КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ

В.В. Попов

Лекции и задачи по теории вероятностей

Для всех форм обучения

Бишкек 2001

УДК 519.21

Попов В.В.

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ. Для всех форм обучения /Кыргызско-Российский Славянский университет. – Бишкек, 2001. – 71 с.

Лекции составлены с учетом многолетнего опыта преподавания автором этого курса студентам различных (не математических) специальностей. Лекции охватывают обычные для вводного курса темы: основные понятия и модели теории вероятностей, случайная величина и ее характеристики, закон больших чисел и центральная предельная теорема. Объем материала соответствует 20-30 лекционным часам. Для понимания большей части изложенных тем достаточно знания школьного курса математики. Лишь вопросы, связанные с непрерывными случайными величинами, требуют знания основ интегрального и дифференциального исчисления, которое, впрочем, преподается в средней школе. Книга содержит также более двух сотен задач. Контрольные задания, обязательные для заочных форм обучения, составляются преподавателем из этих или иных задач.

Рекомендованы к изданию
кафедрой математики и РИСО КРСУ

ВВЕДЕНИЕ

Назовем **случайным событием** (или, короче, **событием**) всякий факт, который в результате **опыта** (испытания, наблюдения, измерения, работы с картотекой и т.д.) может произойти, а может и не произойти. С событиями связывают числа, являющиеся **мерой** объективной возможности наступления этих событий. Эти числа называют **вероятностями событий**. Они могут принимать значения **только** в пределах от 0 до 1 (включая 0 и 1). Заметим, однако, что вероятность иногда выражают в процентах, так что, например, выражение "значение вероятности события равно 20%" нужно понимать как "вероятность события равна 0,2, и оно появляется в среднем 20 раз на сотню наблюдений", что и выражается символом 20% (% = на сотню).

Вероятность – это количественный прогноз событий. Его можно сделать только в отношении опытов, повторяющихся в одинаковых условиях многократно. О таких опытах говорят как о "соблюдении определенного комплекса условий". Невозможно количественно прогнозировать явления уникальные, например, указать вероятность наступления завтра конца света.

При строгом математическом подходе события описываются на языке множеств.

С событиями связывают **случайные величины**. Это числовые характеристики (функции) событий. Случайные величины описываются вероятностными **законами распределения**.

Главные действующие лица данного курса: случайные события и их вероятности, случайные величины и их законы распределения.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СХЕМЫ

§1. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ (ПЭС)

Множество – это любая совокупность обьектов произвольной природы, каждый из которых называется элементом множества. Введем **пространство элементарных событий (ПЭС)**. Это произвольное множество Ω. Его элементы, обычно обозначаемые ω, называются **элементарными событиями** (ЭС). В реальном опыте со случайным результатом элементарным событиям соответствуют **взаимно исключающие (несовместные) исходы,** а Ω – это множество **всех** таких возможных исходов. В каждом конкретном опыте выбираются свои ЭС и строится свое ПЭС в зависимости от целей. Оно может быть конечным, и тогда Ω описывают перечислением его элементов: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, ..., \omega_n\}$, либо выписывая их все, либо задавая правило, по которому можно найти любой элемент ω_k. Оно может быть и бесконечным. Приведем примеры.

Опыт 1: подбрасывание двух монет один раз. Обозначим через $Г$ – выпадение герба на монете, а через $Р$ – выпадение решки. Элементарные события: $Г_1Г_2,\ Г_1Р_2,\ Р_1Г_2,\ Р_1Р_2$. Индексы 1 и 2 – номера монет. Эти ЭС можно обозначить и через $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, так что $\Omega = \{Г_1Г_2, Г_1Р_2, Р_1Г_2, Р_1Р_2\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$.

Опыт 2: подбрасывание n монет одновременно 1 раз. Элементарное событие: **определенная** последовательность n букв $Г$ и $Р$. Первая буква этой последовательности показывает, что выпало на первой монете, вторая – что выпало на второй и т.д. ПЭС Ω содержит 2^n ЭС (конечное множество).

Опыт 3: подбрасывание 1 монеты n раз **(все *n* подбрасываний составляют *один* опыт!)**. Элементарное событие: **определенная** последовательность n букв $Г$ и $Р$. Первая буква этой последовательности показывает, что выпало в первый раз, вторая – что выпало во второй и т.д. ПЭС Ω полностью совпадает с ПЭС предыдущего примера.

Опыт 4: подбрасывание n монет одновременно 1 раз. Допустим, нас не интересует, что именно выпало на той или иной монете, а интересует только полное число $Р$. В этом случае ПЭС, очевидно, содержит $(n+1)$ ЭС, которые можно записать, например, в виде $\omega_k = Р^kГ^{n-k}$, где $k = 0,1,2,...n$.

Опыт 5: повторение испытаний до первого успеха (подбрасывание монеты до первого выпадения герба, стрельба до первого попадания и т.д.). ЭС: число испытаний. В этом случае может понадобиться бесконечное число испытаний, то есть ПЭС бесконечное, но счетное. Обозначая буквами $Н$ и $У$ неудачу и успех в одном испытании, ЭС можно описывать последовательностями вида $НН...НУ$.

Опыт 6: изучение траектории движения ракеты (атома, луча света в атмосфере и т.д.). ЭС: одна конкретная траектория. Множество всех ЭС бесконечное и несчетное (несчетное означает, что элементарные события нельзя перенумеровать одно за другим; еще пример несчетного множества: множество точек круга).

§2. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ (СС)

Это **подмножества множества Ω.** Любое элементарное событие из Ω, естественно, одновременно является и случайным. Пусть СС физического опыта описывается некоторым подмножеством $M = \{\omega_k, \omega_t, \omega_m, ..., \omega_q\}$, где, конечно, все индексы $k,t,m,...,q$ по определению множества и подмножества различны. "Физическое" СС происходит, когда происходит какое-либо элементарное событие из M. "Физические" СС будем обозначать теми же буквами, что и соответствующие им подмножества. Приведем пример.

Опыт 7: бросание одной игральной кости (кубик) 1 раз. ПЭС содержит шесть ЭС и его можно описать в виде $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, либо в виде $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, где цифры показывают, какое число очков выпало на верхней грани кости. Возможны СС:

A = {1,3,5} = {выпало нечетное число очков} = {выпали 1 или 3 или 5};
B = {2,4,6} = {выпало четное число очков};
C = {1,2,3} = { выпало не более 3-х очков };
D = {2,3,5,6} = {выпали 2 или 3 или 5 или 6};
E = {1,4} = {выпали 1 или 4}.
∅ = {не выпало ни одного очка} = {пустое множество}.

Ниже в этом параграфе под *A, B, C, D, E* понимаются события "Опыта 7", если не оговорено противное.

Событие $\varnothing$ назовем **невозможным**, событие **Ω – достоверным**.

Суммой (объединением) двух событий A_1 и A_2 назовем событие $A_3 = A_1 + A_2$ (в другой записи $A_3 = A_1 \cup A_2$), состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих, по крайней мере, одному из событий A_1 или A_2. Согласно "Опыту 7", $A + C = \{1,2,3,5\}$. Подчеркнем, что символ + означает не обычное суммирование чисел, а есть символ объединения (логического сложения). Его следует понимать как объединяющий союз **"или"**. То есть $A + C$ (так же, как и $A \cup C$) следует понимать и можно произносить, как "произошли A или C или оба вместе". Очевидно, $A + A = A$, $A + \varnothing = A$, $A + B = \Omega$, $A + B + C + D = \Omega$. Для любого подмножества A_1 множества Ω выполняется $A_1 + \Omega = \Omega$. Запись $\{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ можно понимать как объединение $\omega_2 + \omega_3 + \omega_4$, то есть *{произошло ω_2 или ω_3 или ω_4}*.

По определению ЭС **сумма всех элементарных событий, входящих в Ω, равна Ω.**

Произведением (пересечением) двух событий A_1 и A_2 назовем событие $A_4 = A_1A_2$ (в другой записи $A_4 = A_1 \cap A_2$), состоящее из всех элементарных событий, принадлежащих и A_1 и A_2. Например, $AC = =\{1,3\}$, $BB = B$. Событие A_1A_2 происходит тогда и только тогда, когда происходят и A_1 и A_2. Подчеркнем, что умножение событий есть не обычное умножение чисел, а логическое умножение, которое следует понимать, как союз "И". То есть, AC (так же, как и $A \cap C$) следует понимать и можно произносить, как *{произошли одновременно и A и C}*. События A_1 и A_2 называются **непересекающимися (несовместными)**, если $A_1A_2 = \varnothing$. В противном случае они называются совместными. Например, $AB = \varnothing$, $A\varnothing = \varnothing$. События B и C – совместны.

По определению ЭС **пересечение любых различных элементарных событий, входящих в Ω, есть невозможное событие:**

$$\omega_t \cap \omega_m = \omega_t\omega_m = \varnothing \text{ при } t \neq m.$$

Для любого подмножества A_1 множества Ω выполняется $A_1\Omega = A_1$. Запись $Г_1Г_2P_3\ldots$ из примера "Опыт 3" можно понимать, как *{в первый раз выпал герб и во второй раз выпал герб, а (и) в третий раз выпала решка ...}*. То есть запись $Г_1Г_2P_3\ldots$ есть произведение событий $Г_1$, $Г_2$, $P_3\ldots$

Разностью двух событий A_1 и A_2 назовем событие $A_5 = A_1 \backslash A_2$, состоящее из элементов множества A_1, не принадлежащих A_2. Событие $A_1 \backslash A_2$ состоит в том, что A_1 произошло, а A_2 не произошло. Например, $A \backslash B = A$, $A \backslash C = \{5\}$. $A \backslash \Omega = \varnothing$, $\Omega \backslash A = B$, $A \backslash A = \varnothing$.

NB. Пусть $A_3 = A_1 + A_2$. Будет ли $A_2 = A_3 \backslash A_1$? Ответ: вообще говоря, нет, что легко проверить с помощью диаграмм Венна (см. о них ниже).

Несовместные события A_1 и $\underline{A}_1$, в сумме дающие Ω, называются противоположными. По другому: событие $\underline{A}_1 = \Omega \backslash A_1$ называется противоположным событию A_1. Символ $\underline{A}_1$ читается "не А один". Так, противоположны события A и B, D и E, то есть $B = \underline{A}$, $D = \underline{E}$. Событие $\underline{A}_1$ означает, что A_1 не произошло, так что $A_1\underline{A}_1 = \varnothing$.

<u>Примечание</u>: черта – знак логического отрицания – обычно пишется **над** обозначением события. Мы пишем внизу в силу особенностей редактора WORD.

Пример. В опыте возможно появление трех случайных событий: A_1, A_2, A_3 (совместных или несовместных – безразлично). Описать ситуации: произошли все три события; не произошло ни одного из этих событий; произошло только событие A_1; A_1 и A_2 произошли, а A_3 – не произошло; произошли ровно два из трех событий. Ответы: $A_1A_2A_2$; $\underline{A}_1\underline{A}_2\underline{A}_3$; $A_1\underline{A}_2\underline{A}_3$; $A_1A_2\underline{A}_3$; $A_1A_2\underline{A}_3 + A_1\underline{A}_2A_3 + \underline{A}_1A_2A_3$. Список вопросов можно продолжить; всего можно поставить $2^8 = 256$ вопросов (почему так много?).

Если A_1 является подмножеством A_2, этот факт записывают в виде $A_1 \subset A_2$, или $A_2 \supset A_1$.Заметим, что если $A_1 \subset A_2$, то событие A_1 влечет за собой событие A_2, то есть если произошло событие A_1, то произошло и событие A_2 (но не наоборот!).

