КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

Л.Г. Лелевкина, В.В. Попов

Основы высшей математики

Учебное пособие
для студентов заочной формы обучения

Издательство Кыргызско-Российского
Славянского университета

Бишкек 2001

Лелевкина Л.Г., Попов В.В.

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ: Учебное пособие для студентов заочной формы обучения /Кыргызско-Российский Славянский университет. Кафедра математики. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2001. – 54 с.

Рецензент: д.ф.-м.н., проф. *Р.Р. Рафатов*

Рекомендовано к изданию
кафедрой математики КРСУ

ВВЕДЕНИЕ

Этапы изучения математики на факультете заочного обучения (ФЗО) включают:

а) самостоятельное изучение теоретического материала по учебникам и решение задач по существующим задачникам, а также выполнение контрольных работ, задания к которым выдаются в университете;

б) консультации в университете (расписание консультаций имеется на кафедре);

в) аудиторные теоретические (лекции) и практические занятия (по расписанию);

г) сдача экзамена (зачета).

Самостоятельная работа – это основная форма обучения студента-заочника. Вместе с тем рекомендуется чаще обращаться за консультациями к преподавателю, потому что живое общение наиболее полезно при обучении. Лекционный курс и аудиторные практические занятия слишком кратки, чтобы студент успел усвоить требуемый материал.

Без решения конкретных задач нет математики. Рекомендуется чтение учебника сопровождать разбором типовых задач и примеров, приводимых в существующих пособиях.

Большую помощь при самостоятельном изучении теории приносит составление ***конспекта***. В конспекте следует проделать те выкладки, которые имеются в учебнике, четко выписать основные формулы и результаты, сделать пометки по неясным вопросам, чтобы не забыть по ним проконсультироваться.

Не всегда понимание того или иного вопроса математики приходит при первом же прочтении учебника. Опыт показывает: в этом случае следует вначале хотя бы разобрать смысл определений, теорем, формул и двигаться дальше, поскольку многие разделы математики относительно самостоятельны. По мере накопления общих знаний следует возвращаться к непонятным вопросам и тогда часто оказывается, что они не так уж и сложны.

Помните! Только систематическое изучение любого предмета приносит реальную пользу. Быстро вызубренный перед экзаменом без понимания большой материал с такой же скоростью забывается.

Работа сдается на рецензию в сроки, установленные учебным планом. Если контрольная работа отправлена на доработку (не зачтена), то исправленная работа должна быть представлена на кафедру до начала экзаменов. Без зачтенной контрольной работы или при отсутствии тетради с зачтенной контрольной работой студент к экзамену (зачету) не допускается.

Контрольная работа должна быть выполнена в ученической тетради с полями для замечаний преподавателя. На обложке тетради должны быть четко написаны фамилия студента, его инициалы, факультет, группа, шифр, название дисциплины. Здесь же следует указать дату отсылки и домашний адрес. Перед решением задачи нужно полностью списать ее условие.

Программа курса

1. Элементы высшей алгебры и аналитической геометрии. Метод Гаусса решения системы линейных алгебраических уравнений. Матрицы, основные определения, линейные действия над матрицами (сложение, умножение на число), произведение матриц. Определители 2-го и 3-го порядков и их свойства. Понятие определителя n-го порядка. Системы линейных алгебраических уравнений. Формулы Крамера.

Различные виды уравнений прямой на плоскости. Взаимное расположение прямых: параллельные и перпендикулярные прямые, угол между прямыми. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола.

2. Основы математического анализа. Понятие функции. Способы задания функции. Область определения, область значений функции. Примеры. Основные элементарные функции. Предел функции в конечной и бесконечной точке. Функция целочисленного аргумента и ее предел. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Правила предельного перехода (пределы суммы, произведения и частного). Первый и второй замечательные пределы, число e как предел последовательности. Натуральные логарифмы.

Непрерывность функции. Геометрическая интерпретация. Свойства непрерывных функций. Непрерывность элементарных функций. Точки разрыва функции. Разрывы первого и второго рода.

Понятие производной, ее геометрический и механический смысл. Производная суммы, произведения, частного двух функций. Таблица производных основных элементарных функций. Дифференцирование сложной функции. Производные высших порядков. Дифференцирование параметрически и неявно заданных функций.

Приложение производной к исследованию функций: признаки возрастания и убывания функции, экстремум функции, выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Асимптоты функции.

Функции многих переменных. Частные производные первого и высших порядков. Экстремумы функции двух переменных. Метод наименьших квадратов. Наименьшее и наибольшее значение функции.

Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Табличные интегралы. Методы вычисления неопределенных интегралов: непосредственное интегрирование, интегрирование по частям, подстановкой, интегрирование рациональных дробей, тригонометрических и иррациональных выражений.

Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл как предел интегральных сумм. Основные свойства определенного интеграла. Производная интеграла по верхнему пределу. Формула Ньютона- Лейбница. Методы вычисления определенных интегралов: интегрированием по частям, подстановки. Приближенное (численное) вычисление определенных интегралов.

Литература

1. Высшая математика для экономистов /Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М., 1999.
2. Со*лодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В.* Математика в экономике. – М., 1998.
3. *Красс М.С.* Математика для экономических специальностей. – М., 1998.
4. *Ильин В.А., Позднян Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М., 1971.
5. *Мальцев А.И.* Основы линейной алгебры. – М., 1970.
6. *Ильин В.А., Позднян Э.Г.* Основы математического анализа. Ч. 1, 2. – М., 1982.
7. *Баврин И.И.* Курс высшей математики. – М., 1984.
8. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – М., 1970-1987. – Т. 1-2.
9. *Бугров Я.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление. – М., 1984.
10. *Мышкис А.Д.* Математика для втузов. – М., 1971.
11. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М., 1980.

12. *Беклемишев Д.В.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М., 1980.
13. *Беклемишев Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М., 1987.
14. *Клетеник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. – М.. 1989.
15. *Гусятников П.В., Резниченко С.В.* Векторная алгебра в примерах и задачах. – М., 1985.
16. *Дюбюк П.П.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М., 1973.
17. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. – М., 1972.
18. *Данко П.Е.* и др. Высшая математика в упражнениях и задачах В 2 ч. – М., 1986.
19. *Гусак А.А.* Сборник задач и упражнений по высшей математике. – М., 1980.
20. *Бермант А.Ф., Араманович И.Г.* Краткий курс математического анализа. – М., 1969.
21. *Ефимов А.В., Демидович Б.П.* Сборник задач по математике. – М., 1969.
22. *Кудрявцев А.Д.* Краткий курс математического анализа. – М., 1989.
23. *Никольский С.М.* Курс математического анализа. – Т. 1, 2. – М., 1983.
24. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М., 1969.
25. *Слуцкий А.В., Шнейдер В.Е.* Краткий курс высшей математики. В 2 т. – М., 1978.

I. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Матрицы

1.1.Основные определения

Матрица – это прямоугольная таблица чисел. Числа этой таблицы называются *элементами матрицы*. В алгебраическом варианте вместо чисел стоят буквы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Число m есть число строк матрицы, n – число ее столбцов. Элемент a_{ik} матрицы расположен в ее i-ой строке и в k-ом столбце, т.е. на пересечении i-ой строки и k-го столбца. Матрицы обозначают заглавными буквами: A, B, …, иногда с индексами m и n (чтобы указать число строк и столбцов): A_{mn}, A_{mxn}.

Две матрицы A_{mn} и B_{pq} равны, если m=n, p=q и все соответствующие элементы a_{ik} и b_{ik} этих матриц равны: $a_{ik}= b_{ik}$.

Матрица, имеющая лишь одну строку, называется матрицей-строкой. Матрица, имеющая лишь один столбец, называется матрицей-столбцом. Если $m=n$, то матрица называется квадратной. Если все элементы матрицы равны нулю, она называется нулевой.

Будем говорить, что элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ квадратной матрицы n×n образуют главную диагональ, а ее элементы $a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}$ – вторую диагональ. Если все элементы главной диагонали матрицы $n\times n$ равны единице, а все остальные равны нулю, то матрицу называют единичной. Обозначим такие матрицы как E (или E_{nn}).

1.2. Линейные операции над матрицами

Линейные операции над матрицами – это их сложение и вычитание, умножение матрицы на число. Сложение и вычитание определено

только для матриц одинаковых размеров. Суммой двух матриц A_{mn} и B_{mn} называется такая матрица D_{mn}, что

$$d_{ik}=a_{ik}+b_{ik},$$

то есть соответствующие элементы матриц A и B складываются.

Пример.

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & (a_{13}+b_{13}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & (a_{23}+b_{23}) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \end{bmatrix}=D.$$

Аналогично определяется разность двух матриц: $F=A-B \Rightarrow f_{ik}=a_{ik}-b_{ik}$.

При умножении матрицы A на число все ее элементы умножаются на это число.

Пример.

$$7\cdot A=7\cdot\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (7a_{11}) & (7a_{12}) & (7a_{13}) \\ (7a_{21}) & (7a_{22}) & (7a_{23}) \end{bmatrix}.$$

1.3. Произведение матриц

Произведение $D=AB$ матриц A и B определено только для таких, у которых число столбцов матрицы, стоящей в произведении слева, равно числу строк матрицы, стоящей в произведении справа. Короче, определено произведение $D=A_{mn}B_{pq}$ только таких матриц, у которых $n=p$ (соотношение между числами m и q может быть любым). Произведением матрицы A_{mn} на матрицу B_{nq} называется матрица D_{mq}, такая, что

$$d_{ik}=a_{i1}b_{1k}+a_{i2}b_{2k}+\ldots+a_{in}b_{nk}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk}\ .$$

Матрица D_{mq} имеет m строк и q столбцов!

Примеры.

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \\ p & q \end{bmatrix}.$$

$$D=AB=\begin{bmatrix} (ak+bm+cp) & (al+bn+cq) \\ (dk+em+fp) & (dl+en+fq) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}=D_{22}.$$

$$BA=\begin{bmatrix} k & l \\ m & n \\ p & q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (ka+ld) & (kb+le) & (kc+lf) \\ (ma+nd) & (mb+ne) & (mc+nf) \\ (pa+qd) & (pb+qe) & (pc+qf) \end{bmatrix}=$$

$$=F_{33}=\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{bmatrix}$$

Нетрудно видеть, что $AB \neq BA$. Более того, произведение A_{mn} на B_{np} существует, а произведение B_{np} на A_{mn} не определено, если $p \neq m$.

