ГОУВПО КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Л.Г. Лелевкина, Е.А. Саламатина

ФУНКЦИИ ДВУХ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Издательство Кыргызско-Российского
Славянского университета

Бишкек 2010

УДК 517

Рецензенты:

Печатается по решению кафедры высшей математики

Лелевкина Л.Г.

Л 33 ФУНКЦИИ ДВУХ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ: Учебно-методическое пособие / Л.Г. Лелевкина, Е.А. Саламатина. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2010. – 93с.

Данное пособие содержит краткие теоретические основы одного из наиболее важных разделов курса «Высшей математики», имеющего большое применение при решении прикладных задач физики, механики, промышленного строительства, а также при решении социальных и экономических задач.

Пособие состоит из трех глав. I и II главы содержат краткий теоретический материал с разбором решений приведенных примеров и задач.

III глава содержит задания для типовых расчетов и тестов с четырьмя вариантами ответов, один из которых является верным. Задания для типовых расчетов содержат 20 вариантов по 8 задач в каждом, тесты содержат 15 вариантов по 5 задач.

Кроме того, данное пособие положено авторами в основу компьютерной контрольно-обучающей программы тестирования.

Пособие предназначено для студентов естественно-технического, экономического и архитектурно-строительного факультетов дневной и заочной форм обучения.

Предисловие

Учебно-методическое пособие «Функции двух и нескольких переменных» отличается от аналогичных пособий по данному разделу курса высшей математики не только структурой изложения, но и содержанием.

Перед изложением теоретического материала в каждой главе приводится ряд практических задач, решения которых требуют знаний данного раздела математического анализа, что сразу указывает на практическую значимость данного материала и его актуальность.

Наибольшее применение имеют экстремумы функции при решении задач оптимизации не только технических процессов, но и при решении социальных и экономических задач.

При исследовании функции на условный экстремум почти во всех учебных пособиях приводятся только необходимые условия существования. Авторы данного пособия излагают не только необходимые, но и достаточные условия экстремума, выраженные для функций двух переменных через определитель третьего порядка, что значительно упрощает их применение.

Во многих учебных пособиях по разделу функций двух и нескольких переменных не рассматривается широко используемый при экспериментальных и социологических исследованиях метод наименьших квадратов. В данном пособии при получении эмпирических формул рассмотрена не только линейная аппроксимация, но и квадратичная и кубическая, что значительно расширяет область его применения.

Методическое пособие содержит тот необходимый минимум теоретических сведений, который будет способствовать успешному усвоению материала и его применению к решению различных практических задач. Наряду с теоретическими указаниями, пособие содержит по каждому разделу разобранные примеры с решениями.

Основной целью авторов является стимулирование самостоятельной работы студентов на основе использования данного пособия, как руководства к решению представленных в нем задач и примеров, содержащее краткие и лаконичные методические указания.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. ФУНКЦИИ ДВУХ И НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Функции одной независимой переменной не охватывают все зависимости, существующие в природе. Многим явлениям возникающим, в том числе в технике, естествознании и экономике, свойственна многофакторная зависимость. Исследование таких зависимостей потребовало совершенствование математического аппарата, в частности, введения понятия функции нескольких переменных.

Примерами функций двух и нескольких переменных могут служить:

- площадь S прямоугольника со сторонами x и y, выражаемая формулой $S = xy$, т.е. значения S определяются совокупностью значений x и y;
- Объем V прямоугольного параллелепипеда с ребрами x, y и z, выражается формулой $V = xyz$, т.е. значения V зависят от трех переменных.
- закон Ома, который гласит, что $I = \frac{E}{R}$, где I – сила тока, E – электродвижущая сила, и R – сопротивление, т.е. значения I – определяются совокупностью значений E и R;
- абсолютная температура T, давление p и объем V данной массы газа связаны формулой Менделеева – Клайперона $pV = RT$, где R - некоторая постоянная. Отсюда, например, $V = \frac{RT}{p}$, т.е. значения V зависят от значений T и p;
- функция *Кобба – Дугласа* – производственная функция, показывающая объем выпуска продукции Y при затратах капитала K и трудовых ресурсов L. Для случая двух переменных она имеет вид $Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$, где $A > 0$ – параметр производительности конкретно взятой технологии, $0 < \alpha < 1$ – доля капитала в доходе.
- Понятие *функции полезности* является одним из базовых в экономической теории. В широком смысле она выражает зависимость полезности, т.е.

результата, эффекта некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия. Многомерным ее аналогом является функция $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая выражает полезность от n приобретенных товаров.

Чаще всего встречаются следующие ее виды:

а) *логарифмическая функция*

$$z = \sum_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i), \text{ где } a_i > 0,\ x_i > c_i \geq 0;$$

б) функция постоянной эластичности

$$z = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 - b_i}(x_i - c_i)^{1-b_i}, \text{ где } a_i > 0,\ 0 < b_i < 1,\ x_i > c_i \geq 0.$$

Для изучения подобного рода зависимостей вводится понятие функций двух и нескольких переменных.

§ 1. Основные понятия и определения для функций двух и нескольких переменных

Определение 1. Закон (правило) по которому каждой паре $(x, y) \in D$ независимых переменных ставиться в соответствие определенное значение $z = f(x, y) \in G$ называется ***функцией двух переменных***.

Например, площадь прямоугольника представляет собой функцию двух переменных.

Замечание. Если паре значений $(x, y) \in D$ соответствует одно значение z, то функция называется ***однозначной.*** В остальных случаях – ***многозначной***.

Определение 2. Пусть имеется n различных переменных величин, и каждому набору их значений $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ соответствует определенное значение переменной величины $z \in Z$. Тогда говорят, что задана ***функция нескольких переменных*** $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Например, объем параллелепипеда – функция трех переменных.

Переменные $x_1, x_2, \ldots x_n$ называются *независимыми переменными*, или *аргументами*, z – *зависимой переменной*, а символ f означает закон соответствия. Множество X называется *областью определения функции.* Очевидно, что X – подмножество n-мерного пространства.

Обычно функция нескольких переменных задается аналитически (явно или неявно), таблично, графически (для случая функции двух переменных).

В дальнейшем, для простоты изложения, будем рассматривать функцию двух переменных, так как все важнейшие факты теории функции нескольких переменных наблюдаются уже на функциях двух переменных и обобщаются на случай большего числа переменных.

Как и в случае одного независимого переменного, функция двух переменных существует, вообще говоря, не при любых значениях x и y.

Определение 3. Совокупность пар $(x, y) \in D$ значений x и y, при которых функция $z = f(x, y)$ имеет смысл, называется ***областью определения*** функции.

Область определения наглядно иллюстрируется геометрически. Если каждую пару значений x и y мы будем изображать точкой $M(x, y)$ в плоскости Oxy, то область определения функции D изобразится в виде некоторой совокупности точек на плоскости, т.е. части плоскости, в частности, может быть и вся плоскость.

Определение 4. ***Графиком функции двух переменных*** $z = f(x, y)$ называется множество точек трехмерного пространства (x, y, z) аппликата z которых связана с абсциссой x и ординатой y функциональным соотношением $z = f(x, y)$.

График функции двух переменных $z = f(x, y)$, вообще говоря, *представляет собой некоторую поверхность в трехмерном пространстве*.

Как правило, построение поверхности оказывается довольно трудной задачей и поверхность обладает меньшей наглядностью, чем линия на плоскости. В связи с этим оказывается удобным геометрически описывать функцию двух переменных, не выходя в трехмерное пространство. Средством такого описания являются линии уровня.

Определение 5. ***Линией уровня*** $z = c$ функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется линия на плоскости $f(x, y) = c$. В каждой точке, лежащей на этой линии, функция $z = f(x, y)$ принимает значение, равное c.

Число c в этом случае называется ***уровнем***.

Обычно берут арифметическую прогрессию чисел c_i с постоянной разностью h; тогда по взаимному расположению линий уровня можно получить представление о форме поверхности, описываемой функцией $z = f(x, y)$. Там, где функция изменяется быстрее, линии уровня сгущаются, а там, где поверхность пологая, линии уровня располагаются реже.

Многие примеры линий уровня хорошо известны. Например, параллели и меридианы на глобусе – это линии уровня функций широты и долготы. Синоптики публикуют карты с изображением изотерм – линий уровня температуры. Линиями уровня обозначают глубину морей и высоту гор на географических картах.

Определение 6. ***Поверхностью уровня*** (эквипотенциальной поверхностью) $u = c$ функции $u = f(x, y, z)$ называется поверхность $f(x, y, z) = c$, в точках которой функция $u = f(x, y, z)$ сохраняет значение, равное c.

Придавая, постоянной *c,* различные числовые значения, получим семейство поверхностей уровня. Через каждую точку пространства проходит одна поверхность уровня.

Во всех точках поверхности уровня физическое явление протекает одинаково.

Рассмотрим типичные примеры, для решения которых используются приведенные определения и понятия:

Пример 1. Найти область определения функции $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.

Решение. Для того, чтобы z имело действительное значение, нужно, чтобы под корнем стояло положительное число, т.е. x и y должны удовлетворять неравенству $4 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 4$. Все точки $M(x, y)$, координаты которых удовлетворяют указанному неравенству, лежат в круге радиуса 2 с центром в начале координат, исключая границу этого круга (рис.1).

Пример 2. Найти область определения функции $z = \arcsin\left(3 - x^2 - y^2\right)$.

Решение. Так как арксинус определен для значений аргументов не превосходящих по модулю 1, то должно удовлетворяться неравенство $\left|3 - x^2 - y^2\right| \le 1$, которое равносильно двойному неравенству $-1 \le 3 - x^2 - y^2 \le 1$ которое равносильно неравенствам: $x^2 + y^2 \le 4$ и $x^2 + y^2 \ge 2$. Множество значений *x* и *y*, удовлетворяющих первому из указанных неравенств, представляет собой «внутренность» круга радиуса 2 с центром в точке $(0;0)$. Решения второго неравенства – «внешность» круга радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(0;0)$. В обоих случаях, так как неравенство не строгое, входит окружность круга. Таким образом, область определения представляет собой кольцо (рис.2).

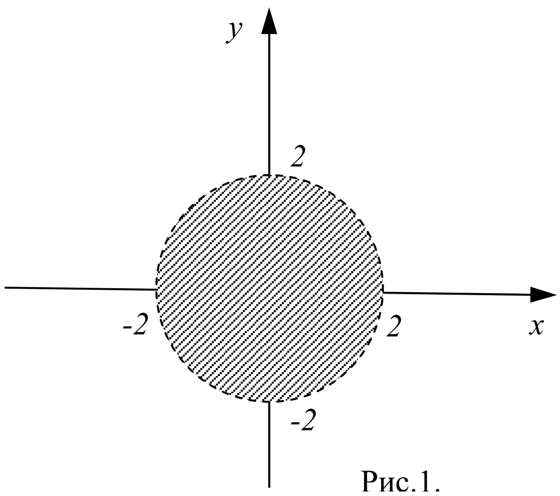


Рис.1.

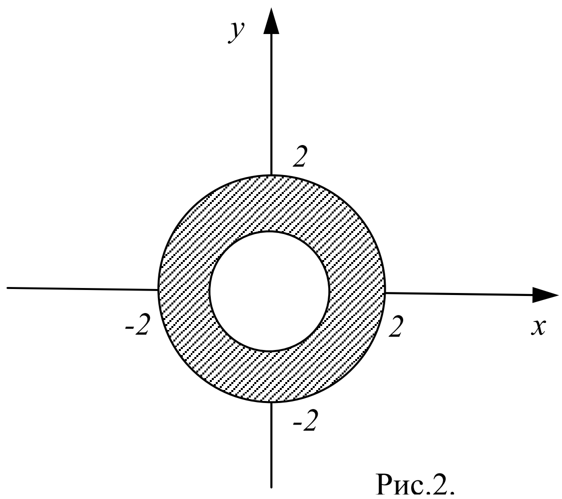


Рис.2.

Пример 3. Найти область определения функции $z = \ln(x^2 + y^2)$.

Решение. Так как логарифмы определены для положительных чисел, то должно удовлетворяться неравенство $x^2 + y^2 > 0$, которое справедливо для всех значений переменных *x* и *y,* кроме $x = y = 0$. Следовательно, областью определения данной функции является вся плоскость *Oxy*, кроме начала координат (рис.3).

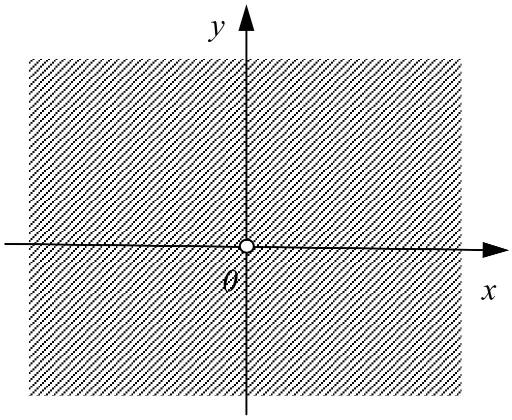


Рис.3

Пример 4. Построить линии уровня функции $z = x^2 + y^2$.

Решение. Пересечем данную поверхность плоскостью $z = c \quad (0 \le c < +\infty)$. Задавая c различные значения, например, $c=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ получим семейство линий уровня, представляющих собой концентрические окружности (рис.4). При $c = 0$ окружность вырождается в точку $(0,\ 0)$. Из того, что линиями уровня оказались окружности с центрами в начале координат, следует, что графиком данной функции должна быть поверхность вращения вокруг оси Oz. Действительно, как известно из аналитической геометрии, уравнение $z = x^2 + y^2$ определяет параболоид вращения (рис.5).

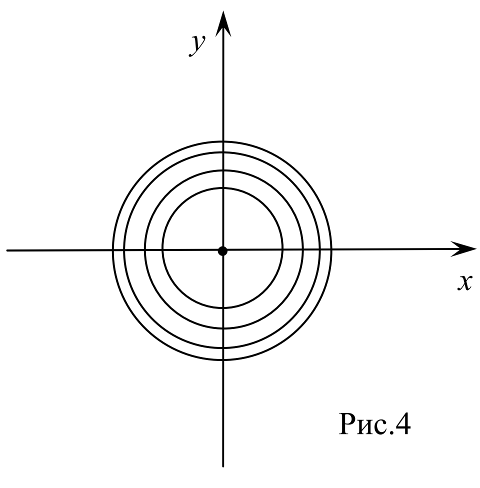


Рис.4

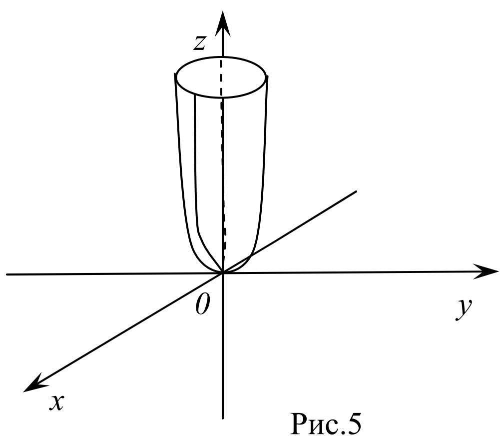


Рис.5

Пример 5. Построить поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 + z^2$.

Решение. Здесь поверхностями уровня будут поверхности, заданные уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = c$. Задавая c различные значения, например, $c=0,\ 1,\ 2,\ ...,$ получим семейство поверхностей уровня, представляющих собой концентрические сферы с радиусом $\sqrt{c}$. При $c = 0$ сфера вырождается в точку $(0,0,0)$.