События $A_1A_2A_3\ldots$ образуют **полную группу**, если они исчерпывают собой все возможные исходы, то есть в результате опыта произойдет хотя бы одно из них. Иными словами, $A_1 + A_2 + A_3 + \ldots = \Omega$ – достоверное событие. Эти события могут быть как совместны, так и несовместны. Противоположные события образуют полную группу. По определению совокупность всех ЭС образует полную группу.

Действия над событиями, о которых шла речь выше, удобно иллюстрировать с помощью диаграмм Венна (Эйлера). События при этом изображаются в виде пересекающихся или непересекающихся кругов (областей плоскости), а элементарными событиями являются точки этих кругов.

Приведем также некоторые формулы. Пусть теперь A, B, C – произвольные события из произвольного Ω. Тогда $A \backslash \varnothing = A\underline{\varnothing} = A\Omega = A$. $\underline{A + B} = \underline{A}\ \underline{B}$, $\underline{A} + \underline{B} = \underline{A\ B}$, $(A+B)C = C(A + B) = AC + BC$ и т.д. Если $A \subset B$, то $A + B = B$, $AB = A$.

§3. КОМБИНАТОРИКА

Основное правило комбинаторики. Пусть требуется выполнить одно за другим k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, второе действие – n_2 способами, третье – n_3 способами и так далее до k-го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \ldots \times n_k$ способами.

Пример 1. На вершину горы возможны 4 пути, а вниз – 6. Сколько вариантов туристических маршрутов можно предложить? Ответ: $4 \times 6 = 24$.

Пример 2. В последовательности из 5 букв: ***** на первом месте может быть буква А или В, на втором месте также А или В и так далее. Сколько пятибуквенных "слов" можно составить из этих двух букв? Ответ: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$.

Число элементов суммы множеств (случайных событий). Пусть $n(A)$ – число элементов множества A, $n(B)$ – число элементов множества B. Тогда число элементов множества $A+B$ можно найти по формуле:

$$N(A + B) = N(A) + N(B) - N(AB), \tag{3.1}$$

где $N(AB)$ – число элементов пересечения множеств A и B. Этот результат прямо вытекает из правила нахождения объединения двух событий. Приведем пример, когда множеств три.

Идет группа студентов, из них семь девушек. Девять человек идут на дискотеку, а одиннадцать – в джинсах. В джинсах на дискотеку идут семь человек, из них четыре девушки. Пять девушек в джинсах. На дискотеку идут шесть девушек. Сколько человек в группе?

Решение. Обозначим множества: $Д$ – девушки, D – студенты, идущие на дискотеку, J – студенты в джинсах, $ДD$ – девушки, идущие на дискотеку, $ДJ$ – девушки в джинсах, DJ – студенты в джинсах, $ДDJ$ – девушки в джинсах, идущие на дискотеку. Число элементов этих множеств задано: $N(Д) = 7$, $N(D) = 9$, $N(J) = 11$, $N(ДD) = 6$, $N(ДJ) = 5$, $N(DJ) = 7$, $N(ДDJ) = 4$. Число студентов в группе равно $N(Д + D + J) = N(Д) + N(D) + N(J) - N(ДD) - N(ДJ) - N(DJ) + N(ДDJ) = 7 + 9 + 11 - 6 - 5 - 7 + 4 = 13$.

NB. Обратите внимание на знак (+) перед $N(ДDJ)$.

Практически любой реальный эксперимент со случайными исходами или случайное массовое явление может быть представлено моделью ящики – шары. Шары и ящики обладают какими-либо признаками (например, надписями), и шары некоторым образом размещаются в ящиках и/или вынимаются из них.

Перестановки. Пусть имеется ящик, содержащий n ячеек и n различимых (пронумерованных) шаров. Далее для удобства считаем, что ячейки расположены в один ряд. Шары помещены в ячейки по одному. Каждое конкретное расположение шаров в ячейках называется перестановкой. Найдем число P_n перестановок.

Первый шар можно поместить в любую из n ячеек, второй – в любую из оставшихся $(n-1)$ ячеек, так что, согласно основному правилу комбинаторики, имеем $n(n-1)$ способов. Продолжая рассуждения, получим

$$P_n = 1*2*3*....*n = n! \tag{3.2}$$

Примечание. По общепринятому соглашению 0! = 1.

Пример. Каким числом способов можно разместить 4 книги на полке? Ответ: P_4 = 4! =24.

Еще пример. Имеется N сестер и N сережек. Каким числом способов можно раздать каждой сестре по серьге? Ответ: $N!$

Размещения. Пусть имеется ящик с m ячейками, расположенными в ряд, и имеется n различимых шаров, причем $m \geq n$. Шары можно размещать в ячейках по одному, не более. Каким числом способов A_{mn} можно разместить шары?

Число размещений находится так же, как и число перестановок. В результате получим:

$$A_{mn} = m(m-1)(m-2)...(m-n+1). \tag{3.3}$$

Сочетания. Если из множества, содержащего n элементов, извлечь k элементов, то полученное подмножество называется **сочетанием из *n* элементов по *k*.** Порядок извлечения элементов предполагается не имеющим значения. Число сочетаний из n элементов k по равно

$$C_n^k = n! / [k!(n-k)!]. \tag{3.4}$$

Для обоснования этой формулы рассмотрим тот же ящик и шары, что и в случае перестановок. Извлекать шары будем из крайних k левых ячеек. Всего перестановок шаров $n!$ Перестановки шаров в левых k ячейках между собой, или в правых $(n-k)$ ячейках между собой не меняет состава множества извлекаемых k шаров. Это будет один и тот же набор номеров шаров. Поэтому искомое число сочетаний дается только что написанной формулой (3.4). Кстати, весьма удивительно, что $n!/[k!(n-k)!]$ – всегда целое число!

Задача. Сколько целочисленных неотрицательных решений имеет уравнение

$$x_1 + x_2 + ... + x_m = n?$$

Набросок решения. Рассмотрим ящик, в нем n шаров, расположенных в ряд. Вставим в ящик $m-1$ перегородку произвольным образом. Число шаров между перегородками с номерами $k-1$ и k равно значению x_k. Если между перегородками шаров нет, то соответствующее x_j равно нулю. Будем переставлять шары и перегородки, как при выводе формулы (3.4). В результате найдем, что искомое число решений равно $C_{n+m-1}{}^n$. Примечание. Если бы эта задача имела иное решение, то и Вселенная (!) была бы устроена иначе (речь идет о статистике бозонов). Удивительно, Судьба Вселенной оказалась связаной с такой детской задачей!

§4. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть все N исходов опыта равновозможны из соображений симметрии, здравого смысла и т.д. (ПЭС содержит N ЭС). Пусть интересующее нас событие A содержит n ЭС, которые назовем **благоприятными** исходами опыта. По классическому определению вероятность события A равна

$$P(A) = n/N, \tag{4.1}$$

то есть **равна отношению числа благоприятных исходов опыта к общему числу равновозможных.** Каждое элементарное событие – это СС, состоящее из одного элемента; тем самым, **при классическом определении вероятности всех элементарных событий оказываются равными между собой: $P(\omega_k) = 1/N$, $k = 1, 2,\ldots,N$.** Кроме того,

$$P(\omega_1)+ P(\omega_2)+\ldots+ P(\omega_N) =\Sigma_{k=1}^{N} P(\omega_k) = 1. \qquad (4.2)$$

Пример (П). Две монеты бросаются 1 раз. Какова вероятность, что на одной монете (безразлично какой) выпадет герб, а на другой – решка? Интересующее нас событие обозначим буквой A. Возможны две модели. Модель 1. Имеются 4 равновозможных ЭС: $Г_1Г_2$, $Г_1Р_2$, $Р_1Г_2$, $Р_1Р_2$. Тогда $A = Г_1Р_2+ Р_1Г_2$, $N =4$, $n = 2$, и $P(A)= n/N = 1/2$. Модель 2. Имеются 3 равновозможных ЭС: $ГГ$, $ГР$, $РР$. Тогда $A = ГР$, $N =3$, $n = 1$, и $P(A) = n/N = 1/3$. Обе модели математически корректны, но дают разные результаты. Где правда жизни? Реальные опыты показывают, что первая модель соответствует действительности, вторая – нет. Вторая модель будет соответствовать реальности, если принять $P(ГГ) = P(РР) = =1/4$, $P(ГР) = 1/2$. Но это уже **не** классическое определение вероятности, так как элементарные события неравновозможны.

Еще один пример. Молекулы воздуха, двигаясь внутри комнаты хаотически, в принципе, могут все вдруг собраться в одной (левой) ее половине. Найти вероятность этого трагического события. Решение. Пусть число молекул равно N. Каждая из молекул может быть в левой и в правой половине комнаты. Элементарное событие: одно конкретное расположение молекул по половинам комнаты. Число элементарных событий $2*2*\ldots*2 = 2^N$. Естественно считать их равновозможными. "Благоприятное" событие T – когда все молекулы собрались в одной половине комнаты – состоит из одного элементарного. Следовательно, его вероятность $P(T) = 1/2^N$. Примем, что число молекул в комнате равно $N = =10^{28}$. Таково по порядку величины число молекул в комнате средних размеров. Ясно, что вероятность $P(T)$ чудовищно мала, то есть T – практически невозможное событие (превращение случайности в достоверность).

Если поразмышлять над классическим определением вероятности больше одной секунды, то можно заметить, что оно **не определяет** понятия «вероятность». Оно всего лишь тавтология, ибо «равновозможность» есть не что иное как «равновероятность», иными словами, вероятность определяется через вероятность же. Классическое определение не более чем указание, как по двум числам вычислять третье.

§5. ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Это важный пример применения классического определения вероятности. Общая схема возникновения этого распределения такова. В урне N шаров, из них M – белых. Остальные $(N\text{-}M)$ – небелые. Таким образом, имеется **два** класса объектов: белые и небелые шары. Берутся случайным образом n шаров ("горстью", или по очереди – безразлично). Какова вероятность события B={*среди взятых n шаров окажется m белых*}? Решение. По формуле числа сочетаний мы n шаров из N можем взять $C_N^{\,n}$ способами. Это число равновозможных ЭС. Число благоприятных ЭС равно произведению $C_M^{\,m}$ и $C_{(N-M)}^{\,(n-m)}$. Вероятность интересующего нас события B равна

$$P(B) = P(N,M,n,m) = [C_M^{\,m}\, C_{(N-M)}^{\,(n-m)}]/C_N^{\,n}. \qquad (5.1)$$

Набор чисел $P(N,M,n,m)$ называется гипергеометрическим распределением в том смысле, что для каждого значения случайной величины m существует своя вероятность P (см. ниже раздел «Случайная величина»).

Пример применения. В урне N=5 шаров, из них M=3 белых. Берутся случайным образом n=2 шара. Какова вероятность события *Б1Б2* – оба взятых шара (m=2) белые? Решение: $P(Б1Б2)= [C_3^{\,2}\, C_2^{\,0}]/ C_5^{\,2}$.

Контрпример. В урне N=5 шаров, из них M=3 белых. Случайным образом берется один шар, который после осмотра возвращается в урну. Затем случайным образом берется второй шар. Какова вероятность события *Б1Б2* - оба взятых шара белые? Число равновозможных ЭС в этом случае равно N^2. Число благоприятных равно M^2. Вероятность анализируемого события $P(Б1Б2) = (M/N)^2$.

Задание: что больше $(M/N)^2$ или $[C_3^2\ C_2^0]/\ C_5^2$ и почему?

Предпоследняя задача, то есть гипергеометрическое распределение, соответствует **выборке без возвращения**, а последняя – **выборке с возвращением**. Обе они применяются, например, в контроле качества продукции. При использовании выборки без возвращения последовательно проводимые испытания **зависимы**, а в случае выборки с возвращением они становятся **независимыми**.