2. Определители

2.1. Исходные определения

Определителем квадратной матрицы второго порядка

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

называется *число*, равное $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, обозначаемое символом

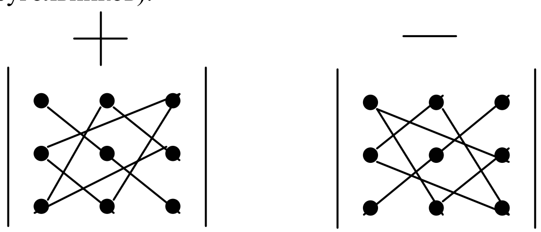
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ т.е. } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\,.$$

Числа a_{11}, a_{22}, a_{12} , a_{21} называются элементами определителя. Определитель матрицы называют также детерминантом. Для определителя используют обозначения $|A|$, $\det A$, Δ и т.д.

Определителем квадратной матрицы третьего порядка называют число

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{21}a_{13}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{12}a_{21}a_{33}+a_{11}a_{23}a_{32})\,.$$

Мнемоническое правило вычисления определителей 3-го порядка (правило треугольников):



Существует универсальный способ вычисления определителей любого порядка (разложение по строке или столбцу) [5], [11], [12]. Неквадратная матрица не имеет определителя.

2.2. Свойства определителей

1.Определитель не изменится при замене всех строк соответствующими столбцами, т.е. при транспонировании.

2. При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет лишь знак.

3. Определитель с двумя одинаковыми столбцами (строками) равен нулю.

4. Множитель, общий для элементов некоторой строки (столбца), можно вынести за знак определителя.

5. Определитель равен нулю, если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю.

6. Определитель не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) прибавить соответственные элементы другой строки (столбца), предварительно умножив их на один и тот же ненулевой множитель.

Все эти свойства легко проверяются на конкретных примерах.

Пример.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1\cdot 1-(-1)\cdot 2=1+2=3\,.$$

Пример.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 74328 & 74329 \\ 74327 & 74328 \end{vmatrix}.$$

Прибавим ко второй строке первую, предварительно умножив каждый ее элемент на (-1). Определитель не изменится по свойству 6.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 74328 & 74329 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-74328+74329=1\,.$$

Пример.

$$\Delta=\begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=a\cdot 2\cdot 6+b\cdot 3\cdot 4+c\cdot 1\cdot 5-(c\cdot 2\cdot 4+b\cdot 1\cdot 6+a\cdot 3\cdot 5)=-3a+6b-3c\,.$$

3. Решение систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

3.1. Решение СЛАУ методом Крамера

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{3.1}$$

Введем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}.$$

Используя обычный метод последовательного исключения неизвестных, легко убедиться, что решение системы (3.1) есть:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{3.2}$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$

Естественно, выражения (3.2) имеют смысл только если $\Delta \neq 0$. Число Δ называют *определителем системы*.

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 1 = 5,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3,$$

Ответ: $x_1 = \frac{6}{5},\quad x_2 = -\frac{3}{5}.$

Рассмотрим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}. \tag{3.3}$$

Введем матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\quad A_1 = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}.$$

После громоздких преобразований методом последовательного исключения неизвестных убеждаемся, что решение системы (3.3) есть

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \tag{3.4}$$

где $\Delta = \det A,\quad \Delta_1 = \det A_1,\quad \Delta_2 = \det A_2,\quad \Delta_3 = \det A_3.$

Естественно, выражения (3.4) имеют смысл только если определитель системы $\Delta \neq 0$.

Формулы (3.2), (3.4) – это формулы Крамера. Они утверждают, что решение систем уравнений (3.1) или (3.3) существует и единственное, если определители соответствующих систем не равны нулю.

По формулам Крамера решают системы уравнений и с большим числом неизвестных. Заметим, что очень часто, особенно в экономике, число уравнений и число неизвестных могут не совпадать. Возникающие проблемы подробно описаны в курсах линейной алгебры [1], [2].

Пример.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}, \tag{3.5}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 0 - 1 - (1 + 0 + 1) = -5,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -5,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$x_1 = 1,\quad x_2 = -1,\quad x_3 = 0.$

Так как определитель системы $\Delta = -5 \neq 0$, решение системы (3.5) существует и единственное.

3.2. Решение СЛАУ методом Гаусса

Это самый короткий метод решения произвольных систем линейных алгебраических уравнений [5, 11, 12]. Суть метода состоит в последовательном исключении неизвестных с приведением системы к треугольному виду. Проиллюстрируем его на примере системы (3.5). Приведем ее к виду:

$$\begin{cases} x_1 + ax_2 + bx_3 = c \\ 0x_1 + x_2 + dx_3 = e \\ 0x_1 + 0x_2 + x_3 = f. \end{cases} \tag{3.6}$$

Тогда $x_3 = f$, $x_2 = e - dx_3$, $x_1 = c - ax_2 - bx_3$.

Реализуем эту программу. Вначале переставим местами первое и второе уравнения (3.5):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 0x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \tag{3.7}$$

От этого, конечно, ничего не изменится. Теперь, сохраняя первое уравнение в (3.7), преобразуем второе и третье. Для этого умножим первое уравнение в (3.7) на (-2) и прибавим ко второму. Получим новое второе уравнение. Затем умножим первое уравнение в (3.7) на (-1) и прибавим к третьему. Результат:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 - 3x_2 - x_3 = 3\,. \\ 0x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases} \tag{3.8}$$

Часть программы выполнена. Преобразуем (3.8):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -1 \\ 0x_1 - x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Сохраняя первое и второе уравнения в (3.9), в качестве третьего возьмем сумму второго и третьего:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 0x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = -1 \\ 0x_1 + 0x_2 - \frac{5}{3}x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{c} x_3 = 0, \\ x_2 = -1 - \frac{1}{3}x_3 = -1, \\ x_1 = -x_2 - x_3 = 1. \end{array} \tag{3.10}$$

Мы нашли решение системы (3.5) методом Гаусса.

Указанную программу преобразования уравнения (3.5) к виду (3.10) (т.е. к виду (3.6)) удобно реализовать в матричном виде, что является компактной записью действий (3.7-3.10). Для этого выпишем *расширенную матрицу коэффициентов системы* (3.5):

$$\widetilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Проведем над ней цепочку преобразований:

$$\widetilde{A} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & -1 \\ 0 & 0 & -5/3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow$$

Ответ: $x_3 = \dfrac{0}{(-5/3)} = 0$ $, x_2 = -1 - \dfrac{1}{3}x_3 = -1,$ $x_1 = -x_2 - x_3 = 1$.

Процедура (3.7–3.10) повторена в компактном (матричном) виде. Именно таким образом метод Гаусса реализован в программном обеспечении компьютеров.

II. ЭЛЕМЕНТЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1. Прямые на плоскости

На плоскости задан треугольник координатами своих вершин $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3,y_3)$.

1. Найдем длину стороны AB. По теореме Пифагора

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

2. Найдем уравнение стороны AB. Это прямая, проходящая через две заданные точки. Уравнение такой прямой есть

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}, \text{ или } y = kx + b, \text{ где } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad b = y_1 - kx_1\ .$$

3. Найдем уравнение медианы AD, проведенной из вершины A. По определению, медиана делит противоположную к вершине A сторону BC пополам. Координаты середины стороны BC вычисляем по формулам

$$x_4 = \frac{x_2 + x_3}{2}, \quad y_4 = \frac{y_2 + y_3}{2}.$$

Это координаты точки D. Уравнение медианы $\dfrac{y - y_1}{y_4 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_4 - x_1}$.

4. Найдем уравнение высоты CE, опущенной из вершины C. Высота CE является частью прямой, проходящей через заданную точку C перпендикулярно известной прямой AB. Уравнение такой прямой есть $y - y_3 = -\dfrac{1}{k}(x - x_3)$; число k получено выше при построении прямой AB. Последнее уравнение запишем в виде $y = qx + c$.

5. Найдем уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно стороне AB. Уравнение этой прямой есть $y - y_3 = k(x - x_3)$.

6. Найдем внутренний угол при вершине A. Косинус этого угла вычисляется по формуле

$$\cos\angle A = \frac{(x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)}{|AB| \cdot |AC|},$$

где $|AB|, |AC|$ – длины сторон AB и AC соответственно.

7. Найдем площадь треугольника. Она вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right|.$$

8. Найдем координаты точки E (x_5, y_5) как точки пересечения прямых AB и CE. Для этого необходимо решить систему уравнений $\begin{cases} y = kx + b \\ y = qx + c \end{cases}$.

Числа k, b, q, c найдены выше.

Пример. Треугольник задан координатами своих вершин A (5, -3), B (0, 4), C (-1, 1).

1. Длина стороны AB $|AB| = \sqrt{(0-5)^2 + (4+3)^2} = 8{,}6$.
2. Уравнение стороны AB $\dfrac{y+3}{4+3} = \dfrac{x-5}{0-5} \Rightarrow y = -\dfrac{7}{5}x + 4$, $k = -\dfrac{7}{5}$, $b = 4$.
3. Координаты точки D, являющейся серединой отрезка AB:
$$x_4 = \frac{0-1}{2} = -\frac{1}{2}, \quad y_4 = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2}.$$
Уравнение медианы AD: $\dfrac{y+3}{\frac{5}{2}+3} = \dfrac{x-5}{-\frac{1}{2}-5} \Rightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{1}{3}$.
4. Уравнение высоты CE: $y - 1 = \dfrac{5}{7}(x+1) \Rightarrow y = \dfrac{5}{7}x + \dfrac{12}{7}$.
5. Уравнение прямой, проходящей через точку C параллельно AB:
$$y - 1 = -\frac{7}{5}(x+1) \Rightarrow y = -\frac{7}{5}x - \frac{2}{5}.$$
6. Находим длину стороны AC:
$|AC| = \sqrt{(-1-5)^2 + (1+3)^2} = 7{,}21$ и косинус угла при вершине A:
$$\cos\angle A = \frac{(0-5)(-1-5) + (4+3)(1+3)}{8{,}6 \cdot 7{,}21} = 0{,}935,$$
$$\angle A = \arccos 0{,}935 \approx 21^0.$$
7. Площадь треугольника: $S = \dfrac{1}{2}\left|(0-5)(1+3) - (-1-5)(4+3)\right| = 11$ (кв. ед.)
8. Координаты точки E (x_5,y_5) находим, решая систему уравнений:
$$\begin{cases} y = -\dfrac{7}{5}x + 4 \\ y = \dfrac{5}{7}x + \dfrac{12}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_5 = 1{,}08 \\ y_5 = 2{,}49 \end{matrix}.$$

2. Кривые второго порядка

2.1. Общие замечания

На координатной плоскости уравнение $f(x, y) = 0$, связывающее переменные x и y, задает некоторую линию. Действительно, полагая $x = x_m$, получим уравнение с одной неизвестной $f(x_m, y) = 0$, решая которые найдем $y = y_m$. Полученная пара чисел (x_m, y_m) задает точку плоскости. Перебирая x, получим набор точек (x, y), которые вместе образуют некоторую линию. В простейшем случае функция $f(x, y)$ – линейная, т.е. $y = kx + b$. Это уравнение прямой линии. Если $f(x, y)$ квадратичная функция, то имеем уравнение кривой второго порядка

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + g = 0, \qquad (2.1)$$

где *a, b, c, d, e, g* – постоянные.