§ 2. Частные производные первого порядка для функций двух переменных. Полный дифференциал

1. Частные производные. Пусть задана функция $z = f(x, y)$. Так как x и y – независимые переменные, то одна из них может изменяться, а другая сохранять свое значение. Дадим независимой переменной x приращение Δx, сохраняя значение y неизменным. Тогда z получит приращение, которое называется ***частным приращением*** z по x и обозначается $\Delta_x z$. Итак,

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x; y) - f(x; y).$$

Аналогично получаем частное приращение z по y:

$$\Delta_y z = f(x; y + \Delta y) - f(x; y).$$

Определение 1. ***Частной производной функции нескольких переменных*** по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при произвольном стремлении последнего к нулю (если этот предел существует).

Обозначается частная производная так: $z'_x,\ z'_y$ или $\dfrac{\partial z}{\partial x},\ \dfrac{\partial z}{\partial y}$, или $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$.

Таким образом, для функции $z = f(x, y)$ по определению

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x};$$

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Нахождение производной z'_x называется ***дифференцированием*** функции z по аргументу x, а точка (x, y) называется ***точкой дифференцирования***.

Из определения частных производных следует, что **для нахождения производной $z'_x(x, y)$ надо считать постоянной переменную *y*, а для нахождения $z'_y(x, y)$ – переменную *x*.**

При этом правила вычисления их остаются теми же, что и для функции одной переменной, и только требуется помнить по какой переменной ищется производная.

Из определения следует ***геометрический смысл*** частной производной функции двух переменных: *частная производная $z'_x(x_0, y_0)$ ($z'_y(x_0, y_0)$) – угловой коэффициент касательной к линии пересечения поверхности $z = f(x, y)$ и плоскости $y = y_0$ ($x = x_0$) в соответствующей точке.*

Физический смысл частной производной: $\frac{\partial z}{\partial x}(M)$ *– это скорость изменения функции в точке M в направлении оси Ox, а $\frac{\partial z}{\partial y}(M)$ – в направлении оси Oy.*

2. Полный дифференциал.

Полное приращение Δz функции z определяется равенством

$$\Delta z = f(x + \Delta x; y + \Delta y) - f(x; y). \tag{1}$$

Замечание. Полное приращение функции, вообще говоря, не равно сумме частных приращений: $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

Определение 2. Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x, y)$, если ее полное приращение в этой точке можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y, \tag{2}$$

где $\alpha = \alpha(\Delta x, \Delta y) \to 0$ и $\beta = \beta(\Delta x, \Delta y) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Сумма первых двух слагаемых в равенстве (2) представляет собой ***главную часть приращения функции.***

Определение 3. ***Полным дифференциалом (***или просто ***дифференциалом)*** функции $z = f(x, y)$ называется главная часть приращения функции, линейная относительно Δx и Δy. Обозначается символом dz:

$$dz = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y. \tag{3}$$

Для независимых переменных x и y полагают $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$. Поэтому равенство (3) можно представить в виде

$$dz = A \cdot dx + B \cdot dy. \tag{4}$$

Теорема 1. ***(необходимое условие дифференцируемости функции).*** Если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M(x, y)$, то она непрерывна в этой точке, имеет в ней частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем $\frac{\partial z}{\partial x} = A$, $\frac{\partial z}{\partial y} = B$.

Как следствие теоремы получаем формулу для вычисления полного дифференциала. Формула (4) принимает вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \tag{5}$$

Теорема 2 (достаточное условие дифференцируемости функции). Если функция $z = f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в точке $M(x, y)$, то она дифференцируема в этой точке и ее полный дифференциал выражается формулой (5).

Рассмотрим типичные примеры, для решения которых используются приведенные определения, теоремы и понятия:

Пример 1. Найти частные производные функций:

а) $z = 3x^2y^3 + x + y$; б) $z = x\ln y + \dfrac{y}{x}$; в) $z = x^y$.

Решение.

а) Чтобы найти частную производную по *x*, считаем *y* постоянной величиной. Таким образом, $z'_x = 3y^3(x^2)' + x' + y' = 3y^3 \cdot 2x + 1 + 0 = 6xy^3 + 1$. Аналогично, дифференцируя по *y*, считаем *x* постоянной величиной, т.е. $z'_y = 3x^2(y^3)' + x' + y' = 3x^2 \cdot 3y^2 + 0 + 1 = 9x^2y^2 + 1$.

б) Чтобы найти частную производную по *x*, считаем *y* постоянной величиной. Таким образом, $z'_x = \ln y \cdot (x)' + y\left(\dfrac{1}{x}\right)' = \ln y - \dfrac{y}{x^2}$. Аналогично, дифференцируя по *y*, считаем *x* постоянной величиной, т.е. $z'_y = x(\ln y)' + \dfrac{1}{x}y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{x}$.

в) При фиксированном *y* имеем степенную функцию от *x*. Таким образом, $z'_x = yx^{y-1}$. При фиксированном *x* функция является показательной относительно *y* и $z'_y = x^y \ln x$.

Пример 2. Показать, что функция $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 1.$$

Решение.

Находим

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{(при постоянных } y \text{ и } z\text{);}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{(при постоянных } x \text{ и } z\text{);}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad \text{(при постоянных } x \text{ и } y\text{).}$$

Возводим эти выражения в квадрат и подставляем в левую часть заданного уравнения:

$$\frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}+\frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}=1.$$

Получаем тождественное равенство, т.е. функция u удовлетворяет уравнению.

Пример 3. Поток пассажиров z выражается функцией $z=\dfrac{x^2}{y}$, где x – число жителей; y – расстояние между городами. Найти частные производные этой функции и пояснить их смысл.

Решение.

Производная $z'_x=\dfrac{2x}{y}$ показывает, что при одном и том же расстоянии между городами увеличение потока пассажиров пропорционально удвоенному числу жителей. Производная $z'_y=-\dfrac{x^2}{y^2}$ показывает, что при одной и той же численности жителей увеличение потока пассажиров обратно пропорционально квадрату расстояния между городами.

Пример 4. Пусть $z=2x^2y+3xy^2+x^3$ – производственная функция, где x – затраты живого труда, y – затраты овеществленного труда. Найти эластичность функции: $E_x(z)$ и $E_y(z)$ в точке $(1;1)$.

Решение.

Приближенный процентный прирост функции z, соответствующий приращению независимой переменой x на 1%,

$$E_x(z)=\frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

а приближенный процентный прирост функции z, соответствующий приращению независимой переменой y на 1%,

$$E_y(z)=\frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Найдем частные производные по x и по y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4xy + 3y^2 + 3x^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 + 6xy.$$

Тогда

$$E_x(z) = \frac{x(4xy + 3y^2 + 3x^2)}{2x^2 y + 3xy^2 + x^3}, \qquad E_y(z) = \frac{y(2x^2 + 6xy)}{2x^2 y + 3xy^2 + x^3}.$$

В заданной точке $E_x(z) = \frac{10}{6} \approx 0{,}67$, $E_y(z) = \frac{8}{6} \approx 1{,}33$. С увеличением затрат живого труда на 1% объем производства увеличится на 0,67%, а с увеличением затрат овеществленного труда на 1% объем производства увеличится на 1,33%.

Пример 5. Найти дифференциал функции $z = e^{x^2 y}$.

Решение.

1. Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 y} \cdot 2xy; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 y} \cdot x^2.$$

2. Используя формулу (5) получим выражение для дифференциала

$$dz = 2xye^{x^2 y} dx + x^2 e^{x^2 y} dy.$$

§ 3. Дифференцирование сложных и неявно заданных функций

1. Сложная функция.

Предположим, что в уравнении

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

x и y являются функциями независимых переменных u и v:

$$x = \varphi(u, v), \; y = \psi(u, v) \tag{2}$$

в этом случае z есть сложная функция от аргументов u и v.

Конечно, z можно выразить и непосредственно через u и v, а именно:

$$z = z(u,v) = f(\varphi(u,v),\psi(u,v)),\tag{3}$$

но в этом случае получаются сложные и громоздкие выражения.

Предположим, что функции $f(x,y)$, $\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные по всем своим аргументам и поставим задачу: вычислить $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, исходя из уравнений (1) и (2) и не пользуясь уравнением (3).

Дадим аргументу u приращение Δu, сохраняя значение v неизменным. Тогда в силу (2), x и y получат приращения $\Delta_u x$ и $\Delta_u y$.

Но если x и y получат приращения $\Delta_u x$ и $\Delta_u y$, то и функция $z = f(x,y)$ получит приращение Δz, определяемое формулой:

$$\Delta z = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta_u x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta_u y + \gamma_1 \Delta_u x + \gamma_2 \Delta_u y.$$

Разделим все члены этого равенства на Δu:

$$\frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\Delta_u y}{\Delta u} + \gamma_1 \frac{\Delta_u x}{\Delta u} + \gamma_2 \frac{\Delta_u y}{\Delta u}.$$

Если $\Delta u \to 0$, то $\Delta_u x \to 0$ и $\Delta_u y \to 0$ (в силу непрерывности функций *x* и *y).* Но тогда γ_1 и γ_2 тоже стремятся к нулю. Переходя к пределу при $\Delta u \to 0$, получим:

$$\lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta z}{\Delta u} = \frac{\partial z}{\partial u}; \qquad \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta_u x}{\Delta u} = \frac{\partial x}{\partial u}; \qquad \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta_u y}{\Delta u} = \frac{\partial y}{\partial u};\ \lim_{\Delta u \to 0}\gamma_1 = 0;\ \lim_{\Delta u \to 0}\gamma_2 = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}.\tag{4}$$

Если дать приращение Δv переменной v, а u оставить неизменным, то с помощью аналогичных рассуждений, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (4`)$$

Таким образом, *частная производная сложной функции по одной из независимых переменных равна сумме произведений ее частных производных по промежуточным аргументам на частные производные этих аргументов по независимой переменной.*

Замечание 1. Производные сложных функций, зависящих от большего числа аргументов, вычисляются по аналогичным правилам.

Например, если $w=F(z,u,v,s)$ есть функция четырех аргументов *z, u, v, s,* а каждый из них зависит от *x* и *y*, то формулы (4) и (4`) принимают вид

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial x},\\ \frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Пусть $z=f(x,y)$ – дифференцируемая функция своих переменных *x* и *y*, а *x* и *y* в свою очередь являются дифференцируемыми функциями от некоторого аргумента *t.* Тогда функция $z=z(t)=f(x(t),y(t))$, по сути дела, является функцией только одного переменного *t* и можно ставить вопрос о нахождении производной $\frac{dz}{dt}$.

Эта производная вычисляется по формуле (4):

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t};$$

но так как *x* и *y* - функции только одного переменного, то частные производные обращаются в обыкновенные; поэтому

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (6)$$

Предположим, в частности, что роль независимой переменной играет *x*, т.е рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, где $y = \psi(x)$. Тогда формула для вычисления производной, согласно (6) и учитывая, что $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, имеет вид:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \qquad (7)$$

Производная, вычисленная по формуле (7) называется ***полной производной*** функции.

В случае, когда $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(y)$, аналогично получаем:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dy} + \frac{\partial z}{\partial y}.$$

2. Неявно заданная функция одной переменной.

Функция *y* называется ***неявно заданной функцией*** от *x*, если она задана уравнением

$$F(x, y) = 0, \qquad (8)$$

не разрешенным относительно *y*. Это значит, что при каждом значении $x = x_0$ при котором неявно заданная функция определена, она принимает такое значение y_0, для которого $F(x_0, y_0) = 0$.

Если $F(x, y)$ – дифференцируемая функция переменных *x* и *y* и $F'_y(x, y) \neq 0$, то определяемая уравнением (8) неявная функция имеет производную, которая вычисляется по формуле

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}. \qquad (9)$$

Замечание 2. Последующие производные неявно заданной функции находятся последовательным дифференцированием равенства (9), при этом учитывается, что *y* есть функция от *x*.

3. Неявно заданная функция двух переменных.

Функция z называется ***неявно заданной функцией*** от x и y, если она задана уравнением

$$F(x, y, z) = 0, \qquad (10)$$

не разрешенным относительно z. Это значит, что при каждых значениях аргументов $x = x_0$ и $y = y_0$ из области определения неявно заданной функции, она принимает такое значение z_0, для которого $F(x_0, y_0, z_0) = 0$.

Если $F(x, y, z)$ – дифференцируемая функция трех переменных x, y, z и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то определяемая уравнением (10) неявно заданная функция также дифференцируема, и ее частные производные находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y(x, y, z)}{F'_z(x, y, z)}. \qquad (11)$$

Рассмотрим типичные примеры, для решения которых используются приведенные понятия и формулы:

Пример 1. Найти $\frac{dz}{dt}$, если $z = x^2 + y^2 + xy$, $x = a\sin t$, $y = a\cos t$.

Решение. Применим формулу (6):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y + x, \qquad \frac{dx}{dt} = a\cos t, \qquad \frac{dy}{dt} = -a\sin t.$$

Составим соответствующую сумму произведений

$$\frac{dz}{dt} = (2x + y)a\cos t + (2y + x)(-a\sin t).$$

Учитывая, что $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, получим: $\frac{dz}{dt} = a^2\cos 2t$.

Пример 2. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если $z = x^2 + \sqrt{y}$, где $y = \sin x$.

Решение. Имеем: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$.

Для нахождения полной производной $\frac{dz}{dx}$ используем формулу (7):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \cos x,$$

получим: $\frac{dz}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}\cos x$,

или, учитывая, что $y = \sin x$

$$\frac{dz}{dx} = 2x + \frac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x.$$

Пример 3. Найти частные производные сложной функции $z = x^2 \ln y$,

где $x = \frac{u}{v}$, $y = uv$.

Решение. Находим сначала частные производные данных функций:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\ln y, \; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2}{y}, \; \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{v}, \; \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{u}{v^2}, \; \frac{\partial y}{\partial u} = v, \; \frac{\partial y}{\partial v} = u.$$

По формуле (4) находим производные от сложной функции $z(u,v)$:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x\ln y \cdot \frac{1}{v} + \frac{x^2}{y}v = 2\frac{u}{v}\ln(uv)\cdot\frac{1}{v} + \frac{u^2}{v^2}\cdot\frac{1}{uv}\cdot v = \frac{u}{v^2}\left[2\ln(uv)+1\right];$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x\ln y \cdot \left(-\frac{u}{v^2}\right) + \frac{x^2}{y}u = -2\frac{u}{v}\ln(uv)\cdot\frac{u}{v^2} + \frac{u^2}{v^2}\cdot\frac{1}{uv}\cdot u = \frac{u^2}{v^3}\left[-2\ln(uv)+1\right].$$

Пример 4. Функция $y(x)$ задана уравнением $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Решение. В данном случае $F(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, поэтому

$$F_x' = \frac{2x}{a^2}, \qquad F_y' = \frac{2y}{b^2};$$

Следовательно,

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x'}{F_y'}=-\frac{\frac{2x}{a^2}}{\frac{2y}{b^2}}=-\frac{b^2x}{a^2y}.$$

Считая в этом равенстве y функцией от x и дифференцируя его, найдем вторую производную неявной функции:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{(b^2x)'(a^2y)-(b^2x)(a^2y)'}{(a^2y)^2}=-\frac{b^2a^2y-b^2xa^2\frac{dy}{dx}}{(a^2y)^2}.$$

Используя уже найденное выражение для первой производной, получим:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2a^2y-b^2xa^2\left(-\frac{b^2x}{a^2y}\right)}{(a^2y)^2}=-\frac{b^2a^2y^2+b^4x^2}{a^4y^3}=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3},$$

далее, учитывая, что $a^2y^2+b^2x^2=a^2b^2$, имеем:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^2a^2b^2}{a^4y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$$

Ответ: $\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{b^2x}{a^2y}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{b^4}{a^2y^3}.$

Пример 5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x^2+y^2+z^2-2xz=1$.