Приведем пример применения гипергеометрического распределения для контроля качества продукции. Из партии $N=10$ изделий наудачу взято три ($n=3$). Два изделия ($m=2$) оказались бракованными, одно, ($n-m=1$) – нет. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно? Решение. Используем формулу $P(N,M,n,m) = [C_M^m\ C_{(N-M)}^{(n-m)}]/C_n^n$, с помощью которой находим значение M (число бракованных изделий), отвечающее максимуму $P(N,M,n,m)$. Прямой проверкой убеждаемся, что $max\ P = 21/40$ достигается при $M=7$. Следовательно, наиболее вероятно, что число бракованных изделий $M=7$.

Обобщение гипергеометрического распределения на случай, когда число классов объектов более двух (а именно: четыре) проведем на примере "из Пушкина".

Герман берет из колоды три карты (в колоде 52 карты). Какова вероятность события: взяты тройка, семерка, туз? (Имеем **четыре** класса объектов: тройки, семерки, тузы и остальные карты, которые составляют четвертый класс). Решение. Обозначим: P=4, Q=4, R=4 – число троек, семерок и тузов в колоде соответственно, i, j, k – число взятых троек, семерок и тузов соответственно; $i=j=k$=1; N=52, n=3. Искомая вероятность равна $P(37T)=[C_P^iC_Q^jC_R^k]/C_N^n$.

Задание. Вычислите $P(37T)$ и объясните, почему Герману так не повезло.

§6. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ (ГВ)

Это обобщение представления о равновозможности событий в применении к несчетным множествам. Поясним ГВ на примере. Пусть точка случайным образом бросается в квадрат, имеющий площадь S_Ω, в который вписана фигура A площади S_A. Считаем равновозможным попадание точки в любое место квадрата. Тогда вероятность попадания точки на фигуру A естественно принять равной

$$P(A) = S_A/\ S_\Omega. \tag{6.1}$$

По такого рода формулам вычисляются геометрические вероятности.

Если в квадрат производится прицельное бросание точки, как при стрельбе по мишени, то точки квадрата уже статистически неравноправны, и описанный подход к вычислению вероятности попадания в какую-нибудь заданную часть квадрата неадекватен. Отметим, что вероятности попадания случайно бросаемой точки на заданную точку или на заданную линию квадрата равны нулю, поскольку равны нулю как площадь точки, так и площадь линии.

§7. СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть произведено N одинаковых независимых опытов, в каждом из которых наблюдалось появление или непоявление события A. Пусть событие A наблюдалось в $n(A)$ опытах. Отношение n(A)/N, когда $N\to\infty$ принимают за определение вероятности события A в статистическом смысле:

$$P(A) = n(A)/N,\ (N\to\infty). \tag{7.1}$$

Это определение не выдерживает критики, потому что никто вам не будет проводить "бесконечного" количества опытов. Вместе с тем, именно отношение $n(A)/N$ используется для вычисления вероятностей событий. Точнее, для оценки вероятностей. Речь может идти только об оценке, потому что если повторить указанную серию N испытаний, то число $n(A)$ будет скорее всего другим. О надежности такой оценки будет сказано ниже в разделе «Закон больших чисел». Здесь отметим только важный эмпирический факт. Если число опытов N достаточно велико, то при повторении серии опытов новое значение $P(A)$ обычно (но не всегда – на то он и Случай!) оказывается близким к первому. Именно благодаря этому факту теория вероятностей имеет практический смысл. Именно отношение $n(A)/N$ лежит в основе математической статистики как прикладной науки.

Итак, по статистическому определению **вероятность есть относительная частота появления события в достаточно длинной серии одинаковых и независимых испытаний.** И, наверное, это самая разумная интерпретация понятия «вероятность».

§8. АЛГЕБРА СОБЫТИЙ

До общего математического определения вероятности введем предварительно понятие **алгебра событий**. Пусть Ω – произвольное ПЭС, Φ – некоторая совокупность случайных событий, то есть подмножеств множества Ω. Совокупность событий Φ называется алгеброй событий, если: а) $\Omega \in \Phi$; б) из того, что $A \in \Phi$ и $B \in \Phi$, следует, что $AB \in \Phi$, $A+B \in \Phi$, $A\backslash B \in A$. Заметим, что $\varnothing = \Omega\backslash\Omega \in \Phi$.

Если Ω – конечное множество, то в качестве алгебры событий можно принять, например, совокупность всех подмножеств Ω. В этом случае алгебра событий содержит 2^N подмножеств, где N – число элементарных событий в Ω (докажите!).

Пример. Две монеты брошены один раз, так что $\Omega = \{\Gamma_1\Gamma_2, \Gamma_1P_2, P_1\Gamma_2, P_1P_2\} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Алгебра событий содержит 2^4=16 событий: $\varnothing$, $\{\omega_1\}$, $\{\omega_2\}$, $\{\omega_3\}$, $\{\omega_4\}$, $\{\omega_1,\omega_2\}$, $\{\omega_1,\omega_3\}$, $\{\omega_1,\omega_4\}$, $\{\omega_2,\omega_3\}$, $\{\omega_2,\omega_4\}$, $\{\omega_3,\omega_4\}$, $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, $\{\omega_1,\omega_2,\omega_4\}$, $\{\omega_1,\omega_3,\omega_4\}$, $\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$, $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}=\Omega$.

§9. АКСИОМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Классическое определение вероятности пригодно, только если вероятности элементарных событий одинаковы и их число конечно. Это далеко не всегда так. Дадим в виде аксиом общее определение вероятности, пригодное во всех случаях. Пусть задана алгебра событий Φ. **Вероятностью называется числовая функция P, определенная на системе событий Φ такая, что**

1. $P(A) \geq 0$ для любого события $A \in \Phi$.

2. $P(\Omega) = 1$.

3. Если A и B несовместны, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

4. Для любой убывающей последовательности $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ событий из Φ такой, что пересечение $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \varnothing$, имеет место равенство $\lim P(A_n) = 0$ при $n \to \infty$.

Если Ω – конечное множество, то Φ – конечная совокупность, и последняя аксиома, очевидно, не нужна.

Тройку (Ω,Φ,P) называют вероятностным пространством. В дальнейшем всегда считаем, что вероятностное пространство построено или может быть построено.

Сформулированные четыре аксиомы являются основой теории вероятностей: вся она может быть построена логическим путем исходя из них. Эти аксиомы сформулированы на языке абстрактных множеств, и в них отсутствует упоминание о реальных опытах. Тем не менее, нетрудно обнаружить связь аксиоматического и классического, а также аксиоматического и статистического определения вероятностей. Действительно, классическое определение получается как частный случай аксиоматического, если принять, что вероятности всех элементарных событий одинаковы и равны $1/N$. Для установления связи со статистическим определением вероятности предположим, что в N одинаковых независимых опытах наблюдалось появление или непоявление несовместных событий A и B. Пусть эти события наблюдались $n(A)$ и $n(B)$ раз соответственно. Отношения $P(A) = n(A)/N$ и $P(B) = n(B)/N$ являются оценками вероятностей событий A и B. В силу несовместности событий оценка вероятности события $A + B$ равна $P(A + B) = P(A)+P(B)$, что вполне аналогично третьей аксиоме.

Системой аксиом вероятность определена не полностью. Так, обе модели примера (П) из §4 удовлетворяют всем аксиомам, но лишь одна из них соответствует действительности. Выбор между моделями лежит за пределами математики и делается исходя из соответствия реальному положению вещей.

§10. СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

1. Пусть A и $\underline{A}$ – противоположные события. Тогда

$$P(\underline{A}) = 1 - P(A). \qquad (10.1)$$

Действительно, $A + \underline{A} = \Omega$. Тогда $P(A + \underline{A}) = P(A) + P(\underline{A}) = P(\Omega) = 1$, откуда и вытекает указанное следствие. При решении задач часто бывает проще искать вероятность не события A, а вероятность противоположного к нему события $\underline{A}$, находя затем $P(A)$ по полученной формуле.

2. Так как события Ω и $\varnothing$ противоположны, то

$$P(\varnothing) = 0. \qquad (10.2)$$

3. Если события $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ попарно несовместны, то (докажите)

$$P(A_1+A_2+A_3+ \ldots +A_n) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+ \ldots +P(A_n). \qquad (10.3)$$

В силу попарной несовместности элементарных событий и того, что объединение всех элементарных событий есть достоверное событие Ω,

$$\boldsymbol{P(\omega_1) + P(\omega_2) + P(\omega_3) + \ldots = \Sigma_{k=1} P(\omega_k) = P(\Omega) = 1,} \qquad (10.4)$$

где суммирование идет по всем элементарным событиям.

4. Для любых событий A и B из Φ

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (10.5)$$

Действительно, $A + B = A + B\underline{A}$, $B = BA + B\underline{A}$. В правых частях этих равенств объединяемые события несовместны, и тогда по аксиоме 3

$$P(A+B) = P(A) + P(B\underline{A}), \quad P(B) = P(BA) + P(B\underline{A}),$$

откуда и получается следствие (10.5). Заметим, что формула (10.5) вполне аналогична формуле подсчета числа элементов объединяемых подмножеств (см. выше параграф "Комбинаторика").

5. Так как вероятность не может быть отрицательной, то из формулы (10.5) вытекает также, что

$$P(A+B) \le P(A) + P(B). \qquad (10.6)$$

6. Если событие A влечет за собой событие B, то есть $A \subset B$, то

$$P(A) \le P(B). \qquad (10.7)$$

Действительно, в этом случае $B=A+\underline{A}B$ и, следовательно, $P(B)=P(A) + P(\underline{A}B) \ge P(A)$.

7. Так как $\varnothing \subset A \subset \Omega$ и $P(\varnothing) = 0$, а $P(\Omega) = 1$, то **для любого события A**

$$0 \le P(A) \le 1. \qquad (10.8)$$

Вероятность может принимать значения только в пределах от 0 до 1, включая 0 и 1.

§11. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Очевидно, что наш прогноз относительно вероятности какого-либо события B изменится, если нам стало известно, что произошло совместное с ним событие A. Таким естественным путем мы приходим к необходимости введения понятия «условная вероятность».

Пусть *A, B* – события из алгебры событий *Ф*, и *P(A)>0*. Условная вероятность события *B* при условии, что *A* произошло **по определению,** равна

$$P(B/A)=P(AB)/P(A). \qquad (11.1)$$

Аналогично, $P(A/B)=P(AB)/P(B)$. Поясним смысл условной вероятности на примере.

Партнер в карты (в колоде 36 карт) берет случайным образом 1 карту и, не показывая ее вам, сообщает, что это – пика (*П*). Получив эту информацию, вы естественно предполагаете, что с вероятностью 1/9 у партнера пиковая дама *(Д/П)*. С другой стороны, согласно определению условной вероятности (11.1), **вычисляем** *P(Д/П) = P(ДП)/P(П)* = (1/36)/(1/4) = 1/9, что согласуется с только что полученным на основе здравого смысла результатом. Таким образом, обладание частичной информацией о результатах произошедшего опыта (взята *П*) позволяет повысить надежность предсказания того, что у партнера пиковая дама *(ПД)* с 1/36 до 1/9.

Происхождение формулы (11.1) можно пояснить на примере геометрической вероятности. Пусть точка случайным образом бросается в квадрат, имеющий площадь S_Ω, в который вписаны фигура *A* площади S_A и фигура *B*. Фигуры пересекаются так, что площадь пересечения равна S_{AB}. Считаем равновозможным попадание точки в любое место квадрата. Тогда условная вероятность $P(B/A)$ из геометрических соображений (сделайте рисунок!) равна $P(B/A) = S_{AB}/ S_A = (S_{AB} /S_\Omega)/(S_A/ S_\Omega)$ - $P(AB)/P(A)$, то есть получаем формулу (11.1).