В зависимости от значений коэффициентов уравнение (2.1) описывает:

1) пустое множество (нет линии); одну точку; пару скрещивающихся, параллельных или совпадающих прямых;
2) эллипс (в частном случае – окружность);
3) гиперболу;
4) параболу.

2.2. Канонические уравнения эллипса, гиперболы, параболы

В подходящей системе координат (т.е. должным образом выбраны начало координат и ориентация осей) канонические уравнения перечисленных кривых принимают вид:

1) эллипс $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,; \qquad (2.2)$$

2) гипербола $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\,; \qquad (2.3)$$

3) парабола $$y=2px\,. \qquad (2.4)$$

2.3. Эллипс

Эта кривая изображена на рис.1.

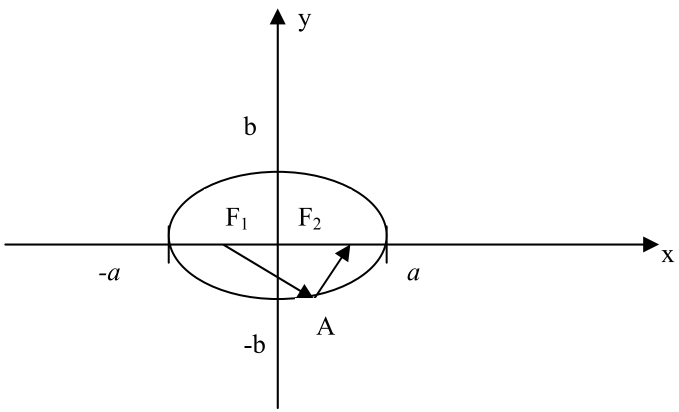


Рис. 1.

Когда $a>b$, эллипс вытянут вдоль *x*; если $a<b$, он вытянут вдоль оси *y*; если *a*=*b* имеем окружность радиуса *a*. Отрезки длины *a* и *b* на осях координат называют полуосями эллипса. Далее считаем $a>b$. Тогда на оси *x* внутри эллипса расположены две характерные точки F_1 и F_2, называемые фокусами эллипса. Расстояние *C* от центра эллипса до его фокусов находят по формуле $C=\sqrt{a^2-b^2}$. Замечательное свойство фокусов эллипса состоит в том, что все лучи (света), испущенные из одного фокуса, после отражения по законам оптики соберутся в другом. Один из таких лучей показан на рис.1.

Эксцентриситетом эллипса ε называют отношение фокусного расстояния 2*C* к длине большой оси 2*a*: $\varepsilon = c/a$. Можно сказать, что эксцентриситет – это степень вытянутости эллипса.

У окружности $\varepsilon=0$ и каноническое уравнение имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2\,.$$

2.4. Гипербола

Эта кривая изображена на рис.2.

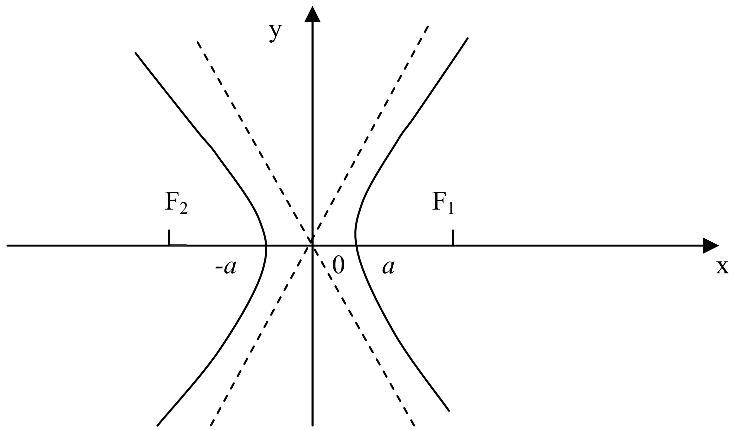


Рис. 2.

Отрезок длины *a* от начала координат вдоль оси *x* до любой из вершин гиперболы называют ее действительной полуосью. Отрезок длины *b* вдоль оси *y* называют мнимой полуосью гиперболы. Точки F_1 и F_2 на оси *x* – фокусы гиперболы. Расстояние $|OF_1|=|OF_2|=c=\sqrt{a^2+b^2}$ называют фокусным расстоянием. Эксцентриситетом гиперболы называют число $\varepsilon = {}^{c}\!/\!_{a}$. Пунктирные прямые на рис.2 – это асимптоты гиперболы. Эти прямые определяются уравнениями $y = \pm\dfrac{b}{a}x$.

Уравнение $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \qquad (2.5)$$

также есть уравнение гиперболы (рис.3).

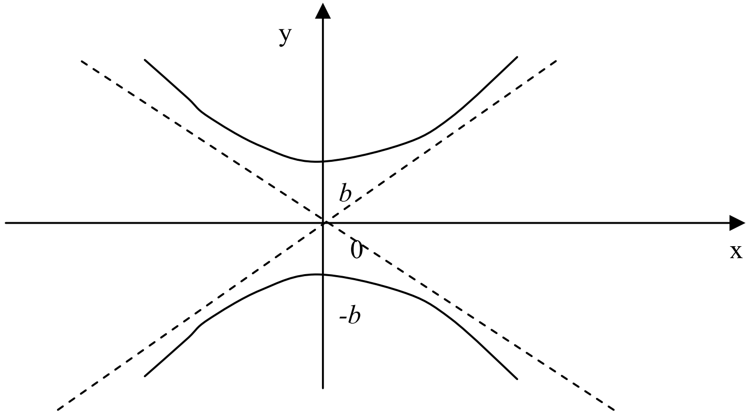


Рис. 3.

2.5. Парабола

Уравнение $y^2 = 2px$ задает параболу. Она при $p > 0$ имеет вид, изображенный на рис.4.

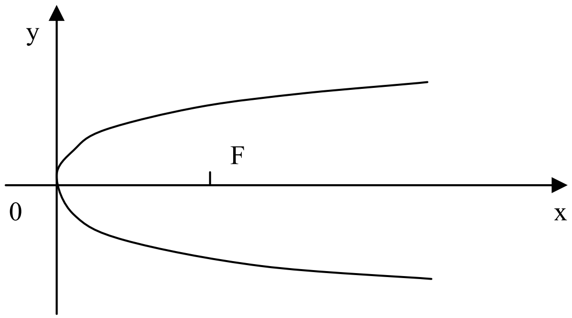


Рис.4

Число $\dfrac{p}{2} = |OF|$ задает положение фокуса параболы. Он находится на оси *x*. Например, $y^2 = x$ имеет $p = {}^{1}\!/\!_{2}$ и фокусное расстояние $|OF| = {}^{1}\!/\!_{4}$

Уравнение $$x^2 = 2qy \qquad (2.6)$$

тоже задает параболу (рис.5).

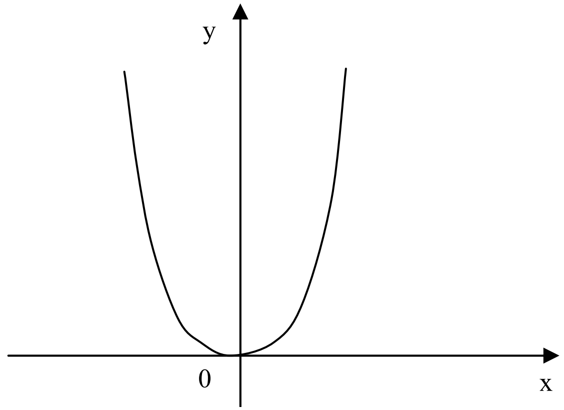


Рис. 5.

2.6. Приведение уравнения кривой второго порядка к каноническому виду

Пусть в формуле (2.1) b=0. Останется
$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + g = 0\,. \qquad (2.7)$$
Приведем (2.7) к одному из канонических уравнений (2.2–2.6).

Вначале считаем $a \neq 0$, $c \neq 0$. Выделим в (2.7) полные квадраты:
$$a\left(\left(x^2 + 2\frac{d}{2a}x + \left(\frac{d}{2a}\right)^2\right) - \left(\frac{d}{2a}\right)^2\right) + c\left(y^2 + 2\frac{e}{2c}y + \left(\frac{e}{2c}\right)^2 - \left(\frac{e}{2c}\right)^2\right) + g =$$
$$= a\left(x + \frac{d}{2a}\right)^2 + c\left(y + \frac{e}{2c}\right)^2 + p = 0, \qquad (2.8)$$
где $p = g - \dfrac{d^2}{4a} - \dfrac{e^2}{4c}$. Полагая $x' = x + \dfrac{d}{2a}$, $\quad y' = y + \dfrac{e}{2c}$, получим
$$a(x')^2 + c(y')^2 + p = 0\,. \qquad (2.9)$$

1. Если $p=0$, то при ac<0 уравнение (2.9) описывает две скрещивающиеся прямые $y' = \pm\sqrt{-\frac{a}{c}}x'$.
2. Если p=0, то при ac>0 уравнение (2.9) описывает одну точку $x' = y' = 0$.
3. Если p>0, a>0, c>0, то уравнение (2.9) описывает пустое множество.
4. Если p>0, a<0, c<0, то уравнение (2.9) описывает эллипс (после деления на p).
5. Если p>0, то при ac<0, имеем гиперболу.
6. Если p<0, a>0, c>0, имеем эллипс.
7. Если p<0, a<0, c<0, уравнение (2.9) описывает пустое множество.
8. Если p<0, ac<0, имеем гиперболу.

Пусть в (2.7) $a=0, \quad c\neq 0, \quad d\neq 0$. Выделим полный квадрат:

$$cy^2+dx+ey+g=c\left(y^2+2\frac{e}{2c}+\left(\frac{e}{2c}\right)^2-\left(\frac{e}{2c}\right)^2\right)+dx+g=$$

$$=c\left(y+\frac{e}{2c}\right)^2+d\left(x+\frac{p}{d}\right)=0,$$

где $p=g-\frac{e^2}{4c}$. Полагая $x'=x+\frac{p}{d}, \quad y'=y+\frac{e}{2c}$, получим $c(y')^2+dx'=0$, что преобразуется к уравнению параболы $(y')^2=2qx', \quad q=-\frac{d}{2c}$.

Пример. Привести к каноническому виду

$$9x^2-4y^2-18x-16y-43=0.$$

$$9(x^2-2x+1-1)-4(y^2+4y+4-4)-43=9(x-1)^2-4(y+2)^2-36=0.$$

Заменим $x'=x-1, \quad y'=y+2$. Получили каноническое уравнение гиперболы: $\frac{(x')^2}{a^2}-\frac{(y')^2}{b^2}=1$, $\qquad \frac{(x')^2}{4}-\frac{(y')^2}{9}=1$.

Действительная полуось гиперболы a=2, мнимая b=3. Фокусное расстояние с=$\sqrt{13}$, эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{13}/2$.

Уравнения асимптот $y=\pm\frac{3x}{2}$.

III. ПРЕДЕЛЫ

1. Определения пределов функций и их свойства

Числовой последовательностью называется функция натурального аргумента n: $x_n=f(n), \quad n=1,2,3...$ Число A называется пределом последовательности $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое натуральное число N, что при всех n>N выполняется неравенство $|x_n-A|<\varepsilon$. Предел последовательности $\{x_n\}$ обозначают $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.
Последовательность, имеющая предел называется сходящейся, иначе она называется расходящейся.

Число A называют пределом функции $y=f(x)$ при $x\to a$, если для любого числа $\varepsilon>0$ найдется такое число $\delta>0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$. Предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, обозначают $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$; либо $f(x)\to A$ при $x\to a$.

Число A называют пределом функции $y=f(x)$ при $x\to\infty$ или $x\to-\infty$, если для любого числа $\varepsilon>0$ можно указать положительное число N, такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $|x|\rangle N$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют пределы при $x\to a$. Тогда

$$\lim_{x\to a}[f(x)+\varphi(x)]=\lim_{x\to a}f(x)+\lim_{x\to a}\varphi(x),$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]=\left[\lim_{x\to a}f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to a}\varphi(x)\right],$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}, \qquad \text{(при этом } \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0\text{)}.$$

Аналогичные свойства имеют пределы числовых последовательностей, а также пределы при $x\to\pm\infty$. Заметим, что никакая функция $y=f(x)$ не может иметь более одного предела в точке a.

Примеры.

$$\lim_{x\to 2}(5x^2-2x+4)=\lim_{x\to 2}(5x^2)-\lim_{x\to 2}(2x)+\lim_{x\to 2}4=5\lim_{x\to 2}x^2-2\lim_{x\to 2}x+4=$$
$$=5\cdot 4-2\cdot 2+4=20.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-3n+1}{2n^2+100n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{100}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(2+\frac{100}{n}\right)}=\frac{1-0+0}{2+0}=\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to1}(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2}.$$

2. Первый и второй замечательные пределы

Если x выражен в радианах, то $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ – это первый замечательный предел. Его различные формы:

$$\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{tgx}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{x}{tgx}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to0}\frac{arctgx}{x}=1,\quad \lim_{x\to0}\frac{x}{arctgx}=1.$$

Примеры.

$$\lim_{x\to2}\frac{\sin(2x-4)}{x-2}=\lim_{y\to0}\frac{\sin 2y}{y}=2\lim_{y\to0}\frac{\sin 2y}{2y}=2\lim_{z\to0}\frac{\sin z}{z}=2\cdot1=2.$$

Мы произвели замены $x-2=y$, $y\to0$, а затем $2y=z$, $z\to0$.

$$\lim_{x\to0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=\frac{2}{3}.$$

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

Второй замечательный предел:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

где число e равно e=2,71828…(это число иррациональное).

Его различные формы: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$,

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1,\qquad \lim_{x\to0}\frac{(1+x)^p-1}{x}=p.$$

Примеры.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+3}\right)^n=\left|\frac{n+3}{2}=y,\quad n=2y-3\right|=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y-3}=$$

$$=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^2\cdot\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-3}\right]=e^2\cdot1^{-3}=e^2.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{mx}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{x}{k}}\right]^{mk}=e^{mk}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{x}\right)^{-x}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

$$\lim_{x\to0}\{x[\ln(x+a)-\ln x]\}=\lim_{x\to0}\left\{x\cdot\ln\frac{x+a}{x}\right\}=\lim_{x\to0}\left\{x\cdot\ln\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}=$$

$$=\ln\left\{\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{\frac{x}{a}}\right\}^a=\ln e^a=a\ln e=a$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-1\right)\right]^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right]^{\frac{2x^2}{x^2-1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1}}=e^2$$

IV. ПРОИЗВОДНЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1. Основные понятия. Правила дифференцирования

Приращением аргумента x функции $y=f(x)$ в точке x_0 называют разность $\Delta x=x-x_0$. Приращением функции $y=f(x)$ в точке x_0 называют разность $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называют предел отношения приращения этой функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю.

Обозначение производной в точке x_0: $f'(x_0)$. Следовательно, по определению:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Другие обозначения производной: y', $\dfrac{dy}{dx}$.

Геометрический смысл производной функции в точке x_0: производная равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Физический смысл производной. Пусть $y = f(t)$ – закон прямолинейного движения точки. Тогда $f'(t_0)$ равна скорости этой точки в момент t_0.

Операция нахождения производной называется дифференцированием. В результате дифференцирования функции $f(x)$ возникает новая функция $z = f'(x)$. От нее также может быть взята производная z'. Так возникают вторые производные y'', $f''(x)$.

Приведем основные правила дифференцирования. Пусть $u(x)$ и $v(x)$ – две функции. Тогда

$(u \pm v)' = u' \pm v'$,

$(uv)' = u'v + uv'$, $\Rightarrow$ $(Cu)' = Cu'$ $(C = Const)$,

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Особенно важным является правило дифференцирования сложной функции. Пусть $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$. Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Приведем основные формулы дифференцирования:

$C' = 0$ $(C = Const)$, $(x^{\alpha})' = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}$,

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$,

$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$,

$(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$,

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$,

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,

$(arctgx)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$, $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1 + x^2}$.

Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha - 1} \cdot u'$

$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$, $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$,

$(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$, $(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$,

$(a^u)' = a^u \cdot u' \cdot \ln a$, $(e^u)' = e^u \cdot u'$.

Аналогично преобразуются и все остальные основные формулы дифференцирования.

Пример. $y = \sqrt{2x} + \dfrac{1}{4x^2}$.

$$y' = \left(\sqrt{2x} + \frac{1}{4x^2}\right)' = \left(2^{1/2} x^{1/2}\right)' + \left(\frac{1}{4} x^{-2}\right)' = \sqrt{2}\left(x^{1/2}\right)' + \frac{1}{4}\left(x^{-2}\right)' =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} x^{-1/2} - \frac{2}{4} x^{-3}.$$

Пример. $y = \dfrac{\sin 2x}{x^2 + 4}$.

$$y' = \left(\frac{\sin 2x}{x^2 + 4}\right)' = \frac{(\sin 2x)'(x^2 + 4) - \sin 2x (x^2 + 4)'}{(x^2 + 4)^2} =$$

$$= \frac{2(x^2 + 4)\cos 2x - 2x \sin 2x}{(x^2 + 4)^2}.$$

Пример. $y = x^3 2^x$. $y' = \left(x^3 2^x\right)' = \left(x^3\right)' 2^x + x^3 \left(2^x\right)' = 3x^2 2^x + x^3 2^x \ln 2.$

Пример. $y = \sin\sqrt{1 - x^2}$.

$$y'=\left(\sin\sqrt{1-x^2}\right)'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\sqrt{1-x^2}\right)'=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\left(\left(1-x^2\right)^{1/2}\right)'=$$

$$=\cos\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\left(1-x^2\right)'=-2x\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1-x^2\right)^{-1/2}\cdot\cos\sqrt{1-x^2}=$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cos\sqrt{1-x^2}.$$

2. Исследование функций с помощью производных

Исследование функций проводится по следующей схеме:

1. Находим область определения функции, ее точки разрыва.
2. Изучаем изменение функции при стремлении ее аргумента к концам промежутков области определения.
3. Находим точки экстремумов, промежутки возрастания и убывания функции.
4. Вычисляем значения функции в экстремальных точках.
5. Определяем промежутки выпуклости и вогнутости функции, точки перегиба.
6. Находим точки пересечения графика функции с осями координат.
7. Находим асимптоты функции.
8. Строим график.

Исследуем по этой схеме функцию $y=\dfrac{x^2+9}{x-4}$.

1. Область определения. Функция определена всюду, кроме точки x=4. Таким образом, область ее определения $x\in(-\infty,4)\cup(4,\infty)$.
2. Поведение функции на концах промежутков области определения:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x\cdot\dfrac{1+9/x^2}{1-4/x}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to4-0}y=\lim\limits_{x\to4-0}\left[\cdot\dfrac{x^2+9}{x-4}\right]=\lim\limits_{x\to4-0}\dfrac{16+9}{x-4}=-\infty$;

г) $\lim\limits_{x\to4+0}y=\lim\limits_{x\to4+0}\left[\cdot\dfrac{x^2+9}{x-4}\right]=\lim\limits_{x\to4+0}\dfrac{16+9}{x-4}=\infty$.

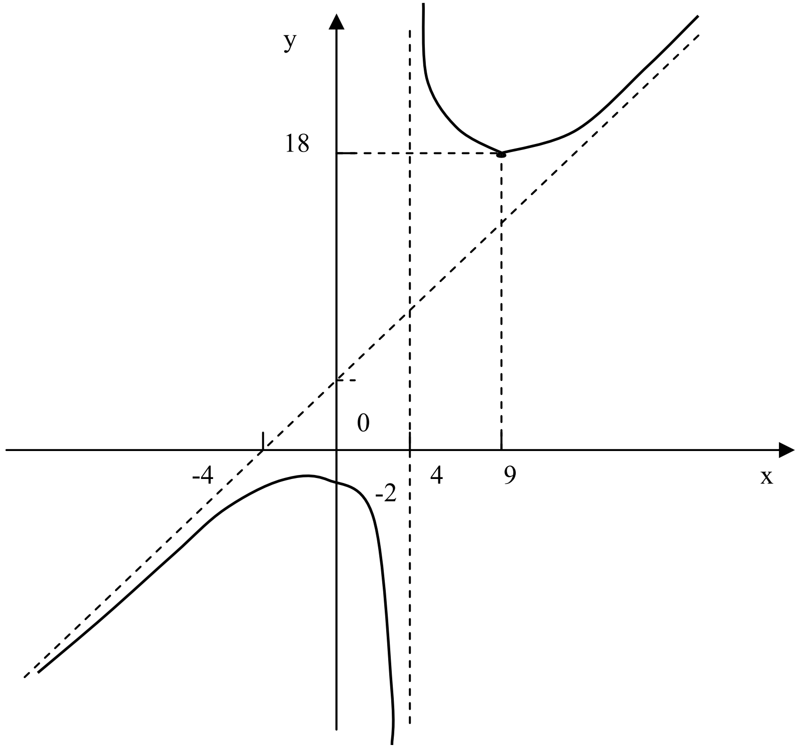
3. Экстремумы, промежутки возрастания и убывания функции. В силу геометрической интерпретации производной, функция возрастает на тех интервалах, где ее производная больше нуля, и убывает на тех интервалах, где ее производная отрицательна. В тех точках, где производная функции равна 0, можно ожидать существование максимального или минимального значения функции. Сказанное относится к любым (дифференцируемым) функциям. В нашем случае
$$y'=\frac{2x(x-4)-\left(x^2+9\right)}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x-9}{(x-4)^2}.$$
$$x^2-8x-9=0,\quad\Rightarrow\quad x_1=-1,\quad x_2=9\quad\Rightarrow y'=\frac{(x+1)(x-9)}{(x-4)^2}.$$
Таким образом, $y'<0$ при $-1<x<9$. На этом интервале функция убывает. На интервалах $x<-1$ и $x>9$ функция возрастает, так как здесь $y'>0$. В точке $x=-1$ имеем максимум, а в точке $x=9$ – минимум функции.
4. Значения функции в экстремальных точках
$$y(-1)=\frac{(-1)^2+9}{-1-4}=-2,\qquad y(9)=\frac{9^2+9}{9-4}=18.$$
5. Выпуклость. На тех интервалах, где вторая производная функции $f(x)$ меньше нуля, функция выпукла вверх. На тех интервалах, где ее вторая производная больше нуля, функция выпукла вниз. Точки, где вторая производная равна нулю, называют точками перегиба. В нашем случае
$$y''=\left(\frac{x^2-8x-9}{(x-4)^2}\right)'=\frac{(2x-8)(x-4)^2-(x^2-8x-9)\cdot2(x-4)}{(x-4)^4}=\frac{50}{(x-4)^3}.$$
Таким образом, функция выпукла вверх при $x<4$ (здесь $y''<0$) и выпукла вниз при $x>4$ (здесь $y''>0$). Точек перегиба исследуемая функция не имеет.
6. Пересечение графиком осей координат.
Пусть x=0. Тогда $y(0)=\dfrac{0+9}{0-4}=-\dfrac{9}{4}$, $\Rightarrow$ ось y пересекается графиком при $y=-\dfrac{9}{4}$. Пусть y=0 $\Rightarrow$ $\dfrac{x^2+9}{x-4}=0$. Это уравнение решений не имеет, следовательно, ось x графиком не пересекается.
7. Асимптоты. Асимптотой называется прямая, к которой график приближается неограниченно при неограниченном удалении точки графика от начала координат. Асимптоты бывают вертикальные и наклонные. Горизонтальные асимптоты относят к наклонным.

Если $y \to +\infty$ или $y \to -\infty$ при приближении x к a, то в точке $x{=}a$ функция y имеет вертикальную асимптоту. Наклонные асимптоты описываются уравнением прямой $y{=}kx{+}b$, где коэффициенты k и b находятся по формулам

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\infty} \left[f(x) - kx \right].$$

В нашем случае имеется вертикальная асимптота в точке $x{=}4$ и наклонная $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+9}{x(x-4)} = 1$, $b = \lim\limits_{x\to\infty} \left[\dfrac{x^2+9}{x-4} - x \right] = 4$, $\Rightarrow$ $y = x + 4$.

8. Строим график функции на основе исследования.



V. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области

При проведении исследования функции двух и нескольких переменных на экстремум следует иметь в виду, что точки экстремума могут находиться как среди точек, в которых частные производные равны нулю, так и среди точек, в которых частные производные не существуют. Например, функция $\sqrt{x^2 + y^2}$ имеет минимум в точке (0, 0), тогда как в этой точке ее частные производные не существуют.

При отыскании наибольшего и наименьшего значений функции в некоторой замкнутой области следует найти все внутренние точки области, в которых функция может иметь экстремум, вычислить значения функции в этих точках и сравнить их со значениями функции в граничных точках области; наибольшее (наименьшее) из этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции во всей замкнутой области. Покажем как это делается.

Задача 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в замкнутой области, ограниченной осью Oy, прямой $y{=}2$ и параболой $y = \dfrac{1}{2}x^2$ при $x \geq 0$ (рис.6).

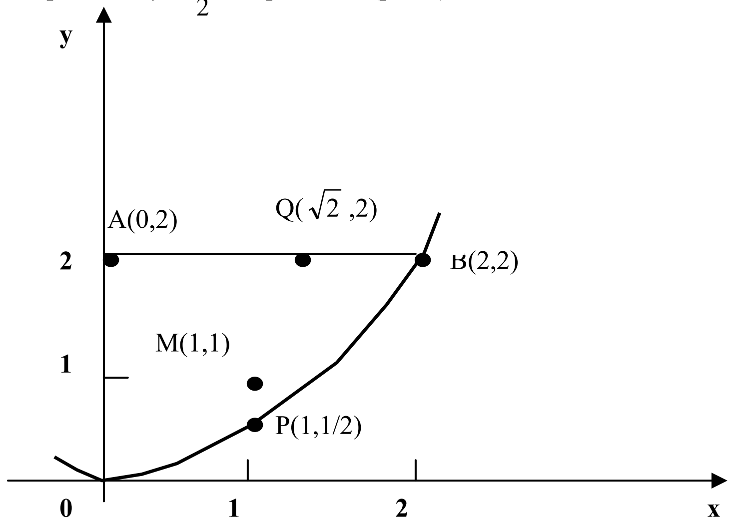


Рис. 6.

Решение. Точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения, могут находиться как внутри области, так и на ее границе. Если функция принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то в этой точке частные производные

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 6y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -6x + 6y$$

равны нулю. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ -6x + 6y = 0 \end{cases}$$

найдем две точки O(0,0) и M(1,1), в которых обе частные производные равны нулю. Первая из них принадлежит границе области. Следовательно, если функция *z* принимает наибольшее (наименьшее) значение во внутренней точке области, то это может быть только в точке M(1,1).

Перейдем к исследованию функции на границе области. На отрезке OA имеем x=0, и поэтому на этом отрезке $z = 3y^2 \quad (0 \le y \le 2)$ есть возрастающая функция от одной переменной *y*; наибольшее и наименьшее значения она принимает на концах отрезка *OA*. На отрезке *AB* имеем *y=2*, и потому на этом отрезке функция

$$z = 2x^3 - 6x \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 = 2x^3 - 12x + 12 \qquad (0 \le x \le 2)$$

представляет собой функцию одной переменной x; ее наибольшее и наименьшее значения находятся среди ее значений в критических точках и на концах отрезка.

Находим производную $z' = 6x^2 - 12$. Решая уравнение $z' = 6x^2 - 12 = 0$, находим $x = \pm\sqrt{2}$. Внутри отрезка $(0 \le x \le 2)$ имеется лишь одна критическая точка $x = \sqrt{2}$; соответствующей точкой отрезка *AB* является точка $Q(\sqrt{2}, 2)$.

Итак, из всех значений функции *z* на отрезке *AB* наибольшее и наименьшее находятся среди ее значений в точках *A*, *Q* и *B*.

На дуге *OB* параболы $y = \frac{1}{2}x^2$ имеем

$$z = 2x^3 - 6x\left(\frac{1}{2}x^2\right) + 3\left(\frac{1}{2}x^2\right)^2 = \frac{3}{4}x^4 - x^3 \qquad (0 \le x \le 2).$$

Решаем уравнение $z' = 3x^3 - 3x^2 = 0$, или $x^2(x-1) = 0$. Находим его корни: *x*=0 и *x*=1. Таким образом, из всех значений функции *z* на дуге *AB* наибольшее и наименьшее находятся среди ее значений в точках *O*, *P* и *B*.

Следовательно, наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^3 - 6xy + 3y^2$ в данной замкнутой области находятся среди ее значений в точках *O, A, Q, B, P, M*, т.е. среди значений:

$$z(O) = z(0,0) = 0; \qquad z(A) = z(0,2) = 12;$$

$$z(Q) = z\left(\sqrt{2}, 2\right) = 12 - 8\sqrt{2}; \qquad z(B) = z(2,2) = 4;$$

$$z(P) = z\left(1, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}; \qquad z(M) = z(1,1) = -1.$$

Наибольшее и наименьшее из них равны 12 и –1. Они и являются наибольшим и наименьшим значениями данной функции в данной замкнутой области: $z_{наиб} = 12, \quad z_{наим} = -1$.

2. Метод наименьших квадратов

Пусть в результате опыта получено *n* значений функции *y* при соответствующих значениях аргумента *x*:

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

По этим данным методом наименьших квадратов можно найти формулу вида $y = ax + b$. Для параметров *a* и *b* составляется система двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i x_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0, \end{cases} \qquad (2.1)$$

из которых и определяются эти параметры.

Задача. Найти формулу вида $y = ax + b$ методом наименьших квадратов по следующим данным:

x	1	2	3	4	5
y	3	4	2,5	0,5	1

Решение. Для определения параметров a и b составим систему вида (2.1):

$$\begin{cases} 25{,}5 - 55a - 15b = 0, \\ 11 - 15a - 5b = 0. \end{cases} \quad \text{Отсюда} \quad \begin{cases} 55a + 15b = 25{,}5, \\ 15a + 5b = 11. \end{cases}$$

По формулам Крамера из этой системы находим a= - 0,75, b=4,45.
Искомая формула принимает вид $y = -0{,}75x + 4{,}45$.

VI. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Основные определения и свойства интегралов

Функция $F(x)$ называется первообразной данной функции $f(x)$ на интервале (a, b), если в любой точке $x \in (a,b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Если $F(x)$ – первообразная, то любая другая функция $\Phi(x)$ вида $\Phi(x)=F(x)+c$, где $c=Const$, также является первообразной.

Неопределенным интегралом от данной функции f(x) называется совокупность всех ее первообразных $\Phi(x)=F(x)+c$, что символически записывается в виде

$$\int f(x)dx = F(x) + c .$$

Операция нахождения первообразной называется интегрированием .

Свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ – производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$ – дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению.
3. $\int d\varphi(x) = \varphi(x) + c$ – неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной c.
4. Если $k=Const$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ – постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.
5. $\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$ – интеграл от суммы двух функций равен сумме интегралов от каждой из функций.

Непосредственным интегрированием называется интегрирование, основанное на свойствах интеграла с применением алгебраических, тригонометрических преобразований и таблицы интегралов.

2. Таблица интегралов

1. $\int dx = x + c$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (n \neq -1)$
3. $\int (1/x)dx = \ln|x| + c \qquad (x \neq 0)$
4. $\int \sin kx\, dx = -\dfrac{1}{k}\cos kx + c$
5. $\int \cos kx\, dx = \dfrac{1}{k}\sin kx + c$
6. $\int \operatorname{tg} kx\, dx = -\dfrac{1}{k}\ln|\cos kx| + c \qquad (x \neq \dfrac{\pi}{2k} + \dfrac{\pi n}{k})$
7. $\int \operatorname{ctg} kx\, dx = \dfrac{1}{k}\ln|\sin kx| + c \qquad (x \neq \dfrac{\pi n}{k})$
8. $\int \dfrac{1}{\cos^2 kx}dx = \dfrac{1}{k}\operatorname{tg} kx + c \qquad (x \neq \dfrac{\pi}{2k} + \dfrac{\pi n}{k})$
9. $\int \dfrac{1}{\sin^2 kx}dx = -\dfrac{1}{k}\operatorname{ctg} kx + c \qquad (x \neq \dfrac{\pi n}{k})$
10. $\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \qquad (a \neq 1,\ a>0)$
11. $\int e^{kx}\, dx = \dfrac{1}{k}e^{kx} + c$
12. $\int sh\, kx\, dx = \dfrac{1}{k}\, ch\, kx + c$
13. $\int ch\, kx\, dx = \dfrac{1}{k}\, sh\, kx + c$
14. $\int th\, kx\, dx = \dfrac{1}{k}\ln|chkx| + c$
15. $\int cth\, kx\, dx = \dfrac{1}{k}\ln|shkx| + c$
16. $\int \dfrac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \dfrac{1}{a}arctg\dfrac{x}{a} + c \\ -\dfrac{1}{a}arcctg\dfrac{x}{a} + c \end{cases}$
17. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + c \qquad (x \neq \pm a)$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + c \\ -\arccos \frac{x}{a} + c \end{cases}$ $(-a< x< a)$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$

20. $\int \frac{1}{ch^2 kx} dx = \frac{1}{k} th\ kx + c$

21. $\int \frac{1}{sh^2 kx} dx = -\frac{1}{k} cth\ kx + c$ $(x \neq 0)$

22. $\int \frac{1}{\cos x}\ dx = \ln\left|tg(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4})\right| + c$

23. $\int \frac{1}{\sin x}\ dx = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + c$

3. Методы интегрирования неопределенных интегралов

1. Пусть интеграл имеет вид: $\int F(x)) f`(x) dx$, тогда делается подстановка $f(x)=t$.

2. Пусть интеграл имеет вид: $\int u(x)v'(x)dx = \int udv$, тогда применяется интегрирование по частям по формуле $\int udv = uv - \int vdu$.

Интегрирование по частям применяется к интегралам вида $\int C(x) f(x) dx$, где $P(x)$ – многочлен любой степени (в частности, степенная функция x^n), а $f(x)$ – одна из следующих функций: e^{ax}, $\cos ax$, $\sin ax$, $\ln x$, $arctg\ x$, $\arcsin x$, а также к интегралам вида: $\int a^{kx} \sin bx\ dx$, $\int a^{kx} \cos bx\ dx$, $\int e^{kx} \sin bx\ dx$, $\int e^{kx} \cos bx\ dx$.

3. Пусть интеграл имеет вид: $\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q} dx$, $p^2 - 4q < 0$, тогда проводится выделение полного квадрата $x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)$, затем подстановка $x + \frac{p}{2} = t$, $\sqrt{q - \frac{p^2}{4}} = a$.

4. Пусть интеграл имеет вид: $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$, $P_m(x)$ – многочлен степени m, $Q_n(x)$ – многочлен степени n, тогда при $m \geq n$ проводится выделение целой части

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = L(x) + \frac{R_k(x)}{Q_n(x)}, \qquad k<n.$$

Далее проводим разложение знаменателя $Q_n(x)$ на множители вида $(ax + b)^r$ и $\left(x^2 + px + q\right)^S$, а затем разложение правильной дроби $\frac{R_k(x)}{Q_n(x)}$ на простейшие дроби четырех типов: 1. $\frac{A}{(ax+b)}$; 2. $\frac{B}{(ax+b)^r}$; 3. $\frac{Mx + N}{x^2 + px + q}$; 4. $\frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^n}$.

5. Пусть интеграл имеет вид: $\int R(\sin x, \cos x) dx$, тогда проводится универсальная подстановка $tg \frac{x}{2} = t$, применение которой рационализирует интеграл, приводя его к виду: $\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}$

Частные случаи:

1. Если $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тогда проводится подстановка $\cos x = t$.

2. Если $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, тогда проводится подстановка $\sin x = t$.

3.Если $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, тогда проводится подстановка $tg x = t$.

6. Пусть интеграл имеет вид: $\int \sin \alpha x \cos \beta x\, dx$, $\int \sin \alpha x \sin \beta x\, dx$, $\int \cos \alpha x \cos \beta x dx$, тогда проводится разложение подынтегральной функции по формулам:

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta)x + \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta)x,$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta)x - \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)x,$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta)x + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta)x.$$

7. Пусть интеграл имеет вид: $\int \sin^m x \cdot \cos^n xdx$, тогда при $m = 2k+1$ – нечетном положительном подстановка $\cos x = t$, а при $n = 2k+1$ – нечетном положительном, подстановка $\sin x = t$.

8. Пусть интеграл имеет вид: $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx$, тогда при $m+n=2k$ – четном отрицательном подстановка $tg\, x = t$.

9. Пусть интеграл имеет вид: $\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx$, тогда при $m = 2k$ и $n = 2k$ – четных применяются формулы половинного аргумента $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$, $1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$.

10. Пусть интеграл имеет вид: $\int R\left[x, \sqrt[n]{x^m}, ..., \sqrt[s]{x^r}\right] dx$, тогда проводится подстановка $x = t^k$, где k – наименьшее общее кратное чисел $n, \ldots, s$, что приводит к интегралу вида: $\int R_1(t)dt$, т.е. рационализирует его

11. Пусть интеграл имеет вид:

$\int R\left[x, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}, ..., \sqrt[s]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^m}\right] dx$, тогда проводится подстановка $\frac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k – наименьшее общее кратное чисел $n, \ldots, s$.

12. Пусть интеграл имеет вид: $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, тогда проводится выделение полного квадрата под радикалом $ax^2 + bx + c = a[(x+\frac{b}{2a})^2 + (\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2})]$, а затем подстановка $x + \frac{b}{2a} = t$ и замена $\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} = \pm m^2$.

13. Пусть интеграл имеет вид: $\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$, тогда проводится обратная подстановка $x = \frac{1}{t}$, приводящая к интегралу вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

14. Пусть интегралы имеют вид: $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - \alpha^2})dx$, тогда проводится сведение к интегралам вида 5 подстановкой: $x = a \sin t$ (или $x = a\cos t$); $x = a$ tg t (или $x = a$ ctg t); $x = \frac{a}{\cos t}$ (или $x = \frac{a}{\sin t}$).

15. Пусть интеграл имеет вид: $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$, тогда проводится выделение полного квадрата под радикалом, как в интеграле 12, и сведение подстановкой $x + \frac{b}{2a} = t$ к интегралу вида 14.

4. Примеры

1. Непосредственное интегрирование:

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx = \int \frac{1-2x+x^2}{x^2} dx = \int x^{-2} dx - 2\int \frac{dx}{x} + \int dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x + c.$$

Если интеграл имеет вид $\int F(x) f'(x) dx$, то делается подстановка $f(x) = t$:

$$\int x\sqrt{1-x^2}\, dx = \int (1-x^2)^{\frac{1}{2}} x dx = -\frac{1}{2}\int (1-x^2)^{\frac{1}{2}}(-2x)dx = \begin{vmatrix} 1-x^2 = t \\ -2xdx = dt \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int t^{\frac{1}{2}} dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} + c = -\frac{1}{3}t\sqrt{t} + c = -\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2} + c.$$

2. Интегрирование по частям $\int u dv = uv - \int v du$.

$$\int x \sin x \cdot dx = \begin{vmatrix} x = u & \sin x \cdot dx = dv \\ dx = du & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x \cdot \cos x + \int \cos x \cdot dx = -x\cos x + \sin x + c.$$

3. Пусть интеграл имеет вид $\int \frac{Mx+n}{x^2+px+q} dx, \quad p^2 - 4q \langle 0$.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + c.$$

4. Пусть интеграл имеет вид $\int \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} dx$. Например, $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$.

Выпишем дробь $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ и разложим ее на простейшие дроби

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x+1}.$$

Найдем неопределенные коэффициенты А и В: $x=A(2x+1)+B(x+1)$, или

$x=(2A+B)x+(A+B)$.

$$\begin{cases}2A+B=1\\ A+B=0\end{cases}\qquad A=1,\quad B=-1.$$

Получим

$$\int\frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}=\int\frac{1}{x+1}dx-\int\frac{dx}{2x+1}=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln|2x+1|+c.$$

5. $\int\sin 2x\cos 4xdx=\frac{1}{2}\int\sin(-2x)dx+\frac{1}{2}\int\sin 6xdx=+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos 6x}{6}+c=$

$=\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{12}\cos 6x+c$.

6. $\int\frac{\sqrt{x}}{x+1}dx=\left|\begin{matrix}x=t^2\\ dx=2tdt\end{matrix}\right|=\int\frac{t\cdot 2tdt}{t^2+1}=2\int\frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt=2\left[\int dt-\int\frac{dt}{1+t^2}\right]=$

$=2t-2arctgt+c=2\sqrt{x}-2arctg\sqrt{x}+c.$

VII. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a,b]$ и $F(x)$ – ее первообразная, т.е. $F'(x)=f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b.$$

Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ при $f(x)\geq 0$ геометрически представляет собой площадь S, ограниченную кривой $y=f(x)$, осью Ox и двумя перпендикулярами к оси Ox: $x=a$ и $x=b$ (см. рис.7).

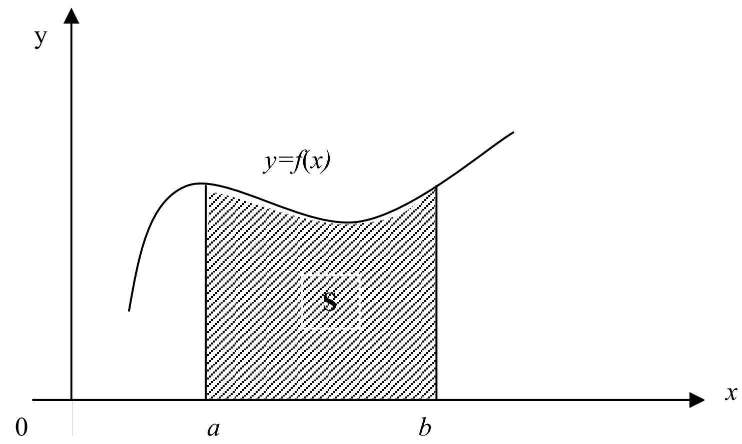


Рис. 7.

Пример. $\int_0^\pi\sin xdx=-\cos x\Big|_0^\pi=-[\cos\pi-\cos 0]=2$.

Это число равно площади фигуры, ограниченной одной аркой синусоиды и осью Ox.

2. Объем тела вращения

1. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции A_1ABB_1 (см. рис. 8), где AB – дуга кривой $y=f(x)$, определяется формулой

$$V=\lim_{\Delta x\to 0}\sum\pi\cdot y^2\Delta x=\int_{x_1}^{x_2}\pi\cdot y^2dx.$$

Дифференциал переменного объема $dV=\pi\cdot y^2dx.$

2. Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy криволинейной трапеции, прилежащей к оси Oy, определяется формулой

$$V=\lim_{\Delta y\to 0}\sum\pi\cdot x^2\Delta y=\int_{y_1}^{y_2}\pi\cdot x^2dy.$$

Дифференциал переменного объема $dV=\pi\cdot x^2dy.$

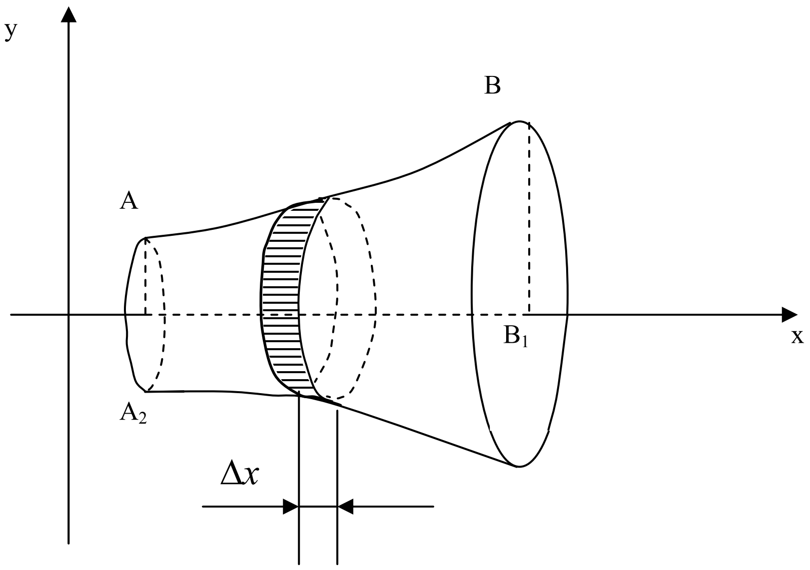


Рис. 8.

3. Методы интегрирования

Метод интегрирования по частям. Если $f(x)$, $g(x)$ – непрерывные функции на интервале $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)dx\,.$$

Метод замены переменной. Если:

1) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$;

2) функция $\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на сегменте $[\alpha,\beta]$, где $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$;

3) сложная функция $f(\varphi(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha,\beta]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\,.$$

Пример.

$$\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx = \left|\begin{matrix} x=u, & e^{-x}dx=dv \\ dx=dv, & v=-e^{-x}\end{matrix}\right| = -xe^{-x}\Big|_0^{\ln 2} + \int_0^{\ln 2} e^{-x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 - e^{-x}\Big|_0^{\ln 2} = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(1-\ln 2).$$

Пример.

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx = \left|\begin{matrix}\sqrt{x}=t & dx=2tdt\\ x=t^2, \alpha=2, & \beta=3\end{matrix}\right| = 2\int_2^3 \frac{t^2dt}{t-1} = 2\int_2^3 \frac{t^2-1+1}{t-1}dt =$$

$$= 2\left[\int_2^3 (t+1)dt + \int_2^3 \frac{dt}{t-1}\right] = 2\left[\frac{(t+1)^2}{2}\Big|_2^3 + \ln|t-1|\Big|_2^3\right] = 2[8-4{,}5+\ln 2-\ln 1] =$$

$$= 2[3{,}5+\ln 2] = 7 + 2\ln 2.$$

Примечание

Студенты специальностей «Юриспруденция» и «Психология» выполняют следующие контрольные задания:

1. Тема: Матрицы, действия над матрицами. *Задачи 1-10*;
2. Тема: Решение систем уравнений. *Задачи 11-20*;
3. Тема: Прямые на плоскости. *Задачи 21-30*;
4. Тема: Вычисление пределов. *Задачи 41-50* (кроме последнего примера);
5. Тема: Вычисление производных функций одной переменной. *Задачи 51-60*;
6. Тема: Исследование функций с помощью производных. *Задачи 61-70*;
7. Тема: Вычисление частных производных функций двух переменных. *Задачи 71-80*;
8. Тема: Метод наименьших квадратов. *Задачи 101-110*;
9. Тема: Вычисление неопределенных интегралов. *Задачи 111-120* (кроме двух последних примеров);
10. Тема: Применение определенных интегралов. *Задачи 121-130*.

Номер варианта совпадает с последней цифрой Вашего шифра.

Контрольные задания

Задачи 1-10. Даны матрицы

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 3 & 4 & -2\\ 1 & 0 & -1\end{bmatrix},\ E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Найти матрицу *C*:

1. *C=AB+2B-3E-AE*
2. *C=BE+AB-2A+2E*
3. *C=2A+AB-3E+BE*
4. *C=BE-AB+3A-EB*
5. *C=3A-4E+BE+BA*
6. *C=BA-2A+2E-BE*
7. *C=3A-BA+3B-5E*
8. *C=BA-2B+AE-5A*
9. *C=AB-AE+3B-2E*
10. *C=5B-AE+BA-2E*

Задачи 11-20. Решить систему уравнений методом Гаусса и по формулам Крамера.

11. $\begin{cases}2x+3y+z=11\\ 2x+y-z=1\\ x-y+2z=5\end{cases}$

12. $\begin{cases}3x-y+z=1\\ x-2y-z=-3\\ 2x-y-2z=0\end{cases}$

13. $\begin{cases}x+2y-z=1\\ 3x-y+2z=8\\ 2x+y+z=5\end{cases}$

14. $\begin{cases}7y+2z=18\\ 3x-y+3z=4\\ x+9y-z=16\end{cases}$

15. $\begin{cases}4x-y+2z=10\\ 3x+z=7\\ x-y+2z=4\end{cases}$

16. $\begin{cases}x+2z-y=5\\ 2x+z+3y=4\\ x-y+z=3\end{cases}$

17. $\begin{cases}2x-y-z=-3\\ x+2y+z=4\\ x-y+z=1\end{cases}$

18. $\begin{cases}x+y+2z=3\\ -x+2y+z=3\\ z+x+2y=1\end{cases}$

19. $\begin{cases}z+2y+x=2\\ x-z+y=3\\ x+y+2z=0\end{cases}$

20. $\begin{cases}x+2y+z=5\\ x-y-2z=-1\\ 2x+y+z=4\end{cases}$

Задачи 21-30. На плоскости задан треугольник координатами своих вершин *A* (x_1, y_1), *B*(x_2, y_2), *C*(x_3,y_3). Найти:

- Длину стороны *AB*;
- Уравнение стороны *AB*;
- Уравнение медианы *AD*;
- Уравнение высоты *CE*;
- Уравнение прямой, проходящей через вершину *C*, параллельно стороне *AB*;
- Внутренний угол при вершине *A*;
- Площадь треугольника;
- Координаты точки *E*;
- Сделать чертеж.

21. *A* (2,-2), *B* (1,4), *C* (-5,1).
22. *A* (1,5), *B* (7,2), *C* (7,9).
23. *A* (2,0), *B* (-4,3), *C* (1,5).
24. *A* (-1,0), *B* (0,-5), *C* (7,-2).
25. *A* (3,4), *B* (-6,0), *C* (-3,4).
26. *A* (-4,-1), *B* (-2,5), *C* (8,1).
27. *A* (5,2), *B* (-2,-2), *C* (0,-6).
28. *A* (5,3), *B* (-1,1), *C* (0,4).
29. *A* (1,2), *B* (5,1), *C* (4,6).
30. *A* (2,3), *B* (-3,1), *C* (-4,5).

Задачи 31-40. Привести уравнение кривой второго порядка к каноническому виду. Построить кривую.

31. $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$,
32. $x^2-3y^2+2x+6y-2=0$,
33. $2x^2-y^2+4x-2y+1=0$,
34. $2x^2+3y^2+4x+6y-1=0$,
35. $x^2-4y^2+2x+8y+1=0$,
36. $2x^2-y^2-8x+2y+7=0$,
37. $x^2-4y^2+2x+8y-7=0$,
38. $x^2-2x-y+2=0$,
39. $x^2+3y^2+2x-6y+1=0$,
40. $y^2+2x-2y-1=0$.

Задачи 41-50. Вычислить пределы

41. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-7}{3x^2-5x+1}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^t$.

42. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)^3+1}{(n-1)^3-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{3x^2-1}$,

$\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x^2-49}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tg2x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

43. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+100}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^2+x}$,

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

44. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{2n^2-\sqrt{n}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-4}{x^2-4x-4}$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^2 x}{x^2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{4-3x}{3x+2}\right)^{x+1}$.

45. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3}+\sqrt{n^2}}{\sqrt{n^2+n}}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-1}{x^3+x^2+x}$,

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x-\sqrt{x}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg2x}{\sin 2x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

46. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n-1}{2n^2+n-1}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^3}{x^4+2x^3}$,

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{\sqrt{10-x^2}-1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+\sin^2 x}{x}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

47. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{n^3+1}{n^3+n}\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^4}{2x^5+1}$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2-\sqrt{x^2-4}}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg8x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$.

48. $\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{\sqrt{n^2+1}-1}{n}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{5x^2+x-1}$,

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2x}{x\sin x}$, $\lim\limits_{x\to e}\dfrac{\ln x-1}{x-e}$.

49. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(n+1)^2-n}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-1}{2x^2+x+1}$,

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-9}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.

50. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+2}{(n+1)^2-n^2}$, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x-6}{x^2-6x-1}$,

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\sin 3x}$, $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

Задачи 51-60. Найти производные функций

51. $y=(2x^2+x-1)^5$, $y=5^x\cdot\sin 5x$,

$y=\dfrac{tgx+1}{\cos x}$, $y=(x^3+e^{2x})\ln 2x$.

52. $y=\dfrac{x^3+x+2}{\sqrt{x}}$, $y=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}+\sin\dfrac{1}{x}$,

$y=\ln(\cos x)-\dfrac{1}{3}\sin^2 2x$, $y=tg(3x)e^{\sqrt{x}}$.

53. $y=x^6-\dfrac{1}{x^4}=3^x+1$, $y=\dfrac{x}{x^2-1}$,

$y=tg(\ln x)+\sin^2 2x$, $y=x^2\cdot 2^x$.

54. $y=\left(\sqrt[3]{x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}\right)^2$, $y=2^x\cdot 3^{2x}+\cos\dfrac{1}{x}$,

$y=tg(e^x+1)$, $y=xctg2x+\dfrac{x}{x+1}$.

55. $y=\dfrac{x^4+2x^2+2}{x^2}$, $y=\dfrac{x+1}{x+2}$,

$y=\ln(tgx)x$, $y=\sin x\cdot e^{2x}-tg\sqrt{x}$.

56. $y=(x^2+3x+1)^{10}$, $y=\sin^3\sqrt{x}+\cos 2x$,

$y=\ln(tgx^2)\cdot x$, $y=x^2\cdot e^{2x}\cdot\sin x$.

57. $y=3x+\sqrt{x}+x^5+1$, $y=x\sqrt{1-x}+\cos(\dfrac{\pi}{4}-x)$,

$y=\dfrac{1+e^x}{1-e^x}+2^x$, $y=tg\dfrac{1}{x}\cdot\ln(x-1)$.

58. $y=4x^3-\dfrac{1}{x}+3$, $y=(1+\sqrt{x})^3-\dfrac{x^2}{x+1}$,

$y=\sin 2x\cdot ctgx$, $y=\ln(\cos\sqrt{x-1})$.

59. $y=2x^5+x^3+2$, $y=\dfrac{1+\ln 2x}{x^3}-\lg 5x$,

$y=tg^2x\cdot\sin 2x$, $y=\ln(1+e^x)\cdot 2x$.

60. $y=(\sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt{2x}})^2+2$, $y=\frac{\ln(x+1)}{\ln(x+2)}$,
$y=\sin^2\sqrt{x}-tg(\ln 2x)$, $y=ctg(e^x\cos x)$.

Задачи 61-70. Провести полное исследование функции и построить ее график.

61. $y=x^4-\frac{x^3}{3}+1$,
62. $y=xe^x+1$,
63. $y=4x-\frac{x^3}{3}$,
64. $y=\frac{x}{(1+x^2)}$,
65. $y=x+\frac{1}{x}$,
66. $y=\frac{x}{(1-x^2)}$,
67. $y=\frac{x^4}{4}-0.5x^2-1$,
68. $y=x+\frac{1}{x^2}$,
69. $y=x+\frac{1}{x^3}$,
70. $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}$.

Задачи 71-80. Найти частные производные первого и второго порядка функций

71. $z=\arcsin\frac{x}{y}$,
72. $z=\arcsin\frac{x+y}{x-y}$,
73. $z=arctg\frac{x}{y}$,
74. $z=\ln\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$,
75. $z=xe^{-xy}$,
76. $z=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{y})$,
77. $z=\sqrt{2x^2-y^2}$,
78. $z=tg(3x-4y)$,
79. $z=\sqrt{xy+\frac{x}{y}}$,
80. $z=x^2\sin y+y^2\cos x$.

Задачи 81-90.

81. Дана функция $z=e^{xy}$. Показать, что $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

82. Дана функция $z=e^{-\cos(ax+y)}$. Показать, что $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

83. Дана функция $z=\ln(x^2+y^2+2y+1)$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

84. Дана функция $z=\sin^2(y-ax)$. Показать, что $a^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

85. Дана функция $z=\frac{y}{x}$. Показать, что $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

86. Дана функция $z=y\sqrt{\frac{y}{x}}$. Показать, что $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

87. Дана функция $z=\sqrt{\frac{x}{y}}$. Показать, что $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right)=0$.

88. Дана функция $z=arctg\frac{x}{y}$. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

89. Дана функция $z=\frac{\sin(x-y)}{x}$. Показать, что $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)-x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

90. Дана функция $z=e^{\frac{y}{x}}$. Показать, что $\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right)-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

Задачи 91-100. Найти наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области:

91. $z=x^2-xy+y^2-4x$ в треугольнике, ограниченном прямыми x=0, y=0, 2x+3y-12=0.
92. $z=x^2+3y^2+x-y$ в треугольнике, ограниченном прямыми x=1, y=1, x+y=1.
93. $z=x^3+y^3-3xy$ в прямоугольнике $0\le x\le 2$, $0\le y\le 3$.
94. $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1$ в треугольнике, ограниченном прямыми x=0, y=0, x+y=3.
95. $z=xy-2x-y$ в прямоугольнике $0\le x\le 3$, $0\le y\le 4$.

96. $z=\frac{1}{2}x^2-xy$ в области, ограниченной параболой $y=\frac{1}{3}x^2$ и прямой y=3.

97. $z=2x+y-xy$ в квадрате $0\le x\le 4$, $0\le y\le 4$.

98. $z=x^2+2xy-4x+8y$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми x=0, y=0, x=1, y=2.

99. $z=x^2+y^2-xy+x+y$ в треугольнике, ограниченном прямыми x=0, y=0, x+y= -3.

100. $z=x^3+8y^3-6xy+1$ в прямоугольнике, ограниченном прямыми x=0, x=2, y=1, y=-1.

Задачи 101-110. Найти формулу вида $y=ax+b$ методом наименьших квадратов по данным опыта (таблицы).

101.	x	1	2	3	4	5
	y	3,2	4,2	2,7	0,7	1,2

102.	x	1	2	3	4	5
	y	3,4	4,4	2,9	0,9	1,4

103.	x	1	2	3	4	5
	y	3,6	4,6	3,1	1,1	1,6

104.	x	1	2	3	4	5
	y	3,8	4,8	3,3	1,3	1,8

105.	x	1	2	3	4	5
	y	4	5	3,5	1,5	2

106.	x	1	2	3	4	5
	y	2,8	3,8	2,3	0,3	0,8

107.	x	1	2	3	4	5
	y	4,1	5,1	3,6	1,6	2,1

108.	x	1	2	3	4	5
	y	4,4	5,4	3,9	1,9	2,4

109.	x	1	2	3	4	5
	y	4,6	5,6	4,1	2,1	2,6

110.	x	1	2	3	4	5
	y	4,8	5,8	4,3	2,3	2,8

Задачи 111-120. Вычислить неопределенные интегралы.

111. $\int(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x}+x^{2n})dx$, $\int\frac{x^3}{x^4-4}dx$, $\int x3^x\,dx$,
$\int tg^3 x dx$, $\int\frac{\sqrt{x+1}dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

112. $\int\frac{x^3+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}dx$, $\int\frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$, $\int\frac{x}{\cos^2 x}dx$,
$\int\sin 8x\cos 2x dx$, $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt[4]{x}}$.

113. $\int\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx$, $\int\frac{x^2dx}{x^3-8}$, $\int xe^{-x}dx$,
$\int\cos^2 x\sin^3 x dx$, $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x}}$.

114. $\int(e^x+3^x+x^4+\sqrt[3]{x^2})dx$, $\int\frac{\cos x\cdot dx}{2+3\sin x}$, $\int x\cdot\cos x\cdot dx$,
$\int\sin^2 x\cos^3 x dx$, $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

115. $\int\sqrt{4x-2}dx$, $\int\ln(x+3)dx$, $\int\frac{dx}{x^3-8}$,
$\int\sin^2 x\cos^2 x dx$, $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x}}$.

116. $\int\frac{\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x-1}}dx$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+2}}$, $\int x\sin 2x dx$,
$\int\frac{dx}{1+tgx}$, $\int\frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}dx$.

117. $\int(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{x})^2 dx$, $\int\frac{\sin 2x dx}{4+\cos^2 x}$, $\int x\ln(x^2+1)dx$,

$\int\frac{x^2}{x^2-3x+2}dx$, $\int\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}}dx$.

118. $\int\frac{x^3 dx}{x^2+1}$, $\int\frac{(x-2)dx}{x^2-4x+3}$, $\int x\ln x dx$,

$\int\frac{dx}{5-3\cos x}$, $\int\frac{dx}{1+\sqrt[3]{x-1}}$.

119. $\int\left(\frac{1}{x}+x\right)^3 dx$, $\int x^2\sqrt{2x^3+3}dx$, $\int xe^{2x}dx$,

$\int\frac{dx}{1+\sin^2 x}$, $\int\frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$.

120. $\int(2x+1)^{10}dx$, $\int\frac{x^2+2}{x(x+1)}dx$, $\int x\ln(2x+1)dx$,

$\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}$, $\int\frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$.

Задачи 121-130. Вычислить площадь, ограниченную заданными линиями.

121. $y=4-x^2$, $y=0$.
122. $y^2=2px$, $x=h$.
123. xy=4, x=1, x=4, y=0.
124. $y^2=2x+4$, $x=0$.
125. $y^2=(4-x)^3$, $x=0$, $y=0$.
126. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
127. $y=3-2x-x^2$, $y=0$.
128. $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$.
129. $y^2=x^3$, $y=8$, $x=0$.
130. $y=x^2$, $y=2-x^2$.

Задачи 131-140. Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной заданными линиями:
131. $y=\sin x$ (одной полуволной), $y=0$ вокруг оси Ox.
132. $x^2-y^2=4$, $y=\pm 2$ вокруг оси Oy.
133. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=\pm 1$, $y=0$ вокруг оси Ox.

134. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Oy.
135. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$ вокруг оси Ox.
136. $y=x^3$, $x=0$, $y=8$ вокруг оси Oy.
137. $x^2-y^2=a^2$, $x=\pm 2a$ вокруг оси Ox.
138. $y=x^2$, $y=4$ вокруг прямой $x=2$.

Указание. $dV=\pi(2+x)^2 dy-\pi(2-x)^2 dy$.

139. Одной арки циклоиды $x=a(t-\sin t)$
$y=a(1-\cos t)$ вокруг оси Ox.

140. $(y-3)^2+3x=0$ $x=-3$ вокруг оси Ox.

Содержание

Л. Г. Лелевкина, В.В. Попов

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие для студентов заочной формы обучения

Редактор В.К. Погорелова
Технический редактор Э.К. Гаврина
Корректор О.А. Матвеева
Компьютерная верстка Д.Р. Зайнулина

Подписано к печати 19.10.2001. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Офсетная печать. Объем 3,5 п.л.
Тираж 500 экз. Заказ 220.

Издательство Кыргызско-Российского Славянского университета
720000, Бишкек, Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720000, Бишкек, Шопокова, 68