Решение. В данном случае $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2xz-1$,

поэтому

$$F_x'=2x-2z,\qquad F_y'=2y,\qquad F_z'=2z-2x.$$

Следовательно, по формуле (11),

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{2x-2z}{2z-2x}=1,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2y}{2z-2x}=\frac{y}{x-z}.$$

§ 4 . Частные производные и дифференциалы высших порядков

1. Частные производные высших порядков. Частные производные функции нескольких переменных $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ сами являются функциями этих переменных и могут иметь частные производные. Для исходной функции эти последние производные будут ***частными производными второго порядка***. Так, для функции $z = f(x, y)$ двух независимых переменных можно определить (предполагается, что все производные существуют) четыре частные производные второго порядка, которые обозначаются символами

$$z''_{x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad z''_{y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Определение 1. Частная производная второго или более высокого порядка, взятая по различным переменным, называется ***смешанной частной производной.*** Таковыми являются, например, z''_{xy}, $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$.

Теорема *(Шварц)* . Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка, отличающиеся лишь порядком дифференцирования, равны между собой.

В частности, для $z = f(x, y)$ имеем: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

2. Дифференциалы высших порядков. Так как $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ по предположению имеют непрерывные частные производные первого порядка, то от функции dz, в свою очередь, можно взять полный дифференциал $d(dz)$. Так получим ***полный дифференциал второго порядка (***или, кратко, ***второй дифференциал)***, который обозначается $d^2 z$.

$$d^2z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dxdy+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2.$$

Символически это записывается так:

$$d^2z=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2\cdot z.$$

Аналогично, потребовав существование непрерывных частных производных третьего, четвертого, $n-го$ порядков, можно получить полные дифференциалы третьего, четвертого, $n-го$ порядков.

$$d^3z=d(d^2z)=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3\cdot z,\quad d^nz=\left(\frac{\partial}{\partial x}dx+\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n\cdot z,\qquad n\in N.$$

Рассмотрим типичные примеры, для решения которых используются приведенные определения и понятия:

Пример 1. Найти частные производные второго порядка функции $z=e^{x-2y}$:

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{x-2y},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-2e^{x-2y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^{x-2y},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4e^{x-2y},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-2e^{x-2y},\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2e^{x-2y}.$$

Пример 2. Вычислить $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ и $\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$, если $z=y^2e^x+x^2y^3+1$.

Решение. Последовательно находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y^2e^x+2xy^3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^2e^x+2y^3,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=2ye^x+6y^2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2ye^x+3x^2y^2,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=2ye^x+6xy^2,\ \frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=2ye^x+6y^2.$$

Пример 3. Показать, что функция $z=\ln\left(x^2+y^2\right)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Решение. Находим сначала первые производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)_x' = \frac{1}{x^2 + y^2}\left(x^2 + y^2\right)_x' = \frac{2x}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \left(\ln\left(x^2 + y^2\right)\right)_y' = \frac{1}{x^2 + y^2}\left(x^2 + y^2\right)_y' = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

Находим производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)_x' = 2\frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)_y' = 2\frac{x^2 + y^2 - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Подставив найденные значения в заданное уравнение, получим

$$\frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

$0 \equiv 0$, что и требовалось показать.

Пример 4. Найти дифференциал второго порядка функции

$$z = 3x^2 y - 2xy + y^2 - 1.$$

Решение. Находим первые и вторые частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6xy - 2y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 - 2x + 2y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6x - 2, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2.$$

Следовательно,

$$d^2 z = 6y dx^2 + 2(6x - 2)dxdy + 2dy^2.$$

Глава II. ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Многие задачи – как из области математики, так и из других областей науки и техники – приводят к вопросу о нахождении максимального или минимального, наибольшего или наименьшего значений некоторых функций, зависящих от одного и более переменных. Примерами служат задачи вида:

- При переноске труб по двум коридорам, пересекающимся под прямым углом, найти наибольший размер трубы, которую можно пронести по коридорам. Ширина обоих коридоров известна.
- Определить размеры прямоугольного бассейна данного объема V так, чтобы на облицовку его поверхности потребовалось наименьшее количество материала.
- Производственная функция (в денежном выражении) имеет вид $K(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, где x, y - количество единиц соответственно первого и второго ресурса. Известна стоимость единицы первого и второго ресурсов. Найти максимальную прибыль при использовании этих ресурсов.

Во многих задачах требуется исследовать функцию на экстремум в случае, когда переменные функции не являются независимыми, а связаны друг с другом некоторыми добавочными условиями, которые служат ограничениями на их использование. В этом случае возникает специфическая задача для функций нескольких переменных на условный экстремум. Например,

- Из данного куска жести заданной площади надо сделать гараж в форме параллелепипеда, имеющую наибольшую вместимость.
- Производственная функция $\pi(x, y) = 30\sqrt{x}\sqrt[3]{y}$, стоимость единицы первого ресурса равна 5, второго – 10 ден. ед. В силу бюджетных ограничений на ресурсы может быть потрачено не более 600 ден. ед. В этих условиях найти оптимальное для производителя значение (x, y) количества используемых ресурсов.

Необходимость решения подобного рода задач требует введения понятий локальных экстремумов, условных экстремумов, глобальных экстремумов и методов их нахождения.

§ 1. Локальные экстремумы функций двух переменных

Определение 1. Точка $M(x_0, y_0)$ называется ***точкой максимума*** функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$.

Определение 2. Точка $M(x_0, y_0)$ называется ***точкой минимума*** функции $z = f(x, y)$, если существует окрестность точки M такая, что для всех точек (x, y) из этой окрестности выполняется неравенство $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$.

Максимумы и минимумы функции называются ***локальными экстремумами,*** а $M(x_0, y_0)$ - ***точкой локального экстремума.***

Замечание 1. В силу определения, точка экстремума функции лежит внутри области определения функции; максимум и минимум имеют ***локальный*** (местный) характер: значение функции в точке (x_0, y_0) сравнивается с ее значением в точках, достаточно близких к (x_0, y_0). В области определения функция может иметь несколько экстремумов или не иметь ни одного.

Сформулируем ***необходимое*** условие экстремума функции.

Теорема 1 *(необходимое условие экстремума).* Пусть дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M(x_0, y_0)$ экстремум. Тогда частные производные первого порядка $\dfrac{\partial z(M)}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z(M)}{\partial y}$ в этой точке равны нулю.

Точки, в которых выполнены необходимые условия экстремума функции $z = f(x, y)$, т.е. частные производные первого порядка обращаются в нуль (или не существуют), называются ***критическими*** или

стационарными. Еще их называют точками «подозрительными на экстремум»

Замечание 2. Равенство нулю частных производных выражает ***лишь необходимое***, но ***недостаточное*** условие существования экстремума функции нескольких переменных.

Поэтому требуются еще достаточные условия существования экстремума.

Теорема 2 ***(достаточные условия существования экстремума).*** Пусть функция $z = f(x, y)$: **а)** определена в некоторой окрестности критической точки (x_0, y_0) в которой $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$ и $\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$; **б)** имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x^2} = A$, $\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial x \partial y} = B$, $\frac{\partial^2 z(x_0, y_0)}{\partial y^2} = C$. Тогда, если

1. $\Delta = AC - B^2 > 0$, то в точке (x_0, y_0) функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, причем если $A < 0$ - максимум, если $A > 0$ - минимум;

2. $\Delta = AC - B^2 < 0$, то функция $z = f(x, y)$ экстремума не имеет;

3. $\Delta = AC - B^2 = 0$, то вопрос о наличии экстремума остается открытым.

Исследование функции двух переменных на локальный экстремум проводится по следующему ***алгоритму:***

1. Найти частные производные функции $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ и приравнять их к нулю:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases}.$$

2. Решить полученную систему уравнений и найти критические точки функции.

3. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

4. Вычислить значения частных производных второго порядка в каждой критической точке.

5. С помощью достаточных условий сделать вывод о наличии экстремумов.

6. Найти экстремумы, т.е. экстремальные значения функции.

Рассмотрим типичные примеры для решения которых используются приведенные понятия, определения и теоремы:

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Решение.

1. Находим частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

Приравнивая их к нулю, получим, $3x^2 - 3y = 0$, $3y^2 - 3x = 0$.

2. Решаем систему $\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ \left(x^2\right)^2 - x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} y = x^2, \\ x\left(x^3 - 1\right) = 0 \end{cases}$ из последней системы, получим $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x^2, \\ x^3 - 1 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1, \\ x = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$

Следовательно, критические точки: $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

3. Находим частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3.$$

4. Вычисляем значения этих производных в каждой критической точке:

1) $M_1(0;0)$: $A_1 = 6 \cdot 0 = 0$; $B_1 = -3$; $C_1 = 6 \cdot 0 = 0$.

2) $M_2(1;1)$: $A_2 = 6 \cdot 1 = 6$; $B_2 = -3$; $C_2 = 6 \cdot 1 = 6$.

5. Проверяем в каждой точке выполнение достаточного условия

1) $\Delta_1 = A_1 C_1 - B_1^2 = 0 \cdot 0 - (-3)^2 = -9 < 0$ – экстремума нет.

2) $\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = 6 \cdot 6 - (-3)^2 = 36 - 9 = 27 > 0$ – экстремум есть, причем $A_2 = 6 > 0$, следовательно, в точке M_2 минимум.

6. Находим экстремальное значение функции $z_{\min} = 1^3 + 1^3 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -1$.

Ответ: $z_{\min} = -1$.

Пример 2. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3$.

Решение: Проведя исследование по той же схеме, получим:

1. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2$.

2. Решим систему $\begin{cases} 3x^2 = 0, \\ 3y^2 = 0 \end{cases}$, которая имеет единственное решение $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$.

Следовательно, критическая точка $M_1(0;0)$.

3. Находим частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \ C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y, \ B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

4. Значения частных производных в критической точке равны: $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$.

5. Проверим выполнение достаточного условия $\Delta = AC - B^2 = 0$, следовательно, вопрос о наличии экстремума открыт.

Проанализируем данную функцию $z = x^3 + y^3$:

1) в критической точке $M_1(0;0)$ $z = 0$;

2) в любой окрестности этой точки она принимает значения разных знаков.

Очевидно, что экстремума в точке $M_1(0;0)$ данная функция не имеет.

Ответ: экстремума нет.

Пример 3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2$.

Решение: Проведя исследование аналогично предыдущему примеру, получим, что данная функция имеет критическую точку $M_1(0;0)$ и достаточные условия дают $\Delta = 0$.

Проанализируем данную функцию $z = x^2 + y^2$:

1) в критической точке $M_1(0;0)$ $z = 0$;
2) в любой окрестности этой точки она принимает положительные значения.

Очевидно, что в точке $M_1(0;0)$ данная функция имеет минимум.

Ответ: $z_{\min} = 0$.

Пример 4. Производится два вида продукции в количествах x и y соответственно. Цена продукции $P_1 = 8$, $P_2 = 10$. Найти максимум прибыли, если функция затрат имеет вид: $C = x^2 + xy + y^2$.

Решение. Составим функцию прибыли

$$\Pi(x,y) = P_1 x + P_2 y - S(x,y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2.$$

Исследуем полученную функцию двух переменных на экстремум.

1. Находим частные производные:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 8 - 2x - y,\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} = 10 - x - 2y.$$

2. Составим систему $\begin{cases} 8 - 2x - y = 0, \\ 10 - x - 2y = 0. \end{cases}$

Данная система имеет единственное решение $(2;4)$.

3. Критическая точка $M(2;4)$.

4. Находим частные производные второго порядка:

$$A = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = -2,\ C = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial y^2} = -2,\ B = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x \partial y} = -1.$$

5. Значения частных производных в критической точке равны: $A=-2$, $B=-1$, $C=-2$.

6. Проверим выполнение достаточного условия $\Delta = AC - B^2 = (-2)(-2)-(-1)^2 = 4-1 = 3 > 0$, следовательно экстремум есть, так как $A=-2<0$, то точка критическая точка $M(2;4)$ является точкой максимума.

7. Находим экстремальное значение функции прибыли $\Pi_{\max} = 8\cdot 2 + 10\cdot 4 - 2^2 - 2\cdot 4 - 4^2 = 16+40-4-8-16 = 28$.

Ответ: $\Pi_{\max} = 28$.

§ 2. Условные экстремумы функций двух переменных

Рассмотрим задачу, специфическую для функций нескольких переменных, когда ее экстремум ищется не на всей области определения, а на множестве, удовлетворяющем некоторому условию.

Пусть имеется функция $z=f(x,y)$, аргументы x и y которой удовлетворяют условию $g(x,y)=C$, называемому ***уравнением связи.***

Определение 1. Точка (x_0,y_0) называется ***точкой условного максимума или минимума***, если существует такая ее окрестность, что для всех точек (x,y) из этой окрестности, удовлетворяющих условию $g(x,y)=C$, выполняется неравенство $f(x_0,y_0)\ge f(x,y)$ или $f(x_0,y_0)\le f(x,y)$.

Наиболее простым способом нахождения условного экстремума функции двух переменных является сведение задачи к отысканию экстремума функции одной переменной. Допустим, уравнение связи $g(x,y)=C$ удалось разрешить относительно одной из переменных, например выразить y через x, т.е $y=\varphi(x)$. Подставив полученное выражение в функцию двух переменных, получим $z=f(x,y)=f(x,\varphi(x))$, т.е. функцию одной переменной. Ее экстремум и будет условным экстремумом функции $z=f(x,y)$.

Для отыскания условного экстремума в общем случае используется ***метод множителей Лагранжа.***

Рассмотрим функцию трех переменных

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\left[g(x,y)-C\right].$$

Эта функция называется ***функцией Лагранжа***, а λ - ***множителем (коэффициентом) Лагранжа.*** Доказывается следующая теорема:

Теорема 1. Если точка (x_0,y_0) является точкой условного экстремума функции $z=f(x,y)$ при условии $g(x,y)=C$, то существует значение λ_0 такое, что точка (x_0,y_0,λ_0) является точкой экстремума функции $F(x,y,\lambda)$.

Таким образом, **для нахождения условного экстремума функции** $z=f(x,y)$ при условии $g(x,y)=C$ требуется найти решение следующей системы:

$$\begin{cases} F'_x=f'_x(x,y)+\lambda g'_x(x,y)=0,\\ F'_y=f'_y(x,y)+\lambda g'_y(x,y)=0,\\ F'_\lambda=g(x,y)-C=0. \end{cases}$$

Последнее из этих уравнений совпадает с уравнением связи. Данная система выражает ***необходимые условия Лагранжа условного экстремума.***

Из этой системы уравнений находят критические точки условного экстремума.

Определение 2. Точка (x_0,y_0,λ_0) называется ***критической точкой*** функции Лагранжа, если $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,\lambda_0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,\lambda_0)=0$, $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x_0,y_0,\lambda_0)=0$ (или не существуют).

Для исследования критических точек на экстремум вычисляем в полученных точках значения $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ и составляем определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y\\ g'_x & F''_{xx} & F''_{xy}\\ g'_y & F''_{xy} & F''_{yy}\end{vmatrix}.$$

Тогда ***достаточные условия условного экстремума*** запишутся в следующем виде:

1. Если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) условный минимум;
2. если $\Delta > 0$ - то условный максимум.

Исследование функции на условный экстремум с помощью метода множителей Лагранжа проводится по следующему ***алгоритму***:

1. Составить функцию Лагранжа
$$F(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\left[g(x, y) - C\right].$$
2. Найти частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial \lambda}$ и приравнять их к нулю, т.е. составить необходимые условия экстремума функции Лагранжа.
3. Решить систему уравнений
$$\begin{cases} F_x^{/} = 0, \\ F_y^{/} = 0, \\ F_\lambda^{/} = 0 \end{cases}$$
и найти критические точки.
4. Найти частные производные:
$$\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$
5. Вычислить значения найденных частных производных в каждой критической точке.
6. Из найденных значений составить определитель Δ.
7. С помощью достаточных условий сделать вывод о характере экстремальной точки.
8. Найти значения функции в точках условного экстремума.