Пример применения. В урне *N*=5 шаров, из них *M*=3 белых. Берутся случайным образом 2 шара. Какова вероятность события *Б1Б2* - оба шара белые? Эта задача выше была решена с помощью гипергеометрического распределения, однако, проще найти *P(Б1Б2)* с помощью формулы (11.1), учитывая, что результат не будет зависеть от того, берутся ли шары «горстью», или по очереди: *P(Б1Б2)=P(Б1)P(Б2/Б1)= =(M/N)(M-1)/(N-1)* = (3/5)(2/4) = 6/20. Здесь события: *Б1* – первым взят белый шар, *Б2* - вторым взят тоже белый шар.

Еще пример. То же условие задачи, но стоит вопрос о нахождении вероятности события *A = {один шар белый, а другой – черный}*. Событие *A* равно сумме несовместных событий: *A = Б1Ч2 + Ч1Б2; P(A) = =P(Б1)P(Ч2/Б1) + P(Ч1)P(Б2/Ч1)=2*(M/N)(N-M)/(N-1)*. Появился фактор (множитель) 2, обусловленный возможностью появления шаров в разном порядке. Это важный результат, демонстрирующий необходимость осторожного применения формулы вероятности произведения событий.

Формула (11.1), переписанная в виде $P(AB)= P(A)P(B/A)$, немедленно может быть обобщена на случай произведения произвольного числа событий *n* (например, *n* = 4):

$$P(ABCД)=P(A)P(B/A)P(C/AB)P(Д/ABC). \qquad (11.2)$$

Получите эту формулу методом математической индукции самостоятельно (теорема умножения вероятностей).

Пример «из Пушкина». Герман берет из колоды три карты (в колоде 52 карты). Какова вероятность события: взяты тройка, семерка, туз? Выше эта задача была решена с помощью обобщения формулы гипергеометрического распределения, однако проще решить ее с помощью формулы (11.2): *P(37T) = P(3)P(7/3)P(T/37)*3!= (4/52)(4/51)(4/50)*3!* Множитель 3! Обусловлен тем, что порядок вытаскивания карт 3,7,Т может быть различным, и число порядков вытаскивания равно числу перестановок трех элементов.

§12. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛЫ БАЙЕСА

Пусть события $B_1, B_2, \ldots B_n$ попарно несовместны и *A* – произвольное событие. Пусть $A \subset B_1+B_2+\ldots+B_n$. Докажем, что (**формула полной вероятности**)

$$P(A)= P(A/B_1)P(B_1)+ P(A/B_2)P(B_2)+\ldots+ P(A/B_n)P(B_n) =$$
$$= \Sigma_{m=1}^{n} P(A/B_m)P(B_m) \; (*). \qquad (12.1)$$

Действительно, событие *A* можно представить в виде $A=AB_1+AB_2+ +\ldots+AB_n$, причем слагаемые в правой части несовместны. Поэтому вероятность события *A* будет равна сумме вероятностей событий AB_k $(k=1\ldots n)$ и тогда, учитывая что $P(AB_k)= P(A/B_k)P(B_k)$, придем к формуле (12.1).

Заменив в равенстве $P(B_k/A)=P(AB_k)/P(A)=P(A/B_1,B_2,\ldots B_n)P(B_k)/P(A)$ знаменатель по формуле (12.1), придем к **формулам Байеса**

$$P(B_k/A) = P(A/B_k)P(B_k)/ \Sigma_{m=1}^{n} P(A/B_m)P(B_m),\ (k=1,\ldots,n). \qquad (12.2)$$

Поясним формулу полной вероятности. Пусть производится выстрел по «непересекающимся» мишеням $B_1,B_2,\ldots B_n$, причем попадание в мишень B_k $(k=1\ldots n)$ или на любую ее часть – события случайные. На каждой из мишеней выделен призовой участок. Попадание на призовой участок мишени B_k есть событие AB_k. Обозначим через A событие *{приз получен}*. Вероятность события A находится по формуле полной ве-роятности.

Приведем пример применения полученных формул. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 25%, вторая – 35%, третья – 40% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 5%, 4%, 2%.

а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт будет дефектным?

б) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт изготовлен первой машиной, если он оказался дефектным?

Решение. Обозначим события: A – болт оказался дефектным, B_1, B_2, B_3 – болт изготовлен соответственно первой, второй и третьей машиной. Заданы вероятности $P(B_1)=0,25$, $P(B_2)=0,35$, $P(B_3)=0,4$, $P(A/B_1)=0,05$, $P(A/B_2)=0,04$, $P(A/B_n)=0,02$. По формуле полной вероятности находим $P(A)=0,05*0,25+0,04*0,35+0,02*0,4= 0,0345$. По формуле Байеса находим условную вероятность $P(B_1/A)=P(A/B_1)\ P(B_1)/P(A)=0,05*0,25/0,0345=0,362$.

Еще один пример применения формулы полной вероятности. Допустим, по некоторой модели экономическая система может попасть из состояния N в состояние A через промежуточные состояния $B_1, B_2,\ldots,B_n$, причем известны вероятности переходов $P(B_k)$ из N в состояния B_k $(k=1,\ldots,n)$ и условные вероятности переходов $P(A/B_k)$. Вероятность $P(A)$ попадания системы из N в состояние A может быть вычислена по формуле полной вероятности. Таким же способом может быть вычислена и вероятность перехода атома из точки N в точку A через одну из промежуточных точек $B_1,B_2,\ldots B_n$ при случайном блуждании атома по кристаллу (модель диффузии).

Формулы Байеса часто называют формулами проверки гипотез. Действительно, пусть $B_1,B_2,\ldots B_n$ – взаимно исключающие гипотезы (события). Допустим, нам известны априорные (до опыта) вероятности этих гипотез $P(B_k)$ $(k = 1\ldots n)$. Известно также, что гипотеза B_k «сообщает» некоторому событию A вероятность $P(A/B_k)$. Если в результате опыта событие A наступило, то это вызывает переоценку вероятностей гипотез B_k, и формулы Байеса позволяют найти новые (апостериорные) вероятности гипотез $P(B_k/A)$.

§13. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ

События A и B из алгебры событий Φ называются независимыми, если

$$P(AB)=P(A)P(B). \qquad (13.1)$$

Независимость событий эквивалентна любому из равенств $P(A/B)=P(A)$, $P(B/A)=P(B)$. Важность понятия независимости обусловлена тем, что независимые явления изучать проще, чем зависимые. Независимость событий либо постулируется исходя из соображений симметрии или здравого смысла, после чего математическая вероятностная модель строится согласно этому предположению, либо она в готовой модели проверяется по приведенному определению независимости. Здравый смысл может и отказать.

Пример. Из колоды (36 карт) случайным образом берется одна. Сразу и неясно, зависимы ли события: взята пика *(П)*, взята дама *(Д)*. Проверяем. Вероятность взять из колоды даму пик равна $P(ДП)=1/36$. С другой стороны, $P(Д)\ =4/36$, а $P(П)=9/36$, так что $P(Д)P(П)=1/9=P(ДП)$, и, следовательно, события *П* и *Д* независимы.

Еще пример. В опыте могут произойти три независимых события A, B и C, вероятности которых заданы. Какова вероятность, что произойдут события A или B или C, то есть произойдет событие $A+B+C$?

Решение. $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\ =\ =P(A)+P(B)+P(C)-P(A)P(B)-P(A)P(C)-P(B)P(C)+P(A)P(B)P(C)$.

И еще пример. Изготавливается деталь в виде прямоугольного параллелепипеда. Деталь считается стандартной, если длина каждого из ее ребер отклоняется от заданных размеров не более чем на 0,01 мм. Вероятности отклонений, превышающих 0,01 мм, составляют: по длине $P(Б_1)$ = 0,08, по ширине $P(Б_2)$ = 0,12, по высоте $P(Б_3)$ = 0,1. Аргумент вероятности $Б_k$ означает «брак». Отклонения возникают независимо друг от друга. Найти вероятность $P(Б)$ непригодности детали. Решение. Деталь будет бракованной, если произойдет по крайней мере одно из событий $Б_k$ $(k=1..3)$, то есть событие $Б = Б_1+ Б_2+ Б_3$. Можно искать вероятность события $P(Б_1+ Б_2+ Б_3)$ (найдите). Однако, быстрее к результату ведет переход к противоположным событиям: $P(Б) =1-P(\underline{Б})=1-P(\underline{Б}_1\underline{Б}_2\underline{Б}_3)= =1-(1- P(Б_1)) (1- P(Б_2)) (1- P(Б_3))$=0,27.

§14. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ ИСПЫТАНИЙ. ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ

Испытания являются независимыми, если исход одного из них не влияет на результаты других. Далее предполагаем, что испытания независимы, производятся в одинаковых условиях, и в каждом испытании возможны ровно два исхода, которые обозначим буквами *У* (успех) и *Н* (неудача). Вероятности исходов каждого испытания считаются заданными: $P(У) = p$, $P(Н) = q$, $p+q=1$. Ставим задачу найти вероятность $P_n(k)$ того, что в серии из n таких испытаний будет ровно k успехов. Порядок чередования успехов *У* и неудач *Н* в серии безразличен.

Элементарными событиями (ЭС) в этой задаче являются всевозможные произведения букв *У* и *Н*, содержащие ровно n букв. Число таких событий равно 2^n. Рассмотрим одно из "благоприятных" ЭС:

$$У...УН...Н, \tag{14.1}$$

содержащее произведение k букв *У* и $(n-k)$ букв *Н*. Вследствие независимости испытаний вероятность события $(У...УН...Н)$ равна $p...pq...q=p^kq^{(n-k)}$. Общее число "благоприятных" ЭС равно C_n^k. Действительно, любое другое "благоприятное" ЭС может быть получено из (14.1) перестановкой входящих в него букв. Общее число перестановок равно $n!$ Но перестановка букв *У* между собой или букв *Н* между собой не дает нового ЭС, поэтому число различных престановок равно $n!/[k!(n-k)!]= C_n^k$. "Благоприятные" ЭС несовместны, их вероятности одинаковы и все равны $p^kq^{(n-k)}$. Поэтому вероятность того, что в серии из n испытаний будет ровно k успехов, равна

$$P_n(k) = C_n^k\, p^kq^{(n-k)}. \tag{14.2}$$

Это и есть формула Бернулли, имеющая многочисленные приложения.

Сделаем важное замечание о ее применении. Пусть одну монету бросают n раз. Какова вероятность выпадения ровно k гербов? Условия применимости схемы Бернулли при этом выполнены, и вероятность находится по формуле Бернулли с $p=q=0,5$. Пусть, с другой стороны, **одновременно** бросают n монет один раз. Какова вероятность выпадения ровно k гербов? Хотя здесь и нет последовательности испытаний, задача опять решается по формуле Бернулли. Предположение о равносильности таких двух опытов физики называют «эргодической гипотезой».

Пример. Бросают 6 монет. Найдем вероятность того, что ровно на трех монетах выпадет герб. Имеем: $n=6$, $k=3$, $p=q=1/2$. Тогда $P_6(3) = =C_6^3(1/2)^3(1/2)^3=5*4*(1/2)^6=0,3125$.

Еще пример. И весьма важный! Обязательно его разберите! Бросают 6 монет. Найдем вероятность того, что не более чем на двух монетах выпадет герб. Соответствующее событие обозначим через A. Оно является суммой трех **несовместных** событий B_0, B_1, B_2, где B_0 – не выпадет ни одного герба, B_1 – выпадет ровно один герб, B_2 – выпадет ровно два герба. Тогда

$$P(A) = P(B_0+B_1+B_2) = P_6(0)+ P_6(1)+ P_6(2) = (C_6^0+C_6^1+C_6^2)(1/2)^6.$$

И еще пример. В урне N шаров, из них M – белых. По очереди случайным образом берутся n шаров, причем каждый взятый шар после осмотра возвращается в урну. Какова вероятность, что среди взятых шаров окажется m белых? Похожая, но не такая задача рассматривалась с помощью гипергеометрического распределения. Тогда шары **не** возвращались после осмотра, и испытания были **зависимыми**. Сейчас они **независимы** и следует использовать формулу Бернулли.

Распределение Бернулли нередко встречается в физических задачах. Пусть складываются n независимых колебаний вида $a_m sin(\omega t)$, где $a_m = a$ с вероятностью p и $a_m = -a$ с вероятностью q. Найдем вероятность того, что интенсивность суммарного колебания будет равна

$$J(k) = [ka + (n-k)(-a)]^2 = (2k - n)^2 a^2,$$

то есть амплитуда $+a$ войдет k раз. Результат, очевидно, дается формулой (14.2).

Рассмотрим медицинское применение формулы Бернулли с использованием формул Байеса. При исследовании больного имеется подозрение на одно из заболеваний B_1, B_2, B_3. Их вероятности в данных условиях равны соответственно $P(B_1) = 1/2$, $P(B_2) = 1/6$ и $P(B_3) = 1/3$. Для уточнения диагноза назначен некоторый анализ, дающий положительный результат с вероятностью $P(A/B_1) = 0,1$ в случае заболевания B_1, с вероятностью $P(A/B_2) = 0,2$ в случае заболевания B_2 и с вероятностью $P(A/B_3) = 0,9$ в случае заболевания B_3. Запись (A) следует понимать как *{событие, состоящее в том, что в результате одного анализа получен положительный результат: человек болен* ***одной из*** *указанных трех болезней}*. Анализы были проведены пять раз (испытания независимы) и дали четыре раза положительный результат и один раз отрицательный (человек не болен никакой из этих болезней). Это событие обозначим как $(5A)$. Требуется найти вероятность каждого заболевания после пяти анализов, то есть условные вероятности $P(B_k/5A)$ $(k = 1..3)$. Вычислим вероятность события $(5A)$ при условии, что это – болезнь B_k, то есть $P(5A/B_k)$. По формуле Бернулли находим $P(5A/B_1) = C_5^4(0,1)^4 0,9$. Аналогично для болезней B_2 и B_3 найдем условные вероятности $P(5A/B_2) = =C_5^4(0,2)^4 0,8$; $P(5A/B_3) = C_5^4(0,9)^4 0,1$. По формуле полной вероятности получим

$$P(5A) = P(5A/B_1)P(B_1) + P(5A/B_2)P(B_2) + P(5A/B_3)P(B_3).$$

По формулам Байеса находим условные вероятности $P(B_k/5A)$:

$$P(B_1/5A) = P(5A/B_1)P(B_1)/ P(5A) \approx 0,002,$$
$$P(B_2/5A) = P(5A/B_2)P(B_2)/ P(5A) \approx 0,01,$$
$$P(B_3/5A) = P(5A/B_3)P(B_3)/ P(5A) \approx 0,988.$$

Таким образом, анализы показали, что если болезнь имеет место, то с вероятностью 0,988 – это болезнь B_3. Отметим, что, как и должно быть,

$$P(B_1/5A)+P(B_2/5A)+P(B_3/5A)=1.$$

Задача. Найти $P(B_k/A)$ $(k = 1..3)$ и сравнить с $P(B_k/5A)$ $(k = 1..3)$.

Для практики иногда требуется знать, **какое число успехов k_0 в задаче Бернулли является наивероятнейшим**, то есть требуется найти то значение k, для которого $P_n(k)=max$. Для ответа на этот вопрос рассмотрим отношение

$$P_n(k+1)/P_n(k) = (n-k)p/[(k+1)(1-p)]$$

(получите это отношение самостоятельно). Функция $P_n(k)$ целочисленного аргумента k возрастает, если $P_n(k+1)/P_n(k)>1$, то есть если $np - (1-p) > k$. При выполнении противоположного неравенства она, естественно, убывает. Таким образом, рассматривая совместно два неравенства $P_n(k_0+1)/P_n(k_0) \le 1$ и $P_n(k_0)/P_n(k_0-1) \ge 1$, получим двойное неравенство, которому должно удовлетворять искомое значение k_0:

$$np-(1-p) \le k_0 \le np+p.$$

Если $np - (1-p) \le 0$, то наивероятнейшее значение $k_0=0$.

§15. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Важным примером последовательности испытаний являются независимые испытания до первого успеха, когда в каждом испытании возможны лишь два исхода: *У* или *Н*, как и в задаче Бернулли. Элементарные события в таких испытаниях – это цепочки букв *У*, *НУ, ННУ, НННУ*,…Число элементарных событий в данной ситуации, очевидно, бесконечно, поскольку успех, увы, может не прийти никогда. По аналогии с задачей Бернулли находим вероятность того, что до наступления первого успеха потребуется k испытаний:

$$P(n=k) = pq^{k-1}. \qquad (15.1)$$

Эта формула называется **геометрическим распределением вероятностей.** Название связано с тем, что правая часть формулы (15.1) есть k-й член геометрической прогрессии. Задание: проверьте, что сумма вероятноятей, вычисляемых по формуле (15.1), равна единице.

Задание. Пусть испытания независимы и в каждом возможно ровно два исхода $У$ и $Н$, происходящие с вероятностями p и q соответственно. Испытания проводятся до тех пор, пока $У$ не появится ровно k раз. Вероятность, что для этого понадобится n испытаний равна

$$P(k)=C_{n-1}^{k-1}p^k q^{n-k}.$$

Обоснуйте этот результат.

§16. ФОРМУЛА ПУАССОНА

Пусть в только что рассмотренной задаче Бернулли число испытаний n велико, а вероятность успеха $У$ сравнительно мала, так, что произведение $np = a$ мало в сравнении с n. Тогда по второму замечательному пределу, известному из математического анализа,

$$(1 - a/n)^n \approx e^{-a}.$$

Следовательно, $P_n(0) = q^n = (1 - a/n)^n \approx e^{-a}$. Далее заметим, что из формулы (14.2) следует

$$P_n(k)/P_n(k-1) = [np-(k-1)p]/(kq) \approx a/k.$$

И тогда

$$P_n(1) \approx a\, P_n(0) \approx ae^{-a},\ P_n(2) \approx aP_n(1)/2 \approx a^2e^{-a}/2,\ \ldots,$$
$$P_n(k) \approx aP_n(k-1)/k \approx a^k e^{-a}/k! \qquad (16.1)$$

Последняя формула называется формулой Пуассона. Это приближенная формула, и сам способ вывода одновременно устанавливает область ее применимости. Ясно, что она, как аппроксимация формулы Бернулли, непригодна при значениях k, сравнимых с n.

Задание. Проверьте, что бесконечная сумма вероятностей, вычисляемых по формуле Пуассона, равна единице.

Пример применения. Допустим, радиоактивный распад ядра атома – явление в атомных масштабах достаточно редкое, так что вероятность $p(t)$ ядру распасться за время t мала. Если тело содержит большое число n радиоактивных ядер, то вероятность за время t распасться k ядрам дается формулой Пуассона.

Еще пример. Пусть общее число лотерейных билетов равно N, а число выигрышных - M. Сколько нужно купить билетов, чтобы вероятность хотя бы одного выигрыша была не меньше заданного значения P? Решение. Естественно принять, что вероятность выиграть одному билету $M/N = p$ мала. Купили n билетов. Согласно формуле Пуассона, вероятность, что ни один билет не выиграет, равна $P_n(0) \approx e^{-a}$, где $a = nM/N$, так что вероятность хотя бы одного выигрыша есть $1- P_n(0) \approx 1 - e^{-a}$. Число n находим из неравенства $1 - e^{-a} \geq P$.

§17. ЛОКАЛЬНАЯ И ИНТЕГРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМЫ МУАВРА - ЛАПЛАСА

Пусть в задаче Бернулли число испытаний n велико, а комбинация $x_k=(k-np)/(npq)^{1/2}$ – ограничена. Тогда точная формула Бернулли приближенно может быть представлена в виде (доказательство не приводим)

$$P_n(k) \approx exp(-x_k^2/2)/(2\pi npq)^{1/2}. \qquad (17.1)$$

Это – локальная теорема Муавра – Лапласа (ЛТМЛ). Она дает плохую аппроксимацию формулы Бернулли, если p или q малы или если k и np сильно отличаются. Так, эту формулу применяют при $n > 100$ и $npq > 20$.

Пусть в задаче Бернулли число испытаний n велико, и требуется вычислить вероятность $P(k_1 \le k \le k_2)$ того, что число успехов k заключено в интервале $[k_1, k_2]$. Используя ЛТМЛ, можно показать, что эта вероятность приближенно равна

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi_0(x_2) - \Phi_0(x_1), \tag{17.2}$$

где

$$x_1 = (k_1 - np)/(npq)^{1/2}, \qquad x_2 = (k_2 - np)/(npq)^{1/2},$$

а

$$\Phi_0(z) = {}_0\int exp(-x^2/2)dx/(2\pi)^{1/2} - \tag{17.3}$$

так называемая **функция Лапласа** (см. о ней ниже). **Формула (17.2) выражает интегральную теорему Муавра – Лапласа (ИТМЛ)**.

Геометрическая интерпретация ЛТМЛ состоит в следующем. Если в координатах k-P (k – ось абсцисс, P – ось ординат) построить точки, отвечающие парам чисел $k - P_n(k)$ и провести через них ломаную линию, то она при большом n и не слишком малом значении произведения npq будет напоминать колоколообразную кривую, окрестность максимума которой хорошо аппроксимируется функцией

$$exp(-x_k^2/2)/(2\pi npq)^{1/2},$$

где $x_k = (k-np)/(npq)^{1/2}$. Тогда $P_n(k)$ приближенно может быть вычислена по ЛТМЛ и тем точнее, чем больше n.

ИТМЛ является следствием локальной теоремы. В интегральной теореме рассматриваются события $(k_1 \le k \le k_2)$, которые являются интервалами Δk значений k. В силу несовместности событий с разными значениями k, вероятность события $(k_1 \le k \le k_2)$ равна сумме вероятностей $P_n(k)$:

$$P(k_1 \le k \le k_2) \approx \Sigma exp(-x_k^2/2)/(2\pi npq)^{1/2}.$$

Обозначая $1/(npq)^{1/2}$ через Δx_k, получаем так называемую интегральную сумму, которая при $n \to \infty$ превращается в определенный интеграл (17.2), что и поясняет происхождение ИТМЛ.

§18. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ МУАВРА - ЛАПЛАСА

ИТМЛ позволяет доказать весьма важное утверждение, называемое теоремой Бернулли. Пусть в n одинаковых и независимых опытах наблюдалось появление события A. Пусть это событие появилось k раз. Отношение k/n, которое обычно называют **частостью**, есть оценка вероятности события A. Ясно что k – величина случайная, меняющаяся от одной серии опытов к другой. Насколько надежна полученная оценка? Выясним этот вопрос.

Опыты, о которых идет речь, являются испытаниями по схеме Бернулли, в которых успех – появление события A, неудача – его непоявление, а k – число успехов. Число p – вероятность успеха – как раз и есть (неизвестная нам) вероятность события A в одном опыте.

Зададим произвольное число $\Delta > 0$ и рассмотрим событие $(|k/n - p| < \Delta)$, или, что то же самое, $(p - \Delta < k/n < p + \Delta)$. Ясно, что оно равносильно событию

$$(|k-np|/(npq)^{1/2} < \Delta(n/pq)^{1/2}).$$

Вероятность последнего события можно найти с помощью ИТМЛ; тем самым

$$P(|k/n - p| < \Delta) = 2\Phi_0[\Delta(n/pq)^{1/2}] \to 1 \text{ для любого } \Delta \text{ при } n \to \infty. \tag{18.1}$$

Таким образом, *вероятность того, что уклонение частости k/n от вероятности p не превзойдет по абсолютной величине сколь угодно малого Δ, стремится к единице при возрастании n.* Это и есть теорема Бернулли. Она – гарантия того, что с ростом числа испытаний увеличивается вероятность близости частости k/n и истинной неизвестной вероятности события p.

ИТМЛ позволяет вычислить так называемый **доверительный интервал** для неизвестной вероятности p, если экспериментально определена частость $w = k/n$. При больших n вероятность события $(-t < (w-p)/(pq/n)^{1/2} < t)$ может быть найдена по ИТМЛ:

$$P(-t < (w-p)/(pq/n)^{1/2} < t) \approx 2\Phi_0(t) = 1-\alpha. \qquad (18.2)$$

В последней формуле число $1-\alpha$, называемое **доверительной вероятностью**, считается заданным. Тогда, зная $1-\alpha$, по таблицам функции Лапласа находим число $t > 0$, входящее в левую часть формулы (18.2), после чего исследуем неравенство

$$|w-p| < t(p(1-p)/n)^{1/2}$$

с целью определения интервала значений p, ему удовлетворяющих. Для этого последнее неравенство возводим в квадрат, сводя его тем самым к квадратному неравенству. Соответствующий многочлен второй степени имеет два действительных корня: p_1 и p_2:

$$p_1 = (2nw + t^2 - tD^{1/2})/[2(n + t^2)], \quad p_2 = (2nw + t^2 + tD^{1/2})/[2(n + t^2)],$$

где

$$D = 4nw(1-w) + t^2, \qquad 0 < p_1 < p_2 < 1.$$

Таким образом, с наперед заданной вероятностью $1-\alpha$ искомая вероятность p лежит в интервале $p_1 < p < p_2$. Точнее, следует говорить, что **«с наперед заданной доверительной вероятностью $1-\alpha$ доверительный интервал $[p_1, p_2]$ покрывает неизвестное нам значение p»**. Выбор значения $1-\alpha$ делают исходя из соображений надежности прогноза. Большей надежности соответствуют значения $1-\alpha$, расположенные ближе к единице.

ИТМЛ можно использовать также для оценки необходимого числа опытов n, приводящих с наперед заданной вероятностью (гарантией) к значениям k/n, отличающимся не более чем на заданное значение Δ от неизвестного p. Для этого в формуле

$$P(|k/n - p| < \Delta) \approx 2\Phi_0[\Delta(n/pq)^{1/2}]$$

следует считать заданной вероятность $1-\alpha$::

$$2\Phi_0[\Delta(n/pq)^{1/2}] = 1-\alpha. \qquad (18.3)$$

В этом равенстве p и q неизвестны. Нетрудно, однако, проверить, что всегда $pq \le 1/4$ (проверьте). Заменяя произведение pq на $1/4$, переходим к уравнению $2\Phi_0[2\Delta n^{1/2}] = 1-\alpha$. Зная $1-\alpha$, по таблицам функции Лапласа находим численное значение t комбинации $2\Delta n^{1/2}$, после чего вычисляем **минимально** необходимое число опытов $n = (t/2\Delta)^2$.

§19. ФУНКЦИЯ ЛАПЛАСА

Функция Лапласа, представимая интегралом Лапласа, является примером специальных функций. Она табулирована, и таблица ее значений приводятся практически во всех руководствах по теории вероятностей или математической статистике. Согласно общим свойствам интегралов, **эта функция монотонно возрастающая**, причем

$$\Phi_0(-\infty) = -1/2, \ \Phi_0(0) = 0, \ \Phi_0(\infty) = 1/2.$$

Эта функция нечетная:

$$\Phi_0(z) = -\Phi_0(-z).$$

Ее асимптотическое представление при $z << 1$ дается формулой

$$\Phi_0(z) \approx (z - z^3/6)/(2\pi)^{1/2},$$

а при $z >> 1$ – формулой

$$\Phi_0(z) \approx 1/2 - exp(-z^2/2)/[z(2\pi)^{1/2}].$$

Кстати, с точки зрения физика, значение z, например, равное 3, уже часто означает, что $z >> 1$.

Приведем для справок небольшую таблицу функции Лапласа:

z	0.1	0.2	0.5	1	1.96	2.58

$\Phi_0(z)$	0.0398	0.0793	0.1915	0.3413	0.475	0.495

ГЛАВА 2. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА (СВ)

СВ – основной объект исследования вероятностными методами для статистиков, экономистов, социологов, экологов, вообще, для всех тех, кто изучает массовые явления. Именно случайные величины изучает математическая статистика.

§1. ОБЩИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Случайная величина X – это переменная, принимающая в результате испытания то или иное числовое значение в зависимости от случайного исхода испытания. *Можно также сказать, что случайная величина сопоставляет каждому исходу опыта одно число.* Таким образом, СВ ставит в соответствие каждому элементарному событию ω по определенному правилу одно число. Следовательно, **случайная величина – числовая функция элементарных событий**: $X=X(\omega)$. На практике при изучении СВ производится ее измерение (наблюдение) в каждом опыте. Один опыт дает одно ω и одно соответствующее этому ω число – значение СВ в данном опыте.

Далее, не оговаривая этого специально, мы всегда предполагаем, что вероятностное пространство, то есть тройка (Ω, Φ, P), задано или может быть построено. Иначе большинство нижеследующих результатов не имеет математического смысла.

Приведем пример. Игра в орлянку. Бросаем монету. Выпал герб *(Г)* – получи *1* сом, выпала решка *(Р)* – получи *(-1)* сом. Здесь случайная величина X – выигрыш одного из игроков. Она, как функция элементарных событий *Г* и *Р,* принимает два значения: $X(Г) = 1$, $X(Р) = -1$.

Мы привели пример дискретной СВ. В более общем случае дискретная СВ принимает счетное множество значений. Другой тип СВ – непрерывные СВ, которые могут принимать несчетное множество значений, например, X – кровяное давление случайно взятого человека. Более точные определения будут даны ниже. Кроме дискретных и непрерывных случайных величин существуют СВ смешанного типа. Они более сложны для математического описания, и здесь рассматриваться не будут.

Введем обозначение событий вида $(X<x)$ – случайное событие, состоящее в том, что СВ приняла какое-либо (одно !) значение, меньшее, чем x. Для описания любой случайной величины X оказывается достаточным при любом $x\in(-\infty, \infty)$ знать вероятности событий $(X<x)$, то есть

$$F(x) =P(X<x).$$

Функцию $F(x)$ называют **функцией распределения (ФР) случайной величины X**. Ясно, что каждая СВ имеет свою ФР. Учитывая, что при $x_1<x_2$ событие $(X<x_2)$ можно представить в виде $(X<x_2)= =(X<x_1)+(x_1\le X<x_2)$, и слагаемые в правой части последнего равенства – несовместные события, получим $P(X<x_2)=P(X<x_1)+P(x_1\le X<x_2)$, то есть

$$\boldsymbol{P(x_1\le X<x_2) =F(x_2) - F(x_1)}.$$

Это – важнейшая формула. Отметим также, что событие $(X\ge x)$ как противоположное к $(X<x)$ имеет вероятность

$$P(X\ge x) = 1-F(x).$$

В дальнейшем считаем, что в тех точках x_0, где $F(x)$ терпит разрыв, значение $F(x_0)$ равно ее предельному значению при движении к точке x_0 **слева**. Таким образом, $F(x)$ в любой точке x **непрерывна слева**.

Рассмотрим некоторые общие свойства ФР. Событие $(x<-\infty)$ означает, что X не приняла никакого значения. Вероятность этого события, очевидно, равна нулю, так что

$$F(-\infty) = 0.$$

С другой стороны, событие $(x<\infty)$ означает, что X приняла любое (одно) значение. Вероятность этого события, очевидно, равна единице, так что

$$F(\infty) = 1.$$

Укажем важное свойство:

$$\textbf{если } x_1<x_2, \textbf{ то } F(x_1) \le F(x_2).$$

Это прямо вытекает из формулы $F(x_2)=F(x_1)+P(x_1\le X< x_2)$ и того, что вероятность – величина неотрицательная. Таким образом, **$F(x)$ – неубывающая функция, изменяющаяся от 0 до 1 при x меняющихся от $-\infty$ до ∞.**

Resume. Для дальнейшего совершенно необходимо постоянно помнить, что в записи вида $P(X<x)$ выражение $(X<x)$ – это **не** неравенство, а **случайное событие,** состоящее в том, что случайная величина X приняла какое-нибудь (одно !) значение, меньшее, чем x. Выражение $P(X<x)$ есть вероятность этого события, и эта вероятность равна значению функции распределения $F(x)$ в точке x. Аналогично понимаются и другие выражения типа $(X\ge x)$ и т.д. Выражение $(X=x)$ – это **элементарное событие** (попадание СВ на точку x). Случайное событие $(a\le X<b)$ - множество точек, то есть отрезок $[a,b)$ оси x. События $(X<x)$ и $(X\ge x)$ – **противоположны**, и их сумма (объединение) есть достоверное событие.

А теперь главный вопрос. Откуда взять функцию распределения? Ответ: она строится по экспериментальным данным или постулируется из каких-либо разумных соображений. Для математики функция распределения, числовые значения вероятностей, рассмотренные ниже законы распределения – это данность; проблема их нахождения лежит за ее пределами.

§2. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Для практических целей дискретные случайные величины часто удобно описывать не функцией распределения, а **законом распределения**. Это таблица

X	x_1	x_2	x_3 ………… x_n
P	p_1	p_2	p_3 ……… p_n

В первой строке указаны значения, которые может принимать СВ, а во второй строке – вероятности этих значений, то есть $P(X=x_k)=p_k,\ k=1,2,..,n$. Числа $x_1, x_2,…,x_n$ в этой таблице удобно располагать в порядке возрастания слева направо. Для определенности принято, что СВ может принимать лишь конечное (n) число значений. Еще раз повторим, что в теории вероятностей закон распределения СВ считается заданным, и его нахождение лежит за пределами «чистой» математики.

События $(X= x_1), (X=x_2),…,(X=x_n)$ несовместны, и их объединение есть достоверное событие. Поэтому

$$\boldsymbol{p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n = \Sigma_{k=1}^{n} p_k =1.} \qquad (2.1)$$

Таким же свойством обладает и сумма вероятностей дискретной СВ, могущей принимать бесконечное, но счетное множество значений.

Приведем примеры дискретных распределений.

Биномиальное распределение: $P_n(X=k) = C_n^k\, p^k(1-p)^{(n-k)},\ k=1,…,n.$

Распределение Пуассона: $P(X=k) = a^k e^{-a}/k!,\ \ k=1,2,3,…$

Геометрическое распределение: $P(X=k) = pq^{k-1},\ k=1,2,3,…$

Гипергеометрическое распределение:

$$P(X=k) = P(N,M,n,k) = [C_M^k\, C_{(N-M)}^{(n-k)}]/ C_N^n,\quad k=1,2,..min(M,n).$$

Проверьте, что для этих распределений выполнена формула (2.1).

Распределение Пуассона тесно связано с потоками событий. Предположим, что проводится наблюдение за n независимыми событиями, появление каждого из которых равновозможно в любой момент времени интервала $[-T/2,T/2]$. Тогда вероятность, что одно из них (любое) появится в течение промежутка времени $t\in[-T/2,T/2]$ равна $p= t/T$. Это обычная геометрическая вероятность. Итак, для каждого события имеем два исхода в течение интервала наблюдения t: оно либо будет, либо нет. Следовательно, вероятность $P(k)$ того, что из n событий в течение этого интервала t произойдут k событий может быть найдена по формуле Бернулли, в которой $p=t/T$. Пусть n и T стремятся к бесконечности так, что отношение $n/T=J=const$. От формулы Бернулли тогда переходим к формуле Пуассона.

$$P(X=k)=(tJ)^k exp(-tJ)/k!$$

Мы ввели случайную величину X – число произошедших событий за время t. Так как каждое из событий обязательно происходит в течение интервала $[-T/2,T/2]$, то J по своему смыслу есть число событий, происходящих в единицу времени, то есть плотность потока событий. Произведение $tJ =a$, как будет показано ниже, есть среднее значение числа событий (точнее, математическое ожидание MX числа событий) происходящих за время t.

Изложенная интерпретация распределения Пуассона полезна в задачах массового обслуживания (потоки заявок, очереди, страхование от несчастного случая...), в физике и т.д.

Функция распределения дискретной СВ может быть построена по закону распределения. Построение производится следующим образом.

$F(x) =P(X<x) = 0$ *при* $x\le x_1$.

$F(x) =P(X<x) = p_1$ *при* $x_1<x\le x_2$.

$F(x) =P(X<x) = p_1+p_2$ *при* $x_2<x\le x_3$.

$F(x) =P(X<x) = p_1+p_2+ p_3$ *при* $x_3<x\le x_4$.

и так далее...

$F(x) =1$ *при* $x>x_n$.

Таким образом, ФР дискретной СВ - это всегда "лестница" с горизонтальными "ступенями", поднимающаяся слева направо вдоль оси x. Эта функция имеет разрывы в точках x_k равные p_k.

Пример. Игра в орлянку. Случайная величина X – выигрыш одного из игроков – принимает два значения: $x_1= -1$ и $x_2 =1$ с соответствующими вероятностями $p_1= p_2=0,5$, что и дает закон распределения. Функция распределения описывается соотношениями: $F(x) = 0$ при $x \le x_1$; $F(x) = 0,5$ при $-1< x \le 1$ и $F(x) =1$ при $x > 1$.

§3. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Это СВ, которые могут принимать любые действительные значения. К ним относятся, например, точный рост случайно выбранного человека, его вес или продолжительность жизни, температура воздуха или степень его загрязнения в данном месте, скорость молекулы в данный момент, размер детали серийного производства, расход электроэнергии, количество осадков и т.д. Многие СВ являются с практической точки зрения непрерывными, например, годовой доход случайно взятого человека, количество денег в банке в данный момент, численность крупной популяции животных в охотничьем хозяйстве, количество молекул в мысленно выделенном объеме воздуха, количество жителей крупного района, число детей, родившихся за год в республике, количество мелких преступлений в городе за год и т.д., так что при математическом моделировании такие случайные величины часто считают непрерывными.

Математическим выражением непрерывности СВ является непрерывность ее функции распределения. Непрерывная СВ описывается **плотностью распределения вероятностей $f(x)$**. Ее смысл прост (но без понимания этого смысла дальнейшее чтение бессмысленно):

$$\boldsymbol{f(x)dx= P(x < X<x+dx)}.$$

Это вероятность события $(x < X<x+dx)$, то есть вероятность попадания СВ в бесконечно малый интервал $(x,x+dx)$. Отсюда следует, что вероятность события $(X<x)$, которая равна $F(x)$, дается определенным интегралом, который есть просто сумма бесконечно малых – сумма вероятностей несовместных событий $(x < X<x+dx)$

$$\boldsymbol{F(x) = P(X<x) = {}_{-\infty}\int^{x} f(x)dx}. \tag{3.1}$$

Таким образом, $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, обладающая свойством $F(-\infty)=0$ и

$$\boldsymbol{f(x)=dF/dx.}$$

По определению вероятности функция $f(x)$ неотрицательна. Аналогично имеем

$$P(a\le X<b) = F(b) - F(a) = {}_{a}\int^{b} f(x)dx, \qquad {}_{-\infty}\int^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Из общих свойств определенных интегралов следует, что если $f(x)$ имеет разрывы только первого рода, то $F(x)$ – непрерывная функция.

СВ смешанного типа, то есть те, которые нельзя отнести ни к дискретным, ни к непрерывным СВ, имеют разрывную ФР, но не "лестницу". Эти СВ здесь не рассматриваются.

Примечание. Физики плотность распределения вероятностей обычно называют функцией распределения, внося тем самым путаницу в терминологию.

Примеры.

Нормальное распределение: $f(x) = exp[-(x-a)^2/2\sigma^2]/(2\pi\sigma)^{1/2};\ \sigma>0,\ -\infty<a<\infty.$

Показательное распределение: $f(x) = 0$ при $x\le 0$ и $f(x) = a*exp(-ax)$ при $x>0;\ \ a>0.$

Равномерное распределение: $f(x) = 1/(b-a)$ когда $x\in[a,b]$, $f(x)=0$ когда $x\notin[a,b],\ a<b.$

Последнее распределение соответствует представлению о "равновозможности" случайной величине принять любое значение $x\in[a,b]$.

NB. Дискретная СВ с вероятностями, отличными от нуля, принимает конкретные значения $x_1,x_2,\ldots,x_n$ (согласно ее закону распределения). **Вероятность непрерывной СВ принять какое-либо конкретное значение *b* равна нулю:** $P(X=b) = F(b) - F(b) = 0$. Так, например, равна нулю вероятность **встретить** человека, имеющего вес точно70 кг. Равна нулю и вероятность того, что скорость молекулы в данный момент будет равна точно 1 км/с. И это связано не с невозможностью точных измерений, а с принципиальной особенностью непрерывных СВ. Как же тогда вообще появляются конкретные значения непрерывных СВ, если вероятность таких событий нулевая? Возможный ответ: если некоторая (дискретная или непрерывная – все равно) СВ **уже приняла** конкретное значение, вероятность – как предсказание – уже не причем. **Предсказать** же появление конкретного значения непрерывной СВ можно лишь с нулевой вероятностью.

§4. СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ДВУХ СВ

Изучение взаимосвязи нескольких СВ имеет большое практическое значение, потому что на этом пути можно установить причинно-следственные связи и тогда, воздействуя на причину, мы можем получить желаемый результат. Ограничимся ниже изучением связи двух СВ. На практике при изучении двух СВ производится их одновременное измерение (наблюдение) в каждом опыте. То есть, в результате одного опыта получим одно элементарное событие ω и два соответствующих этому ω числа – значения двух случайных величин. Тогда приходим к следующему определению совместного распределения.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega,\ \Phi,\ P)$ заданы две случайных величины $X(\omega)$ и $Y(\omega)$, то есть каждому ω из Ω по определенному правилу ставится в соответствие два числа – значения двух СВ. Совместная функция распределения $F(x,y)$ этих СВ по определению есть

$$F(x,y) = P(X<x, Y<y).$$

С ее помощью находятся вероятности событий $(X<x, Y<y)$. Функция распределения либо задается исходя из общих соображений, либо строится на основе наблюдений.

Ниже мы часто будем иметь дело также с законами распределения (для дискретных случайных величин) либо с плотностями распределения вероятностей (для непрерывных случайных величин).

Рассмотрим дискретные СВ. Их совместный закон распределения есть таблица

$X\backslash Y$	y_1	y_2	...	y_n
X_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}
X_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}
...	...	...	...	...
X_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}

где p_{ij} – вероятность одновременного появления в испытании значений x_i и y_j:

$$p_{ij} = P(X=x_i, Y=y_j),$$

то есть вероятность события $(X=x_i, Y=y_j)$.
Согласно основному свойству вероятностей, их сумма должна быть равна единице:

$$\Sigma_{i=1}{}^{m}\Sigma_{j=1}{}^{n}p_{ij}=1.$$

Из совместного распределения можно получить законы распределения **отдельно** для случайных величин X и Y. Действительно, совокупность вероятностей $p_{11}, p_{12},..., p_{1n}$ относится к ситуации, когда наблюдаются значение x_1 случайной величины X и всевозможные значения величины Y. Сумма этих вероятностей

$$p_{1*} = \Sigma_{j=1}{}^{n}p_{ij}$$

есть вероятность появления в опыте значения x_1 независимо от того, какие значения примет случайная величина Y. То есть $p_{1*} = P(X=x_1)$. Символ * означает, что произведено суммирование по второму индексу, относящемуся к случайной величине Y. Продолжая рассуждения, получим закон распределения величины X:

X	x_1	x_2	...	x_m
P	p_{1*}	p_{2*}	...	p_{m*}

Аналогично, суммируя вероятности p_{ij} по первому индексу, найдем закон распределения отдельно для Y:

Y	y_1	y_2	...	y_n
P	p_{*1}	p_{*2}	...	p_{*n}

где $p_{*j} = P(Y=y_j)$.

Независимость случайных величин, подобно независимости случайных событий, означает, что вероятности p_{ij} факторизуются:

$$p_{ij} = p_{i*}\,p_{*j} = P(X=x_i)P(Y=y_j). \qquad (4.1)$$

Согласно последней формуле, совместное распределение независимых случайных величин может быть найдено перемножением распределений по правилу (4.1). Независимость СВ либо проверяется на основе имеющегося совместного закона распределения, либо сам совместный закон распределения строится так, чтобы выполнялась формула (4.1), если есть основания считать X и Y независимыми.

Совместное распределение непрерывных случайных величин описывается совместной плотностью распределения вероятностей $f(x,y)$, имеющей следующий смысл: $f(x,y)dxdy$ – вероятность одновременного попадания случайной величины X на бесконечно малый интервал $(x,x+dx)$, а случайной величины Y – на интервал $(y,y+dy)$. Поскольку определенный интеграл по своей сути есть сумма, плотность распределения вероятностей удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)dxdy = 1,$$

вполне аналогичному требованию, чтобы сумма всех вероятностей равнялась единице.

Независимость непрерывных случайных величин означает, что плотность распределения вероятностей факторизуется: $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$. Индексы X и Y указывают, к какой из случайных величин относятся функции f_X и f_Y.

§5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ

Общеизвестно понятие **среднего значения**. Например, среднее значение $<X>$ числа детей в семье вычисляется по формуле

$$<X> = (x_1n_1+x_2n_2+...+x_mn_m)/N,$$

где N – общее число обследованных семей; n_1 – число семей, в которых количество детей равно x_1, и т.д. По своему смыслу отношение n_i/N $(i=1...m)$ есть оценка вероятности того, что в случайно взятой семье имеется x_i детей. Среднее $<X>$ – это число. По аналогии вводим:

Математическое ожидание дискретной случайной величины *X* равно

$$MX=\Sigma p_i x_i, \tag{5.1}$$

где суммирование идет по всем значениям i. Пределы суммирования не указаны для компактности записи. Заметим, что обозначение MX – это **не** произведение M и X, а единый символ (иероглиф), подобно тому как обозначение $sinX$ – также иероглиф. По своему определению математическое ожидание – это постоянная (число).

Если число возможных значений дискретной случайной величины бесконечно, то при вычислении MX приходится суммировать бесконечный ряд. Если он расходится, говорят, что математическое ожидание не существует.

Приведем пример применения понятия «математическое ожидание» в теории азартных игр. К азартным играм относятся те, где все решает его величество Случай (карты в этом смысле к ним не относятся – в них слишком многое зависит от стратегии игрока). Рассмотрим правила следующей игры. Бросается кубик один раз. Выпало менее трех очков – Вы получаете 1 сом. Выпало более двух очков - отдаете 1 сом. «Справедливы» ли правила такой игры?

Интуитивно ясно, что симметрия партнеров нарушена, и они поставлены в неравные условия. Но это ясно только потому, что правила очень просты. Реальные мошенники изобретают неочевидные способы обмана. Для разоблачения нужно сформулировать математический критерий «справедливости». Таковым является общее для многих игр требование, чтобы при неограниченном повторении игры математическое ожидание выигрыша каждого партнера было равно нулю. В нашей игре это выглядит так. Ваш выигрыш X – величина случайная. Выпало менее трех очков (вероятность этого равна 2/6) – получаете x_1 сом. Выпало более двух очков (вероятность этого равна 4/6) – получаете x_2 сом (по условиям данной игры x_2 отрицательно). Математическое ожидание выигрыша полагаем равным нулю: $MX = x_1/3+2x_2/3=0$. Отсюда следует, что должно выполняться условие $x_2 = -0,5x_1$. Таким образом, для справедливости необходимо, чтобы проигрыш $/x_2/$был в два раза меньше выигрыша x_1.

Весьма часто приходится иметь дело с **функциями случайных величин $Z=\varphi(X)$**, например, $Z=X^2$, $Z=CX+b$, $Z=sinX$ и т.д., где случайная величина X выступает как аргумент, а случайная величина Z – как функция, C и b – неслучайные величины (числа). Формула $Z=X^2$ означает, что каждому значению x_i случайной величины X соответствует одно значение $z_i=x_i^2$ случайной величины Z.

Напомним еще раз соотношение между математическими формулами и жизнью. В результате опыта появляется с некоторой вероятностью элементарное событие. Этому событию по определенному (неслучайному!) правилу ставится в соответствие одно число x_i – значение СВ X. Этому x_i по определенному (неслучайному) правилу ставится в соответствие одно число $z_i = \varphi(x_i)$ – значение СВ Z.

Функционально связанные случайные величины зависимы.

Математическое ожидание функции $Z=\varphi (X)$ случайной величины X вычисляется по формуле:

$$MZ=\Sigma p_i \varphi(x_i), \tag{5.2}$$

так что, например, если $Z=CX+b$, то

$$MZ=\Sigma p_i(Cx_i+b)= C\Sigma p_i x_i+b\Sigma p_i=C(MX)+b. \tag{5.3}$$

Подчеркнем, что в последних двух формулах числа p_i – это вероятности появления значений x_i (а не z_i). Можно доказать, что вычисление MZ по формуле (5.2) приводит к тому же результату, что и вычисление по формуле $\Sigma p_i z_i$, где p_i – вероятности появления значений z_i.

Найдем математическое ожидание суммы $X+Y$ произвольно связанных дискретных случайных величин, определяемое формулой

$$\boldsymbol{M(X+Y)} = \Sigma_{i=1}{}^{m}\Sigma_{j=1}{}^{n}p_{ij}(x_i+y_j),$$

где пределы суммирования выбраны в соответствии с совместным законом распределения, приведенным в предыдущем параграфе. Согласно результатам этого параграфа,

$$\boldsymbol{M(X+Y)}=\Sigma_{i=1}{}^{m}x_i\Sigma_{j=1}{}^{n}p_{ij}+\Sigma_{j=1}{}^{n}y_j\Sigma_{i=1}{}^{m}p_{ij}=\Sigma_{i=1}{}^{m}x_ip_{i*}+\Sigma_{j=1}{}^{n}y_jp_{*j}=MX+MY.$$

Рассмотрим биномиальное распределение (распределение Бернулли). Число успехов в n испытаниях является случайной величиной, которую обозначим через X, так что

$$P(X=k) = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Математическое ожидание введенной случайной величины X можно найти непосредственно, применяя распределение Бернулли (найдите!). Удобнее, однако, это сделать другим способом, используя тот факт, что испытания в задаче Бернулли независимы.

Для этого введем независимые случайные величины X_m $(m=1...n)$, распределенные все по одному и тому же закону: $X_m=0$, если в m-м испытании происходит событие «неудача, Н», и $X_m=1$, если в этом испытании «успех, У». Вероятности появления этих значений случайных величин X_m известны: $P(X_m=0)=q$, $P(X_m=1)=p$. Математическое ожидание X_m находится предельно просто: $MX_m = 0q+1p=p$. Случайную величину X можно представить в виде суммы

$$X=X_1+X_2+...+X_n. \tag{5.4}$$

Тогда $MX = M(X_1+X_2+...+X_n)=np$. Итак, **математическое ожидание числа успехов в задаче Бернулли равно *np***.

Параметр a в распределении Пуассона

$$P(k)=a^k e^{-a}/k!$$

есть также математическое ожидание. Это прямо следует из способа вывода последней формулы (см. выше). Задание: докажите последнее утверждение непосредственно по определению (5.1).

Математическое ожидание непрерывной случайной величины *X* по определению равно:

$$MX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$

Если этот интеграл расходится, то говорят, что математическое ожидание не существует. Как и для дискретных случайных величин, математическое ожидание функции $Z=\varphi(X)$ случайной величины X можно вычислить по формуле:

$$MZ = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\varphi(x)} f_x(x)dx,$$

где f_X – плотность распределения вероятностей для X.

§6. СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Из определения математического ожидания и результатов двух предыдущих параграфов вытекают его свойства, одинаково справедливые как для дискретных, так и для непрерывных СВ.

1. Если $C=const$, то $MC=C$. Действительно, постоянную C можно формально объявить случайной величиной, принимающей с вероятностью единица одно значение С, так что $MC=C*1=C$.
2. Если $C=const$, $b=const$, то $M(CX+b)=C(MX)+b$.
3. $|MX|\le M|X|$ (докажите).
4. Для **любых** случайных величин $M(X+У)=MX+MУ$ (при условии, что MX и $MУ$ существуют, то есть соответствующие суммы или интегралы сходятся).
5. Для **независимых (!)** случайных величин

$$M(XУ)=(MX)(MУ). \tag{6.1}$$

Задание: докажите соотношение (6.1).

Пример. Пусть складываются n независимых колебаний вида $a_m sin(\omega t)$, где $a_m= +a$ с вероятностью p и $a_m= - a$ с вероятностью q. Обозначим через X случайную величину, равную числу колебаний с амплитудой $+a$. Найдем математическое ожидание случайной величины $J(X)$ – интенсивности суммарного колебания, которая равна квадрату суммы амплитуд

$$J(X) = [Xa + (n-X)(-a)]^2 = (n - 2X)^2a^2.$$

Пользуясь представлением (5.4), найдем, что

$$MJ = M(n -2X)^2a^2= (n^2- 4n^2p + 4MX^2)a^2 =[(1 - 4p)n^2 + 4M(X_1^2 +...+ X_n^2)+$$
$$+8M(X_1X_2 + X_1X_3 +...)]a^2= [(1 - 4p)n^2 + 4np + 4p^2n(n - 1)] a^2 =$$
$$= n^2a^2[1 + 4pq(1/n - 1)].$$

При вычислениях использовалась формула (6.1).

Обсудим результаты, как говорят физики. Если $p=q=0,5$, то $MJ = =na^2$, то есть интенсивности отдельных колебаний складываются (полная некогерентность). Если $p =1$ или $q = 1$, то $MJ = n^2a^2$ (полная когерентость).

Задание. Более точно интенсивностью $J(X)$ называется среднее по времени значение квадрата суммы величин $a_m sin(\omega t)$. Такие средние любой функции времени $y(t)$ вычисляются по формуле:

$$lim(1/T) {}_0\int^T y(t))dt \text{ при } T\to\infty.$$

Провести усреднение в задаче о сложении случайных колебаний.

§7. ДИСПЕРСИЯ

При изучении СВ часто бывает недостаточным знать только ее математическое ожидание MX (или ее среднее значение $<X>$, когда СВ изучается экспериментально). Возможные уклонения от MX, то есть разброс, рассеяние СВ вокруг MX – является важной характеристикой СВ. Такое более детальное описание свойств СВ дает дисперсия и связанное с ней среднее квадратическое отклонение (см. также неравенство Чебышева в §11).

Дисперсией случайной величины X называется

$$DX= M(X - MX)^2. \tag{7.1}$$

Из этого определения немедленно следует, что **дисперсия неотрицательна.**

Величину $\sigma = (DX)^{1/2}$ называют **средним квадратическим отклонением**. Преобразуем формулу (7.1), обозначая для краткости $a=MX$:

$$DX = M(X^2-2aX+a^2) = M(X^2) - 2a(MX) + a^2 = M(X^2) - a^2.$$

Для дискретной СВ

$$DX = \Sigma p_i(x_i-a)^2,$$

а для непрерывной

$$DX = {}_{-\infty}\int^{\infty}(x-a)^2f(x)dx.$$

Предполагается, что соответствующие суммы и интегралы сходятся, иначе дисперсия не существует.

Важно отметить, что если существует дисперсия X, то существует и математическое ожидание, то есть соответствующая сумма (интеграл) для математического ожидания тоже сходится. Пример. Некоторая СВ X описывается плотностью распределения вероятностей $f(x) = 0$ при $x < 1$ и $f(x) =2/x^3$ при $x \geq 1$. Тогда ее математическое ожидание

$$MX = {}_{-\infty}\int^{\infty}xf(x)dx\ MX = 2{}_1\int^{\infty}(1/x^2)dx = 2$$

существует, а дисперсия

$$\mathbf{DX} = {}_{-\infty}\int^{\infty}(x-a)^2f(x)dx = 2{}_1\int^{\infty}\mathbf{(x-2)}^2(1/x^3)dx = \infty,$$

то есть не существует.

Свойства дисперсии.

1. Если $C=const$, то $DC = 0$. Это вытекает из того, что $C - MC=0$.
2. Если C и b постоянные, то $D(CX+b) = C^2DX$. Докажем это свойство. Обозначим $M(CX+b)=Ca+b$. Тогда

$$D(CX+b)=M(CX+b-Ca-b)^2 = M[(CX)^2-2C^2aX+(Ca)^2]=$$
$$=C^2M(X^2) --2C^2a(MX)+(Ca)^2=C^2[M(X^2)-a^2]=C^2DX.$$

Таким образом, в частности, прибавление постоянной к СВ ее дисперсии не меняет.

3. Если случайные величины X и Y **независимы**, то $D(X + Y) = DX +DY$.

Дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий. Это чрезвычайно важное свойство.

Докажем это свойство, обозначая $MX= a,\ MY = b$.

$$D(X + Y) = M(X + Y - a -b)^2 = M(X - a)^2 + M(Y - b)^2 +$$
$$+ 2[M(X - a)][M(Y - b)] = DX + DY + 2(a - a)(b - b) = DX + DY.$$

Вычислим дисперсии некоторых распределений.

Распределение Бернулли. Случайную величину X – число успехов в серии из n испытаний – можно представить в виде суммы $X=X_1+ +X_2+...+X_n,$ как это делалось при вычислении MX, где X_k $(k=1...n)$ – независимые и одинаково распределенные СВ с математическим ожиданием p. Их дисперсия

$$DX_k = M(X_k^2) - p^2 = p*1 - p^2 = p(1 - p) = pq.$$

Тогда

$$DX = DX_1 + DX_2 +...+ Dx_n = nDX_k = npq.$$

Распределение Пуассона. В этом распределении вероятность успеха p считается малой, а вероятность неудачи $q = 1 - p$, наоборот, близка к единице. Так что

$$DX = npq \approx np = a.$$

Подчеркнем в заключение, что как математическое ожидание, так и дисперсия – величины **неслучайные**.

Итак, дисперсия – это количественная характеристика отклонений случайной величины от ее математического ожидания. Эти отклонения физики называют флуктуациями. Теперь понятно, как ответить ребенку на вопрос «зачем небