 \cdot 3^{5x-1} - 4\right)^{arctg\,2x} \ln\left(2 \cdot 3^{5x-1} - 4\right)\frac{2}{1+4x^2}$ ;

б) $y' = arctg2x\left(2 \cdot 3^{5x-1} - 4\right)^{arctg\,2x-1} 10 \cdot 3^{5x-1}\ln 3$ ;

в) $y' = \left(2 \cdot 3^{5x-1} - 4\right)^{arctg\,2x}\left(\frac{2\ln\left(2 \cdot 3^{5x-1} - 4\right)}{1+4x^2} + \frac{10 \cdot 3^{5x-1}\ln 3arctg2x}{2 \cdot 3^{5x-1} - 4}\right)$;

г) $y' = \frac{2\ln\left(2 \cdot 3^{5x-1} - 4\right)}{1+4x^2} + \frac{10 \cdot 3^{5x-1}\ln 3arctg2x}{2 \cdot 3^{5x-1} - 4}$.

**5)** $y = 3x^{10} - \frac{5}{\sqrt[3]{x^4}} - 4$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 30x^9 + \frac{4}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$ ; б) $y' = 30x^9 + \frac{20}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}}$ ;

в) $y' = 30x^9 + \frac{5}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ; г) $y' = 30x^9 + \frac{20}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^7}} - 4$.

**6)** $y = \left(3x^7 - 2x^6\right) \cdot tgx$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \left(21x^6 - 12x^5\right)tgx + \dfrac{3x^7 - 2x^6}{\cos^2 x}$; б) $y' = \left(21x^6 - 12x^5\right)tgx - \dfrac{3x^7 - 2x^6}{\cos^2 x}$;

в) $y' = \dfrac{21x^6 - 12x^5}{\cos^2 x}$; г) $y' = \left(3x^6 - 2x^5\right)tgx + \dfrac{3x^7 - 2x^6}{\sin^2 x}$.

**7)** $\begin{cases} x = \log_5 t \\ y = t^2 - 2t + 5 \end{cases}$. Найти $y''_x$.

Ответы:

а) $y''_x = \dfrac{2}{t^2 \ln 5}$; б) $y''_x = -2t^2 \ln 5$; в) $y''_x = \dfrac{2}{t}$; г) $y''_x = -\dfrac{1}{2t^2 \ln 5}$.

**8)** $y = 3^{2x-2} + \dfrac{6}{\sqrt[6]{x^5}}$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 3^{2x-2} \ln 3 - 5\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^{11}}}$; б) $y' = 3^{2x-2} \cdot 2 - 5\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^{11}}}$;

в) $y' = 3^{2x-2} \ln 3 \cdot 2 + \sqrt[6]{x}$; г) $y' = 3^{2x-2} \ln 3 \cdot 2 - 5\dfrac{1}{\sqrt[6]{x^{11}}}$.

## Вариант № 18

**Найти производные**:

**1)** $y = \dfrac{2x^3 - 1 - \sin x}{e^x + \cos 2}$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{\left(6x^2 - \cos x\right)\left(e^x + \cos 2\right) + e^x\left(2x^3 - 1 - \sin x\right)}{e^x + \cos 2}$; б) $y' = \dfrac{6x^2 - \cos x}{e^x}$;

в) $y' = \dfrac{\left(2x^2 - \cos x\right)\left(e^x + \cos 2\right) - (e^x - \sin 2)\left(2x^3 - 1 - \sin x\right)}{\left(e^x + \cos 2\right)^2}$;

г) $y' = \dfrac{\left(6x^2 - \cos x\right)\left(e^x + \cos 2\right) - e^x\left(2x^3 - 1 - \sin x\right)}{\left(e^x + \cos 2\right)^2}$.

2) $y = \log_3^4 (5x - 1)$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{4\log_3^3(5x-1)}{(5x-1)\ln 3}$; б) $y' = \dfrac{20\log_3^3(5x-1)}{(5x-1)\ln 3}$;

в) $y' = 4\log_3^3(5x-1)$; г) $y' = \dfrac{20\log_3^3(5x-1)}{5x-1}$.

**3)** $3^y + x^3y^4 - tgx = 0$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 3x^2y^4}{3^y \ln 3 + 4x^3y^3}$ ; б) $y' = \dfrac{3x^2y^4 - \dfrac{1}{\cos^2 x}}{3^y \ln 3 + 4x^3y^3}$;

в) $y' = \dfrac{1}{\cos^2 x(3^y + 12x^2y^3)}$ ; г) $y' = 3^y \ln 3 + 3x^2y^4 + 4x^3y^3 - \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

**4)** $y = (3tg5x + 5)^{\arcsin 3x}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = (3tg5x+5)^{\arcsin 3x}\left(\dfrac{3\ln(3tg5x+5)}{\sqrt{1-9x^2}} + \dfrac{15\arcsin 3x}{\cos^2 5x(3tg5x+5)}\right)$;

б) $y' = \arcsin 3x(3tg5x+5)^{\arcsin 3x - 1}\dfrac{15}{\cos^2 5x}$ ;

в) $y' = (3tg5x+5)^{\arcsin 3x}\ln(3tg5x+5)\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$;

г) $y' = \dfrac{3\ln(3tg5x+5)}{\sqrt{1-9x^2}} + \dfrac{15\arcsin 3x}{\cos^2 5x(3tg5x+5)}$.

5) $y = 2x^7 + \dfrac{6}{\sqrt[4]{x^5}} - 3$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 14x^6 - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$ ; б) $y' = 14x^6 - \dfrac{5}{4}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^9}}$ ;

в) $y' = 14x^6 - \dfrac{15}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^9}}$ ; г) $y' = 14x^6 - \dfrac{15}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^9}} - 3$.

6) $y = \left(5x^2 - 6x^3\right)\cdot 3^x$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \left(5x - 6x^2\right)3^x + \left(5x^2 - 6x^3\right)\cdot 3^x$; б) $y' = \left(10x - 18x^2\right)3^x - \left(5x^2 - 6x^3\right)\cdot 3^x \ln 3$;

в) $y' = \left(10x - 18x^2\right)3^x \ln 3$; г) $y' = \left(10x - 18x^2\right)3^x + \left(5x^2 - 6x^3\right)\cdot 3^x \ln 3$.

**7)** $\begin{cases} x = t^2 - 2t \\ y = t^3 - 3t^2 + t - 1 \end{cases}$ . Найти $y''_x$.

Ответы:

а) $y''_x = \dfrac{6t^2 - 12t + 10}{(2t-2)^2}$; б) $y''_x = 3t - 3$; в) $y''_x = \dfrac{6t^2 - 12t + 10}{(2t-2)^3}$; г) $y''_x = \dfrac{1}{3t-3}$.

**8)** $y=\log_4(6x-8)-\dfrac{5}{\sqrt[3]{x^2}}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{6}{(6x-8)}+\dfrac{10}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$; б) $y'=\dfrac{6}{(6x-8)\ln 4}+\dfrac{10}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$ ;

в) $y'=\dfrac{6}{(6x-8)\ln 4}-\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x}$ ; г) $y'=\dfrac{1}{(6x-8)\ln 4}+\dfrac{10}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^5}}$.

## Вариант № 19

**Найти производные:**

1. $y=\dfrac{3x^2+2\cdot 3^x}{\sqrt{3}+tgx}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=\dfrac{\left(6x+2\cdot 3^x\ln 3\right)\left(\sqrt{3}+tgx\right)-\dfrac{1}{\cos^2 x}\left(3x^2+2\cdot 3^x\right)}{\left(\sqrt{3}+tgx\right)^2}$; б) $y'=\dfrac{6x+2\cdot 3^x\ln 3}{\dfrac{1}{\cos^2 x}}$;

в) $y'=\dfrac{\left(3x+2\cdot 3^x\right)\left(\sqrt{3}+tgx\right)-\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\right)\left(3x^2+2\cdot 3^x\right)}{\left(\sqrt{3}+tgx\right)^2}$;

г) $y'=\dfrac{\left(6x+2\cdot 3^x\ln 3\right)\left(\sqrt{3}+tgx\right)+\dfrac{1}{\cos^2 x}\left(3x^2+2\cdot 3^x\right)}{\sqrt{3}+tgx}$.

2) $y=\arccos^5(2x-3)$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y'=5\arccos^4(2x-3)$ ; б) $y'=-\dfrac{5\arccos^4(2x-3)}{\sqrt{12x-4x^2-8}}$;

в) $y'=-\dfrac{10\arccos^4(2x-3)}{\sqrt{12x-4x^2-8}}$; г) $y'=\dfrac{10\arccos^4(2x-3)}{\sqrt{12x-4x^2-8}}$.

3) $y^5e^x-\log_3 y+arctgx=0$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{y^5e^x + \dfrac{1}{1+x^2}}{5y^4e^x - \dfrac{1}{y\ln 3}}$ ;

б) $y' = -\dfrac{y^5e^x + \dfrac{1}{1+x^2}}{5y^4e^x - \dfrac{1}{y\ln 3}}$;

в) $y' = -\dfrac{1}{(1+x^2)\left(5y^4e^x - \dfrac{1}{y}\right)}$;

г) $y' = 5y^4e^x + y^5e^x - \dfrac{1}{y\ln 3} + \dfrac{1}{1+x^2}$.

**4)** $y = (5\cos 3x - 6)^{arcctg\,4x}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = (5\cos 3x - 6)^{arcctg\,4x}\ln(5\cos 3x - 6)\left(-\dfrac{4}{1+16x^2}\right)$;

б) $y' = arcctg\,4x(5\cos 3x - 6)^{arcctg\,4x-1}(-15\sin 3x)$;

в) $y' = -(5\cos 3x - 6)^{arcctg\,4x}\left(\dfrac{4\ln(5\cos 3x - 6)}{1+16x^2} + \dfrac{15\sin 3x\,arcctg\,4x}{5\cos 3x - 6}\right)$;

г) $y' = -\left(\dfrac{4\ln(5\cos 3x - 6)}{1+16x^2} + \dfrac{15\sin 3x\,arcctg\,4x}{5\cos 3x - 6}\right)$.

**5)** $y = 3x^2 - \dfrac{2}{\sqrt[7]{x^2}} + 4$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 6x + \dfrac{4}{7}\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^9}} + 4$ ;

б) $y' = 6x - \dfrac{2}{7}\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^9}}$;

в) $y' = 6x + \dfrac{2}{7}\sqrt[7]{x^5}$ ;

г) $y' = 6x + \dfrac{4}{7}\dfrac{1}{\sqrt[7]{x^9}}$.

6) $y = (2x^8 - 5x^4)\log_2 x$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = (16x^7 - 20x^3)\log_2 x - \dfrac{2x^7 - 5x^3}{\ln 2}$;

б) $y' = (16x^7 - 20x^3)\log_2 x + \dfrac{2x^7 - 5x^3}{\ln 2}$;

в) $y' = \dfrac{16x^6 - 20x^2}{\ln 2}$;

г) $y' = (2x^7 - 5x^3)\log_2 x + 2x^7 - 5x^3$.

**7)** $\begin{cases} x = 4t^3 - 2t + 4 \\ y = -t^4 + 2t^3 - 4 \end{cases}$ . Найти $y''_x$.

Ответы:

а) $y''_x = \dfrac{-6t^4+3t^2-3t}{\left(6t^2-1\right)^3}$; б) $y''_x = \dfrac{-t+1}{2}$;

в) $y''_x = \dfrac{-12t^4+6t^2-6t}{\left(6t^2-1\right)^2}$ ; г) $y''_x = \dfrac{2}{-t+1}$.

8) $y = 4^{3x+2} + \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^5}}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 4^{3x+2}\ln 4 - \dfrac{5}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^9}}$ ; б) $y' = 4^{3x+2}\cdot 3 - \dfrac{5}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^9}}$ ; в) $y' = 4^{3x+2}\ln 4\cdot 3 - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x}}$;

г) $y' = 4^{3x+2}\ln 4\cdot 3 - \dfrac{5}{2}\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^9}}$.

## Вариант № 20

**Найти производные:**

**1)** $y = \dfrac{3x^4-4^x}{\cos x + arctg1}$. Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{12x^3-4^x\ln 4}{-\sin x}$; б) $y' = \dfrac{\left(12x^3-4^x\ln 4\right)\left(\cos x + arctg1\right) + \sin x\left(3x^4-4^x\right)}{\left(\cos x + arctg1\right)^2}$;

в) $y' = \dfrac{\left(12x^3-x4^{x-1}\right)\left(\cos x + arctg1\right) - \left(-\sin x + arctg1\right)\left(3x^4-4^x\right)}{\left(\cos x + arctg1\right)^2}$;

г) $y' = \dfrac{\left(12x^3-4^x\ln 4\right)\left(\cos x + arctg1\right) - \left(0{,}5-\sin x\right)\left(3x^4-4^x\right)}{\cos x + arctg1}$.

**2)** $y = arcctg^4\left(4-2x\right)$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = \dfrac{8arcctg^3\left(4-2x\right)}{4x^2-16x+17}$ ; б) $y' = -\dfrac{8arcctg^3\left(4-2x\right)}{4x^2-16x+17}$ ;

в) $y' = -\dfrac{4arcctg^3\left(4-2x\right)}{4x^2-16x+17}$; г) $y' = 4arcctg^3\left(4-2x\right)$.

**3)** $3y^2+\sin y - x2^y = 0$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 6y + \cos y - 2^y \ln 2$ ; б) $y' = \dfrac{2^y}{6y - \cos y - x2^y}$;

в) $y' = \dfrac{2^y}{6y + \cos y - x2^y \ln 2}$; г) $y' = -\dfrac{2^y}{6y + \cos y - x2^y \ln 2}$.

**4)** $y = (2tgx - 1)^{x^2+1}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = (x^2+1)(2tgx-1)^{x^2} \dfrac{2}{\cos^2 x}$;

б) $y' = (2tgx-1)^{x^2+1}\left(2x\ln(2tgx-1) + \dfrac{2(x^2+1)}{(2tgx-1)\cos^2 x}\right)$;

в) $y' = 2x\ln(2tgx-1) + \dfrac{2(x^2+1)}{(2tgx-1)\cos^2 x}$; г) $y' = (2tgx-1)^{x^2+1}\ln(2tgx-1)2x$.

5. $y = \dfrac{1}{7}x^7 - \dfrac{3}{\sqrt[3]{x}} + \ln 2$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = x^6 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}}$; б) $y' = x^6 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \dfrac{1}{2}$;

в) $y' = x^6 + \sqrt[3]{x^2}$ ; г) $y' = x^6 + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + \ln 2$.

6) $y = (3x^4 - 4x^3)\log_2 x$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 12(x^3 - x^2)\log_2 x + \dfrac{3x^3 - 4x^2}{\ln 2}$; б) $y' = 12(x^3 - x^2)\log_2 x - \dfrac{3x^3 - 4x^2}{\ln 2}$;

в) $y' = 12(x^3 - x^2)\log_2 x + 3x^3 - 4x^2$; г) $y' = \dfrac{12x^2 - 12x}{\ln 2}$.

7) $\begin{cases} x = t^2 - 2 \\ y = 4t^3 - 6t^2 + 1 \end{cases}$ . Найти $y''_x$.

Ответы:

а) $y''_x = 6$; б) $y''_x = \dfrac{3}{t}$; в) $y''_x = \dfrac{12}{t}$; г) $y''_x = \dfrac{t}{3}$.

8) $y = 8^{4x-1} + \dfrac{4}{3}\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$ . Найти $y'$.

Ответы:

а) $y' = 8^{4x-1}\ln 8 \cdot 4 + \frac{1}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}}$; б) $y' = 8^{4x-1}\ln 8 - \frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$; в) $y' = 8^{4x-1} \cdot 4 - \frac{4}{5}\sqrt[5]{x^2}$;
г) $y' = 8^{4x-1}\ln 8 \cdot 4 - \frac{4}{5}\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}}$.

## Список использованной литературы


1. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. 4-е изд., стереотипное – СПб.: Издательство «Лань», 2001. – 736 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 432 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 5-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 288 с.
4. Задачник-практикум по высшей математике: Множества. Функции. Предел. Непрерывность. Производная. Учеб. пособие / Под ред. В.А. Волкова. – Л.: Издательство Ленинградского университета, 1988. – 224 с.
5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1966. – 466 с.

**Содержание**