Геометрический смысл условий Лагранжа. Линия $g(x, y) = C$ пунктирная (рис.1), линии уровня $f(x, y) = Q$ функции $z = f(x, y)$ – сплошные. В точке условного экстремума линия уровня функции $z = f(x, y)$ касается линии $g(x, y) = C$.

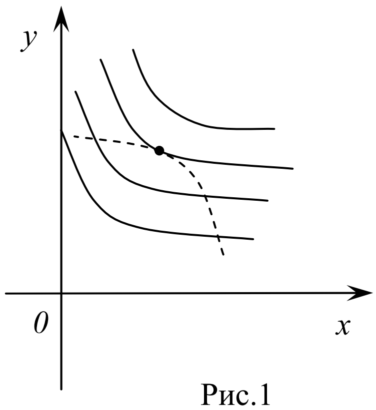


Рис.1

Рассмотрим типичные примеры для решения которых используются приведенные понятия, определения и теоремы:

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + 2y^2$ при условии $3x + 2y = 11$.

Решение. Из уравнения связи $3x + 2y = 11$ выразим переменную y через переменную x и подставим полученное выражение $y = \dfrac{11 - 3x}{2}$ в функцию z. Получим $z = x^2 + 2\left(\dfrac{11 - 3x}{2}\right)^2$ или $z = \dfrac{11}{2}\left(x^2 - 6x + 11\right)$. Эта функция одного переменного. Исследуем ее на экстремум:

1. **1.** Находим производную $z' = \dfrac{11}{2}(2x - 6) = 11x - 33$.
2. **2.** Приравняем производную к нулю, получим уравнение $11x - 33 = 0$, решением которого служит значение $x = 3$.
3. **3.** Находим вторую производную $z'' = 11$, так как ее значение в критической точке больше нуля, то по второму достаточному условию экстремума делаем вывод, что $x = 3$ – точка минимума функции $z = \dfrac{11}{2}\left(x^2 - 6x + 11\right)$.

При этом соответствующее значение функции $y = \dfrac{11 - 3 \cdot 3}{2} = 1$. Таким образом, $M(3;1)$ – точка условного экстремума (минимума) и $z(3;1) = 3^2 + 2 \cdot 1^2 = 9 + 2 = 11$.

Ответ: $M(3;1)$ – точка условного минимума; $z(3;1) = 11$.

Пример 2. Найти экстремумы функции $z = 2x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

Решение. Используем метод множителей Лагранжа. Уравнение связи имеет вид:

$$g(x, y) = x^2 + y^2 = 5.$$

1. Составим функцию Лагранжа: $F(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda\left(x^2 + y^2 - 5\right)$;

2. Находим частные производные: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 2 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 1 + 2\lambda y$, $\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5$.

3. Приравняем частные производные к нулю, получим систему:

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda x = 0, \\ 1 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\lambda}, \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda}, \quad \Rightarrow \lambda = \pm\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} = 5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2; \quad y = -1; \quad \lambda = \dfrac{1}{2}, \\ x = 2; \quad y = 1; \quad \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Таким образом, получили две критические точки $M_0\left(-2; -1\right)$ при $\lambda_0 = \dfrac{1}{2}$ и $M_1\left(2; 1\right)$ при $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$.

4. Находим следующие производные: $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 2y$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$.

5. Вычисляем значения найденных частных производных в каждой критической точке:

1) $M_0(-2;-1)$ при $\lambda_0 = \frac{1}{2}$:

$$\frac{\partial g(M_0)}{\partial x} = -4;\ \frac{\partial g(M_0)}{\partial y} = -2;\ \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x^2} = 1,\ \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial y^2} = 1;\ \frac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x \partial y} = 0;$$

2) $M_1(2;1)$ при $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$:

$$\frac{\partial g(M_1)}{\partial x} = 4;\ \frac{\partial g(M_1)}{\partial y} = 2;\ \frac{\partial^2 F(M_1)}{\partial x^2} = -1,\ \frac{\partial^2 F(M_1)}{\partial y^2} = -1;\ \frac{\partial^2 F(M_1)}{\partial x \partial y} = 0.$$

6. Составляем из найденных значений определитель:

1) $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ g'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 16 = -20 < 0,$

2) $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ g'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 + 16 = 20 > 0.$

7. Проверяем в каждой точке выполнение достаточного условия. Так как $\Delta_1 < 0$, то в точке $M_0(-2;-1)$ условный минимум; а из того, что $\Delta_2 > 0$ делаем вывод, что в точке $M_1(2;1)$ условный максимум.

8. Вычисляем значения функции в критических точках: $z_{\min}(-2;-1) = -5$, $z_{\max}(-2;-1) = 5$.

Ответ: $M_1(2;1)$ при $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ - точка условного максимума, $z(M_1) = 5$;

$M_0(-2;-1)$ при $\lambda_0 = \frac{1}{2}$ – точка условного минимума, $z(M_0) = -5$.

Пример 3. Найти экстремумы функции $z = e^{x+2y}$ при условии, что $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Используем метод множителей Лагранжа.

1. Составим функцию Лагранжа: $F(x, y, \lambda) = e^{x+2y} + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$;

2. Находим частные производные: $\dfrac{\partial F}{\partial x} = e^{x+2y} + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2e^{x+2y} + 2\lambda y$,

$\dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1$.

3. Приравняем частные производные к нулю, получим систему:

$$\begin{cases} e^{x+2y} = -2\lambda x, \\ 2e^{x+2y} = -2\lambda y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений системы находим $y = 2x$; подставляем это выражение в третье уравнение, получаем два решения $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ и $x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $y = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Таким образом, получили две критические точки $M_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}; \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ при $\lambda_1 = -\dfrac{\sqrt{5}e^{\sqrt{5}}}{2}$ и $M_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}; -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ при $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2e^{\sqrt{5}}}$.

4. Находим следующие производные: $\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x$; $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 2y$;

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = e^{x+2y} + 2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 4e^{x+2y} + 2\lambda$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 2e^{x+2y}$.

5. Вычисляем значения найденных частных производных в каждой критической точке:

1) $M_1\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}; \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ при $\lambda_1 = -\dfrac{\sqrt{5}e^{\sqrt{5}}}{2}$:

$\dfrac{\partial g(M_1)}{\partial x} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{\partial g(M_1)}{\partial y} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{\partial^2 F(M_1)}{\partial x^2} = e^{\sqrt{5}}\left(1 - \sqrt{5}\right)$,

$\dfrac{\partial^2 F(M_1)}{\partial y^2} = e^{\sqrt{5}}\left(4 - \sqrt{5}\right)$; $\dfrac{\partial^2 F(M_1)}{\partial x \partial y} = 2e^{\sqrt{5}}$;

2) $M_2\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}}; -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$ при $\lambda_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2e^{\sqrt{5}}}$:

$$\frac{\partial g(M_2)}{\partial x}=-\frac{2}{\sqrt{5}}; \qquad \frac{\partial g(M_2)}{\partial y}=-\frac{4}{\sqrt{5}}; \quad \frac{\partial^2 F(M_2)}{\partial x^2}=\frac{1+\sqrt{5}}{e^{\sqrt{5}}},$$

$$\frac{\partial^2 F(M_2)}{\partial y^2}=\frac{4+\sqrt{5}}{e^{\sqrt{5}}}; \qquad \frac{\partial^2 F(M_{21})}{\partial x \partial y}=\frac{2}{e^{\sqrt{5}}}.$$

6. Составляем из найденных значений определитель:

$$1)\ \Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ g'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & e^{\sqrt{5}}\left(1-\sqrt{5}\right) & 2e^{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} & 2e^{\sqrt{5}} & e^{\sqrt{5}}\left(4-\sqrt{5}\right) \end{vmatrix}=4\sqrt{5}e^{\sqrt{5}}>0,$$

$$2)\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & F''_{xx} & F''_{xy} \\ g'_y & F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1+\sqrt{5}}{e^{\sqrt{5}}} & \frac{2}{e^{\sqrt{5}}} \\ -\frac{4}{\sqrt{5}} & \frac{2}{e^{\sqrt{5}}} & \frac{4+\sqrt{5}}{e^{\sqrt{5}}} \end{vmatrix}=-\frac{4\sqrt{5}}{e^{\sqrt{5}}}<0.$$

7. Проверяем в каждой точке выполнение достаточного условия. Так как $\Delta_1>0$, то в точке $M_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ условный максимум; а из того, что $\Delta_2<0$ делаем вывод, что в точке $M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ условный минимум.

8. Вычисляем значения функции в критических точках: $z_{\max}(M_1)=e^{\sqrt{5}}$, $z_{\min}(M_2)=\frac{1}{e^{\sqrt{5}}}$.

Ответ:

$M_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ при $\lambda_1=-\frac{\sqrt{5}e^{\sqrt{5}}}{2}$ - точка условного максимума, $z_{\max}(M_1)=e^{\sqrt{5}}$;

$M_2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}};-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ при $\lambda_2=\frac{\sqrt{5}}{2e^{\sqrt{5}}}$ – точка условного минимума, $z_{\min}(M_2)=\frac{1}{e^{\sqrt{5}}}$.

§ 3. Глобальные экстремумы функций двух переменных

Рассмотренные выше экстремумы функций по самому своему определению имели локальный характер: в точке экстремума M_0 функция принимает максимальное или минимальное значение среди всех ее значений в некоторой (быть может, очень малой) окрестности точки M_0. В ряде задач требуется найти ***глобальный экстремум***, т.е. наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в некоторой замкнутой, ограниченной области *D*.

Функция $z = f(x, y)$, непрерывная в некоторой ограниченной замкнутой области *D*, обязательно имеет в этой области наибольшее и наименьшее значения. Эти значения достигаются ею или в критических точках, лежащих внутри области *D*, или в точках, лежащих на границе области.

Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в некоторой замкнутой области *D*, надо найти все локальные минимумы и максимумы этой функции внутри исследуемой области, а также наибольшее и наименьшее ее значения на границе области, и затем выбрать среди всех этих значений наибольшее и наименьшее.

Локальные максимумы и минимумы дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ находятся, как указано в § 5. При этом, надо рассматривать только те критические точки, которые расположены внутри области *D*. Важно отметить, что нет необходимости вычислять вторые производные и использовать достаточные условия экстремума. Поскольку все экстремумы функции $z = f(x, y)$ находятся среди ее значений в критических точках, достаточно узнать значения функции *z* во всех критических точках и среди них выбрать наибольшее и наименьшее.

Как правило, граница области *D* разбивается на ряд участков, каждый их которых определяется уравнением вида

$$y = \psi(x) \quad (a \le x \le b), \text{ или } x = \varphi(y) \quad (c \le y \le d).$$

Поэтому вдоль такого участка границы функция $z = f(x, y)$ превращается в функцию только одного переменного x (или y)

$$z = f\big(x, \psi(x)\big) \qquad\qquad \text{(или } z = f\big(\varphi(y), y\big)\text{)}.$$

Таким образом, нахождение наименьшего и наибольшего значения функции $z = f(x, y)$ на границе области D сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения функции одной переменной.

Замечание. В общем случае граница области D задается параметрически:

$$x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t) \qquad \big(\alpha \le t \le \beta\big).$$

В этом случае функция $z = f(x, y)$ превращается вдоль границы в функцию параметра t

$$z = f\big(\varphi(t), \psi(t)\big) \qquad\qquad \big(\alpha \le t \le \beta\big).$$

Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции (глобального экстремума) в замкнутой области D проводится по следующему ***алгоритму:***

1. Найти все критические точки функции, принадлежащие области D.

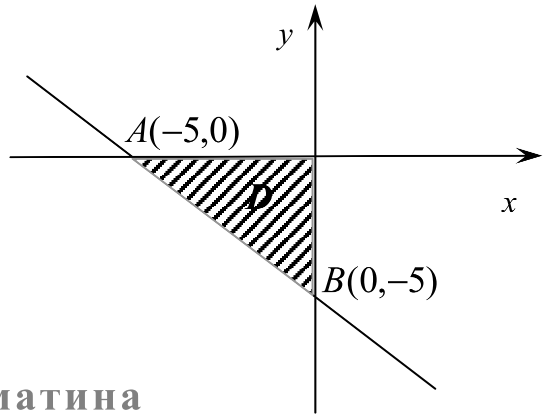
2. Вычислить значения функции во внутренних критических точках.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ на границе области, рассматривая ее на каждом участке границы, как функцию одной переменной.

4. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Рассмотрим типичные примеры, для решения которых используются приведенные определения и понятия:

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$ в замкнутой области D,



ограниченной линиями: $x + y + 5 = 0$ и осями координат.

Решение.

1) Для определения критических точек внутри области находим частные производные функции: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 3$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 4y + 2$.

Приравниваем их к нулю и решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

Получим $x = -2$; $y = -1$. Итак, имеется одна внутренняя критическая точка $M_1(-2,-1)$, принадлежащая заданной области *D*.

2) Определяем значение функции в этой точке: $z(M_1) = (-2)^2 - (-2)(-1) + 2(-1)^2 + 3(-2) + 2(-1) + 1 = -3$.

3) Переходим к исследованию функции на границах области, которая состоит из отрезков *OA, OB* и отрезка прямой *AB*.

а) На отрезке *OA* $y = 0$, а заданная функция принимает при $y = 0$ такой вид: $z = x^2 + 3x + 1 \quad (-5 \le x \le 0)$.

Эта функция – функция одного переменного, должна быть рассмотрена на отрезке $[-5,0]$ (см. рис). Так как на этом отрезке функция *z* непрерывна, то она достигает на нем как наибольшего, так и наименьшего своего значения. Это может произойти или в критических точках функции, лежащих внутри интервала, где $\frac{dz}{dx} = 0$, или на концах рассматриваемого отрезка.

Определим, прежде всего, критическую точку:

$$\frac{dz}{dx} = 2x + 3;\ 2x + 3 = 0;\ x = -\frac{3}{2}.$$

Определим значение функции при $x = -\frac{3}{2}$ и на концах отрезка $-5 \le x \le 0$:

$$z(-\frac{3}{2},0)=-\frac{5}{4}; \qquad z(-5,0)=11; \qquad z(0,0)=1.$$

Сравнение показывает, что $(z_{наиб})_{OA}=11$; $(z_{наим})_{OA}=-\frac{5}{4}$.

б) На отрезке *OB* $x=0$, а данная функция при $x=0$ принимает вид:

$$z=2y^2+2y+1 \ (-5\le y\le 0).$$

Полученная функция одного переменного должна быть рассмотрена на отрезке $[-5,0]$ (см. рис.) и в силу непрерывности на нем должны существовать наименьшее и наибольшее значения.

Определим прежде всего, критическую точку:

$$\frac{dz}{dy}=4y+2; \ 4y+2=0; \ y=-\frac{1}{2}.$$

Определим значение функции при $y=-\frac{1}{2}$ и на концах рассматриваемого отрезка:

$$z(0,-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}; \qquad z(0,-5)=41; \qquad z(0,0)=1.$$

Сравнение показывает, что $(z_{наиб})_{OB}=41$; $(z_{наим})_{OB}=\frac{1}{2}$.

в) Исследуем функцию на отрезке *AB,* принадлежащем границе области.

Уравнение *AB*: $x+y+5=0$. Поэтому не ней $y=-x-5$.

Подставляя это значение *y* в заданную функцию, получаем

$$z=4x^2+26x+41.$$

Наибольшее и наименьшее значения этой функции должны быть определены для значений $-5\le x\le 0$:

$$\frac{dz}{dx}=8x+26; \ 8x+26=0; \ x=-\frac{13}{4}.$$

Находим соответствующее значение *y*. Из $y=-x-5$ следует, что

$$y=-\left(-\frac{13}{4}\right)-5=\frac{13}{4}-5=-\frac{7}{4}.$$

Итак, рассмотрению подлежит точка $\left(-\frac{13}{4},-\frac{7}{4}\right)$, так как она лежит в исследуемой области.

Определим значение функции в найденной точка и на концах рассматриваемого отрезка:

$$z(-\frac{13}{4},-\frac{7}{4})=-\frac{5}{4}; \qquad z(0,-5)=41; \qquad z(-5,0)=11.$$

Сравним результаты и получим, что $(z_{наиб})_{AB}=41$; $(z_{наим})_{AB}=-\frac{5}{4}$.

4) Сравним значения функции z во внутренней критической точке M_1 с наибольшими и наименьшими значениями на границе, составленной из отрезков *OA, OB, AB*, найденными в пунктах а, б и в.

Видим, что в заданной замкнутой области

$$z_{наиб}=z(0,-5)=41;$$

$$z_{наим}=z(-2,-1)=-3.$$

Таким образом, оказалось, что наименьшего своего значения функция достигла во внутренней критической точке $M_1(-2,-1)$, а наибольшего – на границе области, в точке $B(0,-5)$.

Ответ: $z_{наиб}=z(0,-5)=41$, $z_{наим}=z(-2,-1)=-3$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x+y$ в круге $x^2+y^2\le 1$.

Решение.

1) Для определения критических точек внутри области находим частные производные функции: $\frac{\partial z}{\partial x}=1$; $\quad \frac{\partial z}{\partial y}=1$.

Так как $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=1\neq 0$, то критических точек функция не имеет.

Поэтому наибольшее и наименьшее значения она может принять только на границе области, т.е. на окружности $x^2 + y^2 = 1$

3) Исследуем функцию на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Параметрические уравнения этой окружности: $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

На окружности *z* становиться функцией от *t*:

$$z = z(t) = \cos t + \sin t.$$

Ищем критические точки этой функции:

$$z'(t) = -\sin t + \cos t; \; -\sin t + \cos t = 0; \; \sin t = \cos t,$$

отсюда $t_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $\quad t_2 = \dfrac{5\pi}{4}$;

в этих точках

$$z_1 = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \qquad x_1 = y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$z_2 = z\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{4} = -\sqrt{2}, \; x_2 = y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4) Сравнивая полученные значения, получим, что наибольшее значение $z_{наиб} = z(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$ и наименьшее значение $z_{наим} = z(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$ данная функция принимает в граничных точках.

Ответ: $z_{наиб} = z(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2}$, $z_{наим} = z(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) = -\sqrt{2}$.

§ 4. Экстремумы функции двух переменных в экономических задачах

Рассмотрим решение некоторых экономических задач на основе приведенного выше алгоритма

Задача 1. Фирма производит товары $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{Y}$ в количествах $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и продает их на совершенно конкурентных рынках по ценам $p_x = 6$, $p_y = 10$. Функция издержек фирмы имеет вид $TC = x^2 + 2xy + 2y^2 + 5$. Найти наибольшую возможную прибыль фирмы.

Решение.

Требуется определить глобальный максимум функции прибыли

$$PR = p_x x + p_y y - TC = 6x + 10y - x^2 - 2xy - 2y^2 - 5.$$

Для этого требуется найти наибольшее значение из всех локальных максимумов внутри области определения функции и на ее границах. Очевидно, что $D(PR)$: $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Необходимые условия максимума прибыли для совершенно конкурентной фирмы в данной задаче имеют вид

$$MC_x = p_x,\ MC_y = p_y.$$

Находим предельные издержки

$$MC_x = \frac{\partial TC}{\partial x} = 2x + 2y,\ MC_y = \frac{\partial TC}{\partial y} = 2x + 4y.$$

Получаем систему

$$\begin{cases} 2x + 2y = 6, \\ 2x + 4y = 10, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x = 1,\ y = 2.$$

Проверим, обеспечивают ли найденные значения $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ максимум прибыли; иначе говоря, проверим достаточное условие экстремума функции прибыли в критической точке $x = 1$, $y = 2$. Имеем

$$\frac{\partial^2 PR}{\partial x^2} = -2,\quad \frac{\partial^2 PR}{\partial x \partial y} = -2,\quad \frac{\partial^2 PR}{\partial y^2} = -4;$$

$$\Delta = \left(\left(\frac{\partial^2 PR}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 PR}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 PR}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \Bigg|_{x=1,\, y=2} = (-2)(-4) - (-2)^2 = 4 > 0,$$

следовательно экстремум есть;

$\left. \frac{\partial^2 PR}{\partial x^2} \right|_{x=1,\, y=2} = -2 < 0$ – в точке $x = 1$, $y = 2$ есть локальный максимум.

Значение прибыли в этой точке

$$PR_{\max} = 6 \cdot 1 + 10 \cdot 2 - 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 5 = 8.$$

Теперь исследуем функцию прибыли на границах ее области определения, т.е. при $x = 0$, $y = 0$, $x \to \infty$, $y \to \infty$.

$\underline{x = 0}$

Прибыль становится функцией одного аргумента и приобретает вид

$$PR^* = 10y - 2y^2 - 5.$$

Найдем критические точки этой функции:

$$\frac{\mathrm{d}PR^*}{\mathrm{d}y} = 10 - 4y,\ \frac{\mathrm{d}PR^*}{\mathrm{d}y} = 0,\ y = 2{,}5.$$

Значение функции прибыли в критической точке $y = 2{,}5$ и на концах области определения $y = 0$ и $y \to \infty$ равны

$$PR^*\big|_{y=2,5} = 7{,}5,\ PR^*\big|_{y=0} = -5,\ \lim_{y \to \infty} PR^* = -\infty.$$

Следовательно, глобальный максимум функции $PR^*_{\max} = 7{,}5$.

$\underline{y = 0}$

Функция прибыли приобретает вид

$$PR^{**} = 6x - x^2 - 5.$$

Поступая аналогично случаю $x = 0$, получаем

$$\frac{\mathrm{d}PR^{**}}{\mathrm{d}x} = 6 - 2x,\ \frac{\mathrm{d}PR^{**}}{\mathrm{d}x} = 0,\ x = 3,$$

$$PR^{**}\big|_{x=3} = 4,\ PR^{**}\big|_{x=0} = -5,\ \lim_{x \to \infty} PR^* = -\infty.$$

Глобальный максимум функции $PR^{**}_{\max} = 4$.

$$\underline{x \to \infty,\, y \to \infty}$$

При любом конечном y имеем

$$\lim_{x\to\infty} PR = -\infty$$

Аналогично, при любом конечном x

$$\lim_{y\to\infty} PR = -\infty\,.$$

Наибольшим значением функции прибыли на границах ее области определения является 7,5. Это меньше, чем внутренний локальный максимум функции, равный 8. Таким образом, наибольшее возможное значение прибыли совпадает с локальным максимум и равно 8.

Ответ: наибольшая возможная прибыль $PR_{\max} = 8$.

Задача 2. Функция издержек монополиста и функция спроса на его товар имеют вид соответственно $TC = \frac{2}{3}q\sqrt{q} + \frac{1}{3}$, $\quad q = \frac{4}{p^2}$,

Где p и q – объем выпуска (продаж) и цена товара. Найти наибольшую возможную прибыль монополиста. Как изменится эта прибыль, если он столкнется с конкуренцией и будет вынужден продавать товар по цене $p = 1$?

Решение.

Выражения для предельных издержек и эластичности спроса по цене имеют вид

$$MC = \frac{\mathrm{d}TC}{\mathrm{d}q} = \sqrt{q}\,, \qquad E = \frac{p}{q}\frac{\mathrm{dq}}{\mathrm{dp}} = \frac{p}{4/p^2}\left(-\frac{8}{p^3}\right) = -2\,.$$

Выражая из функции спроса цену через объем выпуска $p = 2/\sqrt{q}$, можно записать необходимое условие максимума прибыли при монополии:

$$p\left(1 + \frac{1}{E}\right) = MC\,.$$

Имеем

$$\sqrt{q} = \frac{2}{\sqrt{q}}\left(1 + \frac{1}{-2}\right), \;\; q = 1\,.$$

Функция прибыли

$$PR(q) = p(q)q - TC(q) = \frac{2}{\sqrt{q}}q - \frac{2}{3}q\sqrt{q} - \frac{1}{3} = 2\sqrt{q} - \frac{2}{3}q\sqrt{q} - \frac{1}{3}$$

при $q = 1$ принимает значения $PR = 2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 1$. Для того, чтобы убедиться, что это максимальное значение функции $PR(q)$, воспользуемся достаточным условием максимума функции одной переменной:

$$\frac{\mathrm{d}PR}{\mathrm{d}q} = \frac{1}{\sqrt{q}} - \sqrt{q}\,, \;\; \frac{\mathrm{d}^2 PR}{\mathrm{d}q^2} = -\frac{1}{2q\sqrt{q}} - \frac{1}{2\sqrt{q}}\,, \;\; \left.\frac{\mathrm{d}^2 PR}{\mathrm{d}q^2}\right|_{q=1} = -1 < 0 - \text{максимум.}$$

Таким образом, монополист получает наибольшую возможную прибыль $PR = 1$, производя $q = 1$ единиц продукции и продавая ее по цене $p = \frac{2}{\sqrt{1}} = 2$.

Если при конкуренции эта же фирма должна будет продавать свой товар по цене $p = 1$, то ее оптимальный объем выпуска определится равенством

$$MC(q) = p\,, \;\; \sqrt{q} = 1\,, \; q = 1\,,$$

То есть объем выпуска фирмы не изменится по сравнению с ситуацией ее монопольного положения, однако прибыль в данном случае будет равна

$$PR = \left.\left(pq - TC\right)\right|_{q=1} = 1 \cdot 1 - \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{3} = 0\,.$$

Итак, при конкуренции прибыль фирмы уменьшиться до нуля.

Ответ: наибольшая прибыль при монополии $PR_{\max} = 1$;

наибольшая прибыль при конкуренции $PR_{\max} = 0$.

§ 5. Метод наименьших квадратов

Так называется очень распространенный метод обработки наблюдений, экспериментальных и анкетных данных, в основе которого лежит теория экстремумов функций нескольких переменных.

Суть метода заключается в следующем: по данным статистических наблюдений найти функциональную зависимость $y = f(x)$, т.е. по возможности точнее и в аналитической форме отразить общую тенденцию зависимости y от x, исключив при этом случайные отклонении, связанные с неизбежными погрешностями измерений или статистических наблюдений.

Найденная зависимость позволит находить значения для промежуточных значений и, в том числе, делать прогнозы на будущее, отталкиваясь от данных статистических наблюдений.

Так, в экономической практике, возникает ряд задач следующего типа:

- пусть в ходе исследования покупательского спроса получена зависимость количества реализуемого товаров от цены товара, представленного в виде таблицы. Требуется по этим табличным данным определить кривую спроса, т.е. получить функциональную зависимость.
- Пусть прибыль предприятия за определенный период деятельности прослежена по годам и представлена в виде табличных данных. Требуется: 1) составить квадратичную зависимость деятельности по годам, как наиболее точную; 2) определить ожидаемую прибыль через 5 лет.
- В результате неоднократных исследований зависимости между сроком эксплуатации автомобиля и расходами на его ремонт получены определенные данные. Найти: 1) линейную зависимость стоимости ремонта автомобиля от срока эксплуатации; 2) предполагаемую величину затрат на ремонт за 5 –й год эксплуатации.

Формулы, служащие для аналитического представления опытных данных, получили название ***эмпирических формул***.

Задача нахождения эмпирических формул разбивается на два этапа. На первом этапе нужно установить ***вид зависимости*** $y = f(x)$, т.е. решить, является ли она линейной, квадратичной, логарифмической или какой-либо другой.

Предположим, например, что результаты экспериментальных исследований нанесены на плоскость (паре чисел (x_i, y_i) соответствует точка с такими же координатами). Разумеется, существует множество кривых, проходящих через эти точки (см. рис. 1).

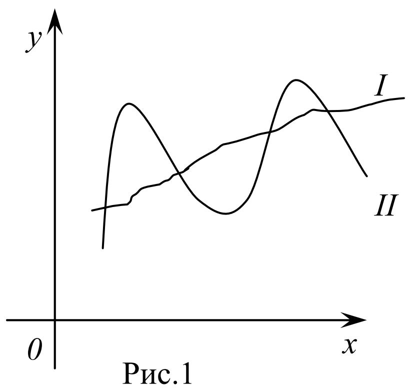


Рис.1

Обычно предполагают, что кривая истинной зависимости – это наиболее «гладкая» кривая, согласованная с эмпирическими данными. Так, в случае, представленном на рис.1, исследователь, несомненно, предпочтет кривую I кривой II.

Для проверки правильности вывода проводятся дополнительные исследования, т.е. проводится еще ряд одновременных измерений величин *x* и *y*. Дополнительные точки наносят на плоскость. Если они оказываются достаточно близкими к выбранной кривой, то можно считать, что вид кривой установлен. В противном случае кривую надо скорректировать и вновь провести дополнительные измерения.

Кроме того, для вывода функции $y = f(x)$ руководствуются другими соображениями, как правило, не математического характера (теоретическими предпосылками, опытом предшествующих исследований и т.п.).

Предположим, что первый этап завершен, т.е. вид функции $y = f(x)$ установлен. Тогда переходят ко второму этапу – ***определению неизвестных параметров этой функции.***

Согласно наиболее распространенному и теоретически обоснованному методу наименьших квадратов в качестве неизвестных параметров функции $f(x)$ выбирают такие значения, чтобы сумма квадратов *невязок* δ_i или отклонений «*теоретических*» *значений* $f(x_i)$, найденных по эмпирической формуле $y = f(x)$, от соответствующих *опытных значений* y_i, была минимальной (рис.2), т.е.

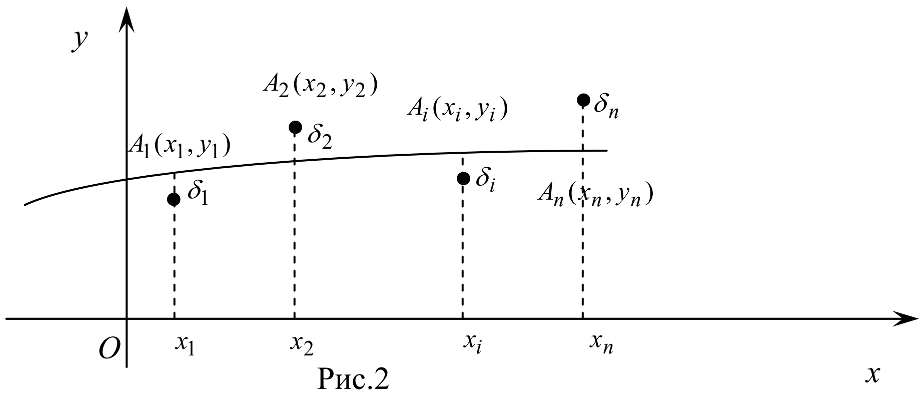


Рис.2

$$S = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i \right)^2 . \qquad (1)$$

1. Линейная аппроксимация

Пусть в качестве функции $y = f(x)$ взята ***линейная функция*** $y = ax + b$, и задача сводится к отысканию таких значений параметров *a* и *b,* при которых функция (1)

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b - y_i \right)^2$$

принимает наименьшее значение. Заметим, что функция $S = S(a,b)$ есть функция двух *переменных* a и b до тех пор, пока не найдены, а затем не зафиксированы их «наилучшие» (в смысле метода наименьших квадратов) значения, а x_i, y_i – *постоянные* числа, полученные экспериментально.

Исследуем функцию $S = S(a,b)$ на экстремум. Из необходимых условий экстремума получаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left(ax_i + b - y_i\right)x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2\left(ax_i + b - y_i\right) = 0. \end{cases}$$

После алгебраических преобразований эта система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{2}$$

Система (2) называется системой нормальных уравнений. Она имеет единственное решение, так как ее определитель

$$|A| = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \neq 0 .$$

Убедимся, что полученные из системы (2) значения дают минимум функции $S = S(a,b)$. Найдем частные производные

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = A; \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i = B; \qquad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n = C .$$

Выражение $\Delta = AC - B^2 = 4\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) > 0$ в силу изложенного выше и $A = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$, следовательно, согласно достаточному условию функция имеет единственную точку минимума, определяемую из системы нормальных уравнений (2). Заметим, что в этой точке функция $S = S(a,b)$ имеет не просто локальный минимум, а наименьшее значение (глобальный минимум).

2. Квадратичная аппроксимация

Если в качестве функции $f(x)$ при минимизации функции (1) выбрана ***квадратичная функция*** $y = ax^2 + bx + c$, то ее параметры находятся аналогично, исследуя на экстремум функцию

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(ax_i^{\ 2} + bx_i \ + c\right) - y_i\right]^2 .$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial s}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i^2 + bx_i \ + c - y_i\right)x_i^2 ,$$

$$\frac{\partial s}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i^2 + bx_i \ + c - y_i\right)x_i ,$$

$$\frac{\partial s}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i^2 + bx_i^1 + c - y_i\right).$$

Из необходимых условий экстремума функции $S = S(a,b,c)$ получаем систему *нормальных уравнений,* для определения коэффициентов ***квадратичной*** зависимости:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + cn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

3. Кубическая аппроксимация.

Если в качестве функции $f(x)$ при минимизации функции (1) выбрана ***кубическая функция*** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$**,** то ее параметры находятся аналогично, исследуя на экстремум функцию

$$S(a,b,c,d) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d \right) - y_i \right]^2 .$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial s}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i \right) x_i^3 ,$$

$$\frac{\partial s}{\partial b} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i \right) x_i^2 ,$$

$$\frac{\partial s}{\partial c} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i \right) x_i ,$$

$$\frac{\partial s}{\partial d} = \sum_{i=1}^{n} 2\left(ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d - y_i \right).$$

Из необходимых условий экстремума функции $S = S(a,b,c,d)$ получаем систему *нормальных уравнений,* для определения коэффициентов ***кубической*** зависимости:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^6 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^5 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + d\sum_{i=1}^{n} x_i^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i^3 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^5 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + d\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + d\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i + dn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Рассмотрим типичные примеры, для решения которых используются приведенные определения и понятия:

Пример 1. В результате исследования зависимости между сроком эксплуатации автомобиля и расходами на его ремонт получены следующие данные:

t, лет	1	2	3	4	5	6	7	8
S, тыс. руб.	120	140	230	370	445	570	655	770

Найти:

1. линейную зависимость стоимости ремонта автомобиля от срока эксплуатации;
2. предполагаемую величину затрат на ремонт за 10-й год эксплуатации.

Решение.

1) Найдем необходимые для расчетов суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

Промежуточные вычисления оформим в виде вспомогательной таблицы.

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1	120	120	1
2	2	140	280	4
3	3	230	690	9
4	4	370	1 480	16
5	5	445	2 225	25
6	6	570	3 420	36
7	7	655	4 585	49
8	8	770	6 160	64
$\sum$	36	3300	18 960	204

Система нормальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} 204a + 36b = 18960, \\ 36a + 8b = 3300. \end{cases}$$

Ее решение $a = \frac{685}{7}$, $b = -\frac{195}{7}$ дает искомую зависимость: $y = \frac{685}{7}x - \frac{195}{7}$.

2) При $x = 10$ получим $y(10) = \frac{6655}{7} \approx 950{,}7$.

Ответ: $y = \frac{685}{7}x - \frac{195}{7}$; $y(10) \approx 950{,}7$.

Пример 2. Имеются следующие данные о расходах на рекламу x (тыс. усл. ед.) и сбыте продукции y (тыс. ед.):

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1,6	4,0	7,4	12,0	18,0

Методом наименьших квадратов построить линейную зависимость и сравнить ее с квадратичной зависимостью.

Решение.

Найдем необходимые для расчетов суммы $\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^3$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^4$ $\sum_{i=1}^{n} y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$. Промежуточные вычисления оформим в виде вспомогательной таблицы.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i y_i$	$x_i^2 y_i$
1	1	1,6	1	1	1	1,6	1,6
2	2	4,0	4	8	16	8,0	16,0
3	3	7,4	9	27	81	22,2	66,6
4	4	12,0	16	64	256	48,0	192,0
5	5	18,0	25	125	625	90,0	450,0
$\sum$	15	43	55	225	979	169,8	726,2

Система нормальных уравнений в случае линейной зависимости имеет вид:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 169{,}8 \\ 15a + 5b = 43. \end{cases}$$

Ее решение $a = 4{,}08$, $b = -3{,}64$ дает *искомую зависимость:*

$$y = 4{,}08x - 3{,}64.$$

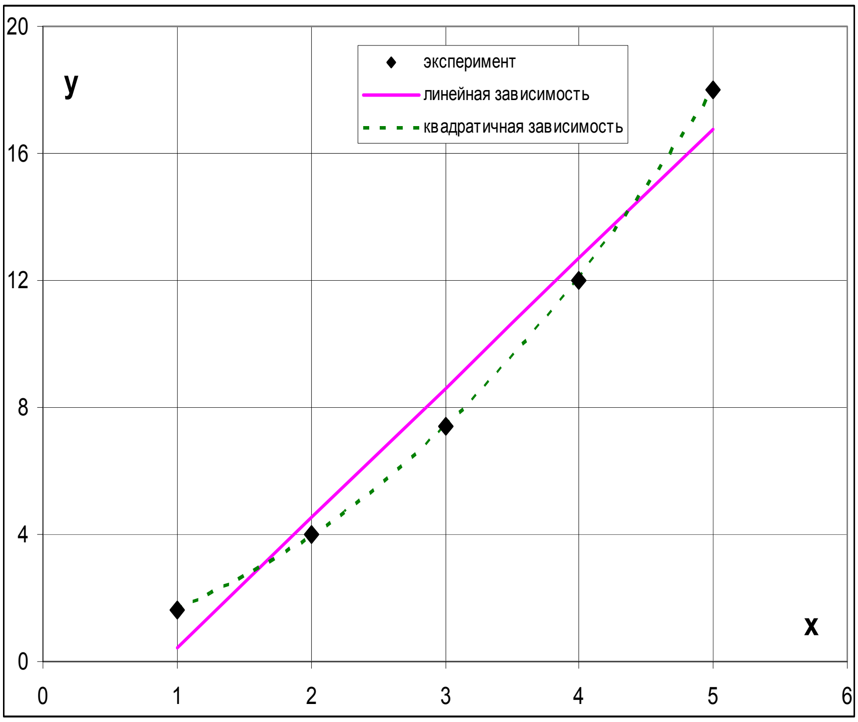
Система нормальных уравнений в случае квадратичной зависимости имеет вид:

$$\begin{cases} 979a + 225b + 55c = 726{,}2, \\ 225a + 55b + 15c = 169{,}8, \\ 55a + 15b + 5c = 43. \end{cases}$$

Ее решение $a = 0{,}6$, $b = 0{,}48$, $c = 0{,}56$ дает *искомую зависимость*:

$$y = 0{,}6x^2 + 0{,}48x + 0{,}56.$$

Сравним величины $S = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - y_i \right)^2$ для найденных линейной и квадратичной зависимостей. Для линейной зависимости $S = 5{,}056$, для квадратичной $S = 0{,}016$. Следовательно, квадратичная зависимость предпочтительнее. Данное утверждение также следует из графика, на котором нанесены начальные данные, построены линейная и квадратичная зависимости.



Глава III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ И ТЕСТОВ

§ 1. Задания для типовых расчетов по функциям двух переменных

ВАРИАНТ № 1

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных: $u = \dfrac{x^2}{y - 2z}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 2x^3 + 6xy^2 - 30x - 24y.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	1,0	1,5	2,0	3,0	3,2
y_i	8,1	9,0	11,2	13,8	14,7

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = \frac{x}{y}, \quad x = t + 1, \quad y = \ln(t + 1).$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

6. Найти указанные производные $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3$, $\quad \dfrac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции $z = xy$ при $2x + 3y - 5 = 0$.

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ в треугольнике $x = 0, \quad y = 0,\; 2x + 3y - 12 = 0$.

ВАРИАНТ № 2

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных: $u = xe^{yz}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^3 - y^3.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,3	0,5	0,8	1,1	2,3
y_i	1,4	0,7	-0,9	-2,3	-8,8

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = xy, \quad x = \frac{1}{t}, \quad y = t^2 + 1.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0.$$

6. Найти указанные производные $z = x^y$, $\quad \dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = x^2 + y^2 \text{ при } \frac{x}{4} + \frac{y}{9} = 1.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + 3y^2 + x - y$$

в треугольнике $x = 1, \quad y = 1, \; x + y = 1$.

ВАРИАНТ № 3

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных: $u = x^2 \sin\sqrt{y+z}$.

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 6x^2 y + 2y^3 - 24x - 30y.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,5	0,8	1,2	1,3	4,0
y_i	6,3	7,0	9,0	9,3	16,8

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = (1-x)^2 y^3, \quad x = \cos 2t, \quad y = \sin 3t.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$x + y - e^{xz} = 6.$$

6. Найти указанные производные $z = e^x(\cos y + x\sin y)$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = 6 - 4x - 3y \text{ при } x^2 + y^2 = 1.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^3 - 3xy + y^3$$

в прямоугольнике $0 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 3$.

ВАРИАНТ № 4

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = \ln\left(x^2 + y - 2z\right).$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^3 - 8y^3 - 6xy + 1.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	1,2	1,7	3,3	4,1	4,3
y_i	-3,1	-5,6	-17,1	-23,1	-24,8

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = \frac{xy + 1}{x - y}, \quad x = 5t + 4, \quad y = \frac{1}{t}.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$x^2 - zy^2 - e^{yz} = 0.$$

6. Найти указанные производные $z = y^x$, $\quad \dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = xy \text{ при } x + y = 3.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 - 2y^2 + 4xy - 6x - 1$$

в треугольнике $x = 0, \quad y = 0, \; x + y = 3$.

ВАРИАНТ № 5

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = \frac{x + y^2}{2z}.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^3 - xy^2 + 3x^2 + y^2 - 1.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,7	0,9	1,3	1,6	2,3
y_i	7,0	8,0	9,0	10,0	12,0

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = \sin\frac{y}{x}, \quad y = \arcsin^2 x + 1.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно: $\sin(xyz) + 5xz^2 = 0$.

6. Найти указанные производные $z = x^2 + 5xy + 6y^2x + 2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = x + 2y \text{ при } x^2 + y^2 = 5.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = xy - 2x - y$$

в прямоугольнике $0 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 4$.

ВАРИАНТ № 6

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = xye^z.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + 2x^2 + 3y^2 - 1.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-3,4	-3,2	-3,1	-2,5	-1,5
y_i	-13,9	-12,9	-12,2	-9,1	-4,2

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = \cos\frac{x}{y}, \quad y = \frac{\ln 3}{x}.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$z^2 = x\ln\frac{x + 2z}{y}.$$

6. Найти указанные производные $z = \dfrac{x + y^2}{y}, \quad \dfrac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = x^2 + 28x + 2y^2 \text{ при } x^2 + y^2 = 1.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 0{,}5x^2 - xy$$

в области $y = 0{,}5x^2$, $y = 3$.

ВАРИАНТ № 7

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = xz \cdot tg\sqrt{y}\ .$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^3 + 6xy + 3y^2 - 18x - 18y\ .$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	2,1	2,5	3,0	3,1	3,3
y_i	11,1	12,8	13,9	14,5	15,1

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = 5^{xy^2}, \quad y = \frac{x}{\log_5 x}.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно: $\cos\left(\dfrac{xy}{z}\right) = -4yz^2 + 5$.

6. Найти указанные производные $z = x^4 + 5x^2 y - 7xy^2 + 8,\quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = \cos^2 x + \sin^2 y \text{ при } y - x = \frac{\pi}{4}.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 2x - y + x^2 y$$

в квадрате $0 \le x \le 4, \quad 0 \le y \le 4$.

ВАРИАНТ № 8

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = x^{yz}.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^2 y - y^3 - x^2 - 3y^2 + 3.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,7	0,9	1,2	1,3	1,7
y_i	1,7	1,1	0,8	0,1	-0,5

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = 3^{\sin\left(x^2 - y^2\right)}, \quad x = uv, \quad y = \frac{u}{\ln v}.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$3^{xz^2} + \ln\left(x\sqrt{y}\right) = 3z - 1.$$

6. Найти указанные производные $z = \dfrac{xy}{x^2 + 3y}, \quad \dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4 \text{ при } x + y + 3 = 0.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

в прямоугольнике $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$.

ВАРИАНТ № 9

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = \frac{2x^2 + y}{z + x}.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 3x^2 - 6xy - y^3 - 12x + 12y.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-1,1	-0,5	0,2	0,4	0,7
y_i	2,1	3,4	5,1	6,3	6,9

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = e^{x^2 - 3y}, \quad x = u(5 - v)^2, \quad y = \ln\left(u^3 + v^2\right).$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$e^{z^2} - x^2 y^3 \ln z = 5y.$$

6. Найти указанные производные $z = x^3 + 4x^2 y - 2xy^2 - 15xy + 1, \quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad \text{при } 2y - 3x = 6.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

в треугольнике $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$.

ВАРИАНТ № 10

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = yze^{x^2}.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-1,2	-0,7	0,3	1,5	1,7
y_i	5,7	5,1	0,1	0,2	-0,7

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = 3^{5x-3y^2}, \quad x = \frac{u^2 + 3v}{v}, \quad y = \ln\left(u + 3v^2\right).$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$\sin(xyz) + 5xz^2 = \ln 3.$$

6. Найти указанные производные $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 - y + 1, \quad \dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = \frac{x - y - 4}{\sqrt{2}} \qquad \text{при } x^2 + y^2 = 1.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 2$$

в прямоугольнике $x = 0$, $x = 2$, $y = 1$, $y = -1$.

ВАРИАНТ № 11

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = xy\cos\sqrt{z}\,.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = x^2y - 2y^3 - x^2 - 5y^2\,.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	2,1	3,0	3,2	3,9	4,1
y_i	3,4	8,1	9,2	12,6	13,3

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = \sin\left(3x^2 - y^2\right), \quad x = 3arctgu + 5^v, \quad y = \frac{u + 4v^3}{v^2}\,.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$\cos(xy) - \log_2(xz) = (y - z)^2\,.$$

6. Найти указанные производные $z = e^{xy^2}$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = xy^2 \text{ при } x + 2y = 2\,.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2$$

в треугольнике $x = 1$, $y = 0$, $4x - 3y = 6$.

ВАРИАНТ № 12

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = x\ln(y+z).$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 2x^3 + y^2 + 6xy + 12x.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	1,7	1,9	2,3	2,5	3,5
y_i	0,1	-0,6	-2,0	-2,7	-5,3

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = e^{x^2-2y}, \quad x = \arcsin 2t, \quad y = 2t^3 - 4t.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$y^2 + \ln(x-z) - z^3 = 2^{xy}.$$

6. Найти указанные производные $z = \ln(x^2 + y^2)$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = 2x + y \qquad \text{при } x^2 - y^2 = 4.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 1$$

в треугольнике $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -5$.

ВАРИАНТ № 13

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = \frac{y^2}{x+z}.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 8x^3 - y^3 - 12xy - 1.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-0,1	0,2	0,5	0,9	1,2
y_i	-7,1	-6,2	-4,3	-2,7	-0,9

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = tg\frac{x}{y}, \quad x = (1-2t)^5, \quad y = \frac{3}{\sin t}.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$\cos(y^2) + \ln(x^2 - z^2) = z.$$

6. Найти указанные производные $z = e^{x^2 y}$, $\quad \dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad \text{при } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{4}.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$$

в прямоугольнике $x = -1$, $x = 1$, $y = -3$, $y = 4$.

ВАРИАНТ № 14

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = x^2 z e^y.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = 2x^3 + 16y^3 - 12x^2 y - 9x^2.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	-1,2	-1,1	-0,9	-0,5	0,1
y_i	8,7	8,1	7,8	6,4	4,5

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}, \quad x = u^2 v^3, \quad y = arctgv.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$e^{xyz^2} + 5x - \ln z + 3y = 5.$$

6. Найти указанные производные $z = y\cos x + x\sin y$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = \frac{x}{2} + \frac{y}{3} \qquad \text{при } x^2 + y^2 = 9.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 - y^2 + 8$$

в круге $x^2 + y^2 \le 4$.

ВАРИАНТ № 15

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = x\,arctg(yz).$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = -8x^3 + y^3 + 6xy^2 + 9y^2.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	3,2	3,8	4,7	5,1	5,4
y_i	10,5	12,3	14,9	16,4	16,9

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad x = \cos(uv), \quad y = u \sin v.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$x^3 + y^3 - e^{y^2+z^2} = 3tgz.$$

6. Найти указанные производные $z = \log_3\left(x^6 + y^2\right) + 5x^2y^4 + 1, \quad \dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = 2x^2 + y^2 \qquad \text{при } 2x + y = 4.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

в области $y = x^2$, $y = 4$.

ВАРИАНТ № 16

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = y^{zx^2}.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = e^{-\frac{x}{2}}(x^2 + y^2).$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	2,1	2,3	3,1	3,8	4,5
y_i	-9,3	-7,2	-13,4	-16,1	-18,9

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad x = R\cos t, \quad y = R\sin t.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$z^3 = xy^2 + arctg\frac{y}{x}.$$

6. Найти указанные производные $z = e^{x^2+y^2} - x - 1, \quad \dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = x^2 + 12xy + 2y^2 \qquad \text{при } 4x^2 + y^2 = 25.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^3 + y^3 - 9xy + 27$$

в квадрате $0 \le x \le 4$, $0 \le y \le 4$.

ВАРИАНТ № 17

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = \frac{x}{y^2 - 2z}.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = e^{-2x^2}(x - y^2).$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	1,1	2,1	3,4	4,3	4,9
y_i	-0,8	1,2	3,8	5,4	6,7

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = e^{x^2+y^2}, \quad x = a\cos u, \quad y = a\sin v.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$y^2 + 5 = \arcsin\frac{x}{z}.$$

6. Найти указанные производные $z = \ln\left(x^2 y + xy^2\right)$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = \frac{x}{4} + \frac{y}{6} \qquad \text{при } x^2 + y^2 = 4.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 3xy$$

в круге $x^2 + y^2 \le 2$.

ВАРИАНТ № 18

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = y^2 x e^z.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = e^{-\frac{y}{2}}(x^2 - y).$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	10,1	11,5	13,6	16,2	17,5
y_i	0,9	0,8	0,6	0,3	0,2

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = x^2 e^y, \quad x = \sin u, \quad y = \cos u.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$z = x + arctg\frac{y}{z - x}.$$

6. Найти указанные производные $z = e^x x \sin y + e^y y \cos x$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = 4xy \quad \text{при } 2x^2 + y^2 = 2.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = xy(4 - x - y)$$

в треугольнике $x = 1$, $y = 0$, $x + y = 6$.

ВАРИАНТ № 19

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = z \sin x \cos y .$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = e^{-2y^2}(x^2 + y) .$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	0,1	0,3	0,5	1,2	2,1
y_i	1,0	1,1	1,2	1,4	1,6

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = x^y, \quad x = \ln(u - v), \quad y = e^{\frac{u}{v}} .$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$xe^y + ye^x + ze^z = a .$$

6. Найти указанные производные $z = \dfrac{(x+1)^2}{y}, \quad \dfrac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = xy \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 = 8 .$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 - 3xy + y^2 - 4$$

в области $y = -x^2$, $y = -9$.

ВАРИАНТ № 20

1. Найти частные производные второго порядка функции многих переменных:

$$u = \frac{x + y}{\ln(z - x)}.$$

2. Найти экстремумы функции двух переменных:

$$z = -\frac{1}{2}x^2 + 8xy - y^3 - 13x - 12y.$$

3. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов

x_i	3,2	4,1	5,3	6,7	7,3
y_i	1,6	1,4	1,1	0,9	0,7

4. Найти полную или частные производные сложной функций:

$$z = x\sin y\cos t, \quad x = \ln(t^2 + 1), \quad y = -\sqrt{1 - t^2}.$$

5. Найти частные производные z'_x, y'_z, x'_y от функции, заданной неявно:

$$x\sin y + y\cos z + z tgx = 5.$$

6. Найти указанные производные $z = \ln\left(x^3 + y\right)$, $\dfrac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = ?$

7. Найти условные экстремумы функции

$$z = x^3 + y^3 \quad \text{при } x + y = 2.$$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = -x^2 + 4xy - 34y^2 + 4x - 1$$

в треугольнике $x = -1$, $y = -1$, $x + y = -4$.

§ 2. Задания *для тестирования по функциям двух переменных*

Вариант 1

1. ***Найти область определения функции***

$$z = \frac{2x+3y-1}{x-y} + \ln(x-y)$$

Ответы:

а) $x \ge 0$; $y \ge 0$;

б) $x > y$;

в) $x \ne y$;

г) $x \ge \dfrac{1-3y}{2}$.

2. ***Дана функция*** $z = x\ln\dfrac{y}{x}$***. Чему равно выражение*** $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ***в точке*** $(1,e)$***?***

Ответы:

а) 1;

б) $\dfrac{e+1}{e}$;

в) 3;

г) 0.

3. ***Исследовать на экстремум функцию:*** $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 10$

Ответы:

а) $z_{\min}(-4;1) = -11$;

б) $z_{\max}(-4;1) = -11$;

в) экстремума нет;

г) нет верного ответа.

4. ***Найти наибольшее и наименьшее значения функции*** $z = x^2 + 4xy - 2y^2 - 6x - 1$ ***в треугольнике*** $x = 0$, $y = 0$, $x + y = 3$**.**

Ответы:

а) $z_{наиб} = -2{,}8$, $z_{наим} = -4$;

б) $z_{наиб} = -1$, $z_{наим} = -19$;

в) нет верного ответа;

г) $z_{наиб} = -1$, $z_{наим} = -10$.

5. ***Найти*** $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ ***для функции*** $z = x^2y - y^2x$***, если*** $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \end{cases}$

Ответы:

а) $3u^2\sin v\cos v(\cos v - \sin v)$;

б) $u^2\sin v\cos v(\cos v - \sin v)$;

в) $-u^2\cos 2v(\cos v + \sin v)$;

г) $u^2\cos 2v(u\cos v + \sin v)$.

Вариант 2

1. Найти область определения функции

$z = \ln x + \ln y + \sqrt{x^2 + y^2 + 4}$

Ответы:

а) $x \ge 0$; $y \ge 0$;

б) $x > 0$; $y > 0$ и $x < 0$; $y < 0$;

в) $x > 0$; $y > 0$;

г) $x < 0$; $y < 0$.

2. Дана функция $z = \dfrac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$***. Чему равно выражение*** $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ***в точке*** $(1,1)$***?***

Ответы:

а) $-\dfrac{5}{2}$,

б) $\dfrac{10}{3}$,

в) $\dfrac{5}{2}$,

г) $\dfrac{15}{2}$.

3. Исследовать на экстремум функцию: $z = 2xy - 4x - 2y$

Ответы:

а) $z_{\min}(-2;0) = -2/e$;

б) нет верного ответа;

в) экстремума нет;

г) $z_{\max}(-2;0) = -2/e$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - 6x - 2y^2 + 3$ ***в треугольнике*** $x = 0,\quad y = 0,\quad x - y = 4$**.**

Ответы:

а) $z_{наиб} = 3$, $z_{наим} = -30$;

б) $z_{наиб} = 3$, $z_{наим} = -29$;

в) нет верного ответа;

г) $z_{наиб} = -3$, $z_{наим} = -29$.

5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ***для функции*** $z = arctg\dfrac{u}{v}$***, если*** $\begin{cases} u = x\sin y \\ v = x\cos y \end{cases}$

Ответы:

а) 0;

б) $\dfrac{\sin 2y}{2x} - \dfrac{\cos y}{x^2}$;

в) $x^2 \sin^2 y(\cos y - \sin y)$;

г) $\dfrac{\sin 2y}{x}$.

Вариант 3

1. ***Найти область определения функции***
$z=\sqrt{x^2+y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2)$

Ответы:

а) $x^2+y^2\ge 1$;

б) $x^2+y^2<4$;

в) $1<x^2+y^2\le 4$;

г) $1\le x^2+y^2<4$.

2. ***Дана функция*** $z=x^3-y^3+\ln\frac{x}{y}$***. Чему равно выражение*** $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}$ ***в точке*** $(2,1)$***?***

Ответы:

а) 29,

б) 25,5,

в) 21,

г) $7+\ln 2$.

3. ***Исследовать на экстремум функцию:*** $z=3x+6y-x^2-xy-y^2$

Ответы:

а) экстремума нет;

б) $z_{\max}(0;3)=9$;

в) $z_{\min}(0;3)=9$;

г) нет верного ответа.

4. ***Найти наибольшее и наименьшее значения функции*** $z=x^2+2xy+4x-y^2+1$ ***в треугольнике*** $x=0,\quad y=0,\ x+y=-3$.

Ответы:

а) $z_{наиб}=1$, $z_{наим}=-8$;

б) нет верного ответа;

в) $z_{наиб}=0$, $z_{наим}=-3$;

г) $z_{наиб}=1$, $z_{наим}=-7$.

5. ***Найти*** $\frac{\partial z}{\partial v}$ ***для функции*** $z=e^{xy}$***, если*** $\begin{cases} x=u-v \\ y=u+v \end{cases}$

Ответы:

а) $e^{u^2-v^2}2u$;

б) $-2ve^{u^2-v^2}$;

в) $2e^{u^2-v^2}(u-v)$;

г) 0.

Вариант 4

1. ***Найти область определения функции***
$z = \arccos(x + y)$

Ответы:

а) $y \geq -x$;

б) $0 \leq x + y \leq 1$;

в) $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$;

г) $-1 - x \leq y \leq 1 - x$.

2. ***Дана функция*** $z = e^{xy}$***. Чему равно выражение*** $x^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ***в точке*** $(2,1)$***?***

Ответы:

а) e^2,

б) 0,

в) $3e^2$,

г) $-2e$.

3. ***Исследовать на экстремум функцию:*** $z = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 8$

Ответы:

а) нет экстремума;

б) $z_{\max}(1;2) = -4$;

в) нет верного ответа;

г) $z_{\min}(1;1) = 6$.

4. ***Найти наибольшее и наименьшее значения функции*** $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ ***в области*** $x \geq 0$, $y = 2$***,*** $y = \dfrac{x^2}{2}$***.***

Ответы:

а) нет верного ответа;

б) $z_{наиб} = 0$, $z_{наим} = -1$;

в) $z_{наиб} = 12$, $z_{наим} = -1$;

г) $z_{наиб} = 12$, $z_{наим} = 0$.

5. ***Найти*** $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ***для функции*** $z = \ln\left(u + v^2\right)$***, если*** $\begin{cases} u = x^2 y \\ v = xy^3 \end{cases}$

Ответы:

а) $\dfrac{x + 3y^2}{xy(1 + y^5)}$;

б) $\dfrac{6xy^5 + 2y^2 + 2y + x}{xy(1 + y^5)}$;

в) $\dfrac{1 + 6y^5}{y(1 + y^5)}$;

г) $\dfrac{1 + 6y^5}{1 + y^5}$.

Вариант 5

1. Найти область определения функции $u=\sqrt{\ln\left(1+z-x^2-y^2\right)}$

Ответы:

а) $x^2+y^2<1+z$;

б) $z\ge x^2+y^2-1$;

в) $z\ge x^2+y^2$;

г) $z<x^2+y^2<1$.

2. Дана функция $z=\sin^2\left(x+at\right)$***. Чему равно выражение*** $a^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ ***в точке*** $(\dfrac{\pi}{2},0)$ ***?***

Ответы:

а) $1-a^2$,

б) $2(1-a^2)$,

в) $-2(2a^2+2a+1)$,

г) 0.

3. Исследовать на экстремум функцию: $z=x^2+(y-1)^2$

Ответы:

а) $z_{\min}(0;1)=0$;

б) $z_{\max}(0;1)=0$;

в) экстремума нет;

г) нет верного ответа.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=x^2y(2-x-y)$ ***в треугольнике*** $x=0,\quad y=0,\ x+y=6$**.**

Ответы:

а) $z_{наиб}=\dfrac{1}{4}$, $z_{наим}=-128$,

б) $z_{наиб}=\dfrac{1}{4}$, $z_{наим}=0$;

в) нет верного ответа;

г) $z_{наиб}=0$, $z_{наим}=-128$;

5. Найти $\dfrac{dz}{dx}$ ***для функции*** $z=\sin^2(3u+2v)$***, если*** $\begin{cases}u=x^3\\ v=x^2\end{cases}$

Ответы:

а) $x(9x+4)\sin(6x^3+4x^2)$;

б) $2x(9x+4)\sin(3x^3+2x^2)$;

в) $x(9x+4)\cos^2(3x^3+2x^2)$;

г) $x(9x+4)\cos(3x^3+2x^2)$.

Вариант 6

1. ***Найти область определения функции*** $z=\sqrt{4-x^2-4y^2}$

Ответы:

а) $|x|\le 2$; $|y|\le 1$;

б) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}\le 1$;

в) $x^2+4y^2<4$;

г) $x+2y<2$.

2. ***Дана функция*** $z=\ln\left(x^2+(y+1)^2\right)$***. Чему равно выражение*** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ***в точке*** $(1,0)$ ***?***

Ответы:

а) -1,

б) $\ln 2$,

в) 0,

г) 4.

3. ***Исследовать на экстремум функцию:*** $z=x^3+y^3-3xy$

Ответы:

а) экстремума нет;

б) $z_{\max}(0;0)=0$; $z_{\min}(1;1)=-1$;

в) $z_{\max}(1;1)=-1$

г) $z_{\min}(1;1)=-1$.

4. ***Найти условный экстремум функции*** $z=xy$ ***при*** $x^2+y^2=2$.

Ответы:

а) $z_{\max}=1$, $z_{\min}=-1$;

б) $z_{\max}=1$;

в) нет верного ответа;

г) $z_{\min}=-1$.

5. ***Найти*** $\frac{du}{dx}$ ***для функции*** $u=e^{z-2y}$***, если*** $\begin{cases} z=\sin x \\ y=x^3 \end{cases}$

Ответы:

а) $e^{\sin x-2x^3}(\cos x-6x^2)$;

б) $-e^{\sin x-2x^3}(\cos x-6x^2)$;

в) $(\sin x-2x^3)e^{\sin x-2x^3-1}(\cos x+3x^2)$;

г) $e^{\sin x-2x^3}(\cos x-3x^2)$.

Вариант 7

1. Найти область определения функции $z = \dfrac{\ln(x^2 y)}{\sqrt{y-x}}$

Ответы:

а) $y > x$; в) $y > 0$; $x \neq 0$;

б) $y \neq x$; $y > 0$; г) $y > x$; $y > 0$; $x \neq 0$.

2. Дана функция $z = \ln\left(x^2 + y^2 + 2x + 1\right)$***. Чему равно выражение*** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$

в точке $(1,1)$ ***?***

Ответы:

а) 1, в) $\dfrac{8}{5}$,

б) 0, г) 6.

3. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$

Ответы:

а) $z_{\min}(-4;1) = -1$; в) экстремума нет;

б) нет верного ответа; г) $z_{\max}(-4;1) = -1$.

4. Найти условный экстремум функции $z = x^2 + (y-2)^2$ ***при*** $x^2 - y^2 - 4 = 0$**.**

Ответы:

а) $z_{\min} = 6$; в) нет верного ответа;

б) $z_{\max} = 6$; г) $z_{\min} = 4$.

5. Найти $\dfrac{du}{dt}$ ***для функции*** $u = \sin\dfrac{x}{y}$***, если*** $\begin{cases} x = e^t \\ y = t^2 \end{cases}$

Ответы:

а) $\dfrac{te^t - 2}{t^2}\cos\dfrac{e^t}{t^2}$; в) $(e^t + 2t)\cos\dfrac{e^t}{t^2}$;

б) $\left(t+2\right)\dfrac{e^t}{t^3}\cos\dfrac{e^t}{t^2}$; г) $\left(t-2\right)\dfrac{e^t}{t^3}\cos\dfrac{e^t}{t^2}$.

Вариант 8

1. Найти область определения функции

$z = \arcsin\dfrac{x^2 + y^2 - 3}{2}$

Ответы:

а) $1 \le x^2 + y^2 \le 5$;

б) $x^2 + y^2 \ge 1{,}5$;

в) $0 \le x^2 + y^2 \le 3$;

г) $0 < x^2 + y^2 \le 3$.

2. Дана функция $z = \arcsin\dfrac{x-y}{x+y}$***. Чему равно выражение*** $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y}$ ***в точке*** $(4{,}1)$ ***?***

Ответы:

а) 0,

б) $\dfrac{3}{2}$,

в) $\arcsin\dfrac{3}{5}$,

г) $-\dfrac{3}{2}$.

3. Исследовать на экстремум функцию: $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$

Ответы:

а) нет верного ответа;

б) экстремума нет;

в) $z_{\min}(1;0) = -1$;

г) $z_{\max}(1;0) = -1$.

4. Найти условный экстремум функции $z = x + y$ ***при*** $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{2} = 0$**.**

Ответы:

а) нет верного ответа;

б) $z_{\max} = 4$, $z_{\min} = -4$;

в) $z_{\max} = -4$, $z_{\min} = 4$;

г) $z_{\min} = 0$.

5. Найти $\dfrac{dz}{dx}$ ***для функции*** $z = x^{2y}$***, если*** $y = \ln x$

Ответы:

а) $x^{2\ln x}\left(\ln x + \dfrac{\ln x}{x^2}\right)$;

б) $x^{2\ln x - 1}\ln x$;

в) $4\ln x \cdot x^{2\ln x - 1}$;

г) $2\ln x \cdot x^{2\ln x - 1}$.

Вариант 9

1. ***Найти область определения функции***
$z = \ln(4 + 4x - y^2)$

Ответы:

а) $x \ge \frac{1}{4}y^2 - 1$;

б) $x > 0$; $-2 \le y \le 2$;

в) $y^2 < 4(x+1)$;

г) $x > -1$; $y > 0$.

2. ***Дана функция*** $z = \left(x^2 + y^2\right)tg\frac{x}{y}$***. Чему равно выражение*** $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y}$ ***в точке*** $(\pi,1)$***?***

Ответы:

а) 0,

б) $2\pi(\pi - 1)$,

в) $2\pi(1-\pi)$,

г) $\pi^3 + 2\pi^2 + 3\pi$.

3. ***Исследовать на экстремум функцию:*** $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$

Ответы:

а) нет верного ответа;

б) $z_{\min}(0;3) = -9$;

в) экстремума нет;

г) $z_{\max}(0;3) = -9$.

4. ***Найти условный экстремум функции*** $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ***при*** $x + y - 2 = 0$.

Ответы:

а) $z_{\max} = -\frac{2}{3}$;

б) нет верного ответа;

в) $z_{\max} = 2$;

г) $z_{\min} = -2$.

5. ***Найти*** $\frac{dz}{dx}$ ***для функции*** $z = e^{\frac{x}{y}}$***, если*** $y = \sin^3 x$

Ответы:

а) $\frac{1}{\sin^3 x}e^{\frac{x}{\sin^3 x}}\left(1 - \frac{3x\sin^2 x}{\cos^3 x}\right)$;

б) $\frac{1}{\sin^3 x}e^{\frac{x}{\sin^3 x}}\left(1 - 3xctgx\right)$;

в) $\frac{1}{\sin^3 x}e^{\frac{x}{y}}\left(1 + \frac{3xctgx}{y}\right)$;

г) $\frac{1}{y}e^{\frac{x}{y}}3\sin^2 x\cos x$.

Вариант 10

1. Найти область определения функции

$$z = \frac{x}{y - \sqrt{x}}$$

Ответы:

а) $y^2 > x$;

б) $x \ge 0$; $y \ne \sqrt{x}$;

в) $x \ge 0$; $y > x$;

г) $x > 0$; $y^2 > x$.

2. Дана функция $z = e^{\frac{y}{x}}$***. Чему равно выражение*** $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 \frac{\partial z}{\partial x}\right) - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ***в точке*** $(1,2)$***?***

Ответы:

а) $4e^2$,

б) $8e^2$,

в) 0,

г) e^2.

3. Исследовать на экстремум функцию: $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$

Ответы:

а) $z_{\min}(0;-\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$;

б) экстремума нет;

в) $z_{\max}(0;-\frac{2}{3}) = -\frac{4}{3}$;

г) нет верного ответа.

4. Найти условный экстремум функции $z = xy^2$ ***при*** $x + 2y = 1$.

Ответы:

а) $z_{\min} = 0$, $z_{\max} = \frac{1}{27}$

б) $z_{\max} = \frac{1}{27}$, $z_{\min} = 1$;

в) нет верного ответа;

г) $z_{\max} = 0$, $z_{\min} = \frac{1}{27}$.

5. Найти $\frac{dy}{dx}$ ***для функции, заданной неявно*** $y = 1 + y^x$

Ответы:

а) $\frac{1 - xy^{x-1}}{y^x \ln y}$;

б) $\frac{xy^{x-1}}{1 - y^x \ln y}$;

в) $\frac{y^x \ln y}{1 - xy^{x-1}}$;

г) $y^x \ln y$.

Вариант 11

1. ***Найти область определения функции***

$z = \sqrt{\ln\left(x^2 + y^2 - 3\right)}$

Ответы:

а) $x^2 + y^2 \geq 4$;

б) $0 \leq x^2 + y^2 < 3$;

в) $x^2 + y^2 > 3$;

г) $x^2 + y^2 > 3$; $x > 0$; $y > 0$.

2. ***Дана функция*** $z = x^5 + y^5 - 5x^3y^3$***. Чему равно выражение***

$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ***в точке*** $(1,-1)$ ***?***

Ответы:

а) 40,

б) 5,

в) 38,

г) нет верного ответа.

3. ***Исследовать на экстремум функцию:*** $z = x^2 + xy + y^2 + x - y - 1$

Ответы:

а) нет верного ответа;

б) экстремума нет;

в) $z_{\min}(-1;1) = -2$;

г) $z_{\max}(-1;1) = 2$.

4. ***Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов по следующим данным:***

x	***1***	***2***	***3***	***5***
y	***3***	***4***	***2,5***	***0,5***

Ответы:

а) $a = -\frac{26}{35}$, $b = \frac{159}{35}$;

б) $a = -\frac{26}{35}$, $b = \frac{16}{25}$;

в) $a = \frac{194}{277}$, $b = \frac{621}{277}$;

г) нет верного ответа.

5. ***Найти*** $\frac{dy}{dx}$ ***для функции, заданной неявно*** $\ln\sqrt{x^2 + y^2} = arctg\frac{y}{x}$

Ответы:

а) $\frac{y - x^2}{x^2 + y^2}$;

б) $\frac{y - x}{x + y}$;

в) $\frac{y + x}{x - y}$;

г) $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y}$.

Вариант 12

1. Найти область определения функции

$z=\sqrt{1+x-y^2}+\sqrt{1-x-y^2}$

Ответы:

а) $\begin{cases} x>y^2-1; \\ x<1-y^2; \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x\ge y^2-1; \\ x\le 1-y^2; \end{cases}$;

б) $y<x$; $x>0$;

г) $y^2>x$; $y^2<-x$.

2. Дана функция $z=y^x$***. Чему равно выражение*** $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ ***в точке*** $(1,2)$***?***

Ответы:

а) 2,

в) нет верного ответа,

б) 0,

г) $2\ln 2$.

3. Исследовать на экстремум функцию: $z=(x-1)^2-2y^2$

Ответы:

а) $z_{\max}(1;0)=0$

в) экстремума нет;

б) $z_{\min}(1;0)=0$;

г) нет верного ответа.

4. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов по следующим данным:

x	***1***	***2***	***3***	***5***
y	***0***	***1***	***-0,5***	***-2,5***

Ответы:

а) нет верного ответа;

в) $a=-\frac{26}{35}$, $b=\frac{54}{35}$;

б) $a=-\frac{70}{277}$, $b=\frac{210}{277}$;

г) $a=-\frac{26}{35}$, $b=\frac{89}{35}$

5. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ ***для функции, заданной неявно*** $zy-2x\,arctg\frac{x}{y}=0$

Ответы:

а) $\frac{2}{y}arctg\frac{x}{y}+\frac{2x}{x^2+y^2}$;

в) $\frac{2}{y}arctg\frac{x}{y}+\frac{2xy}{x^2+y^2}$;

б) $\frac{2y^2}{x^2+y^2}$;

г) $-\frac{2x^2}{x^2+y^2}$.

Вариант 13

1. ***Найти область определения функции***

$$z = \frac{x}{\sqrt{\ln(y - x^2)}}$$

Ответы:

а) $y^2 > x$; $x > 0$;

б) $x^2 < y - 1$;

в) $x > 0$; $y \ge x^2$;

г) $x^2 < 1 + y$.

2. ***Дана функция*** $z = \ln\left(x^2 + y^2\right)$***. Чему равно выражение*** $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}$ ***в точке*** $(1,1)$***?***

Ответы:

а) 2,

б) 1,

в) 3,

г) $\ln 2$.

3. ***Исследовать на экстремум функцию:*** $z = x^3 - 15xy + y^3$

Ответы:

а) $z_{\min}(5;5) = -125$;

б) нет верного ответа;

в) экстремума нет;

г) $z_{\min}(5;5) = -125$, $z_{\max}(0;0) = 0$.

4. ***Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов по следующим данным:***

x	***1***	***2***	***3***	***5***
y	***8***	***9***	***11***	***15***

Ответы:

а) $a \approx 3{,}6$, $b \approx 11{,}4$

б) $a = 1{,}8$, $b = 5{,}8$;

в) $a = 1{,}8$, $b = -5{,}8$;

г) нет верного ответа.

5. ***Найти*** $\frac{dy}{dx}$ ***для функции, заданной неявно*** $1 + xy - \ln\left(e^{xy} + e^{-xy}\right) = 0$

Ответы:

а) $\frac{x}{y}$

б) $-\frac{y}{x}$

в) $\frac{2ye^{xy}}{e^{xy} - e^{-xy}}$;

г) $\frac{2xe^{-xy}}{e^{xy} - e^{-xy}}$.

Вариант 14

1. Найти область определения функции

$$z = \frac{\sqrt[4]{y}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

Ответы:

а) $y > 0$; $x^2 + y^2 \le 1$;

б) $x^2 + y^2 > 1$; $y > 0$;

в) $x^2 + y^2 < 1$;

г) $x^2 + y^2 < 1$; $y \ge 0$.

2. Дана функция $z = xy + \dfrac{y}{x}$***. Чему равно выражение*** $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}$ ***в точке*** $(1,1)$***?***

Ответы:

а) 4,

б) 3,

в) 2,

г) нет верного ответа.

3. Исследовать на экстремум функцию: $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 40$

Ответы:

а) экстремума нет;

б) $z_{\min}(0;0) = 40$;

в) $z_{\max}(0;0) = 40$;

г) нет верного ответа.

4. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов по следующим данным:

x	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
y	***8***	***9***	***11***	***14***	***15***

Ответы:

а) нет верного ответа;

б) $a = 1{,}9$, $b = 11{,}97$;

в) $a = 2{,}72$, $b = 11{,}97$;

г) $a = 1{,}9$, $b = 5{,}7$.

5. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ ***для функции, заданной неявно*** $z = ye^{\frac{x}{z}}$

Ответы:

а) $-\dfrac{xy}{z^2}e^{\frac{x}{z}}$;

б) $xye^{\frac{x}{z}}$;

в) $\dfrac{z}{y}$

г) $\dfrac{yze^{\frac{x}{z}}}{z^2 + xye^{\frac{x}{z}}}$.

Вариант 15

1. Найти область определения функции

$z=\sqrt{1-(x^2+y)^2}$

Ответы:

а) $-1 \le x^2+y \le 1$; в) $x^2 \le 1-y$;

б) $x^2+y \le 1$; г) $x^2+y<1$.

2. Дана функция $z=y\sqrt{\frac{y}{x}}$***. Чему равно выражение*** $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ ***в точке*** $(1,4)$***?***

Ответы:

а) -1, в) 0,

б) 8, г) 19.

3. Исследовать на экстремум функцию: $z=(x-1)^2+2y^2$

Ответы:

а) экстремума нет; в) $z_{\min}(1;0)=0$;

б) нет верного ответа; г) $z_{\max}(1;0)=0$.

4. Найти параметры линейной зависимости методом наименьших квадратов по следующим данным:

x	***1***	***2***	***3***	***4***	***5***
y	*7*	***8***	***9***	***10***	***12***

Ответы:

а) $a=2{,}88$, $b=9{,}56$; в) нет верного ответа;

б) $a=1{,}2$, $b=5{,}6$; г) $a=1{,}2$, $b=12{,}8$.

5. Найти $\frac{\partial z}{\partial y}$ ***для функции, заданной неявно*** $ye^{\frac{x}{z}}-z=0$

Ответы:

а) $\frac{z}{x}e^{\frac{x}{z}}$; в) $e^{\frac{x}{z}}$;

б) $\frac{z^2e^{\frac{x}{z}}}{z^2+xye^{\frac{x}{z}}}$; г) $\frac{z}{z^2+xyz}$.

Литература

1. Высшая математика для экономических специальностей: Учебник и Практикум / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшее образование, 2008. – 893 с.
2. Общий курс высшей математики для экономистов: Учебник / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2005. – 656 с.
3. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 5-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 288 с.
4. *Баврин И И.* Курс высшей математики.– М.: Просвещение,1992. – 400 с
5. *Натансон И.П.* Краткий курс высшей математики. 4-е изд., стереотипное – СПб.: Издательство «Лань», 2001. – 736 с.
6. *Мордкович А.Г., Солодовников А.С.*. Математический анализ: Учеб. для техникумов. – М.: Высшая школа, 1990. – 416 с.
7. *Пискунов Н.*С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. Т.1. – 8-е изд. – М.: Наука, 1968. – 552 с.
8. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2005. – 575 с.
9. Сборник задач по курсу высшей математики / Под ред. Г.И. Кручковича. Изд. 3, перераб. Учебное пособие для втузов. М., «Высшая школа», 1973. – 576 с.
10. Практикум по высшей математике: в 2 т. Т.1: учебное пособие И.А. Каплан, В.И. Пустынников : под общ. Ред. проф. В.И. Пустынникова. – 6-е изд., испр. И доп. – М.: Эксмо, 2006. – 576 с.
11. *Запорожец Г.И.* Руководство к решению задач по математическому анализу. 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1966. – 466 с.
12. *Могилевский Р.И.* Математические методы и модели в экономике: Программа, методические рекомендации и контрольные задания для студентов экономических специальностей заочной формы обучения. Бишкек: КРСУ, 1998. – 28 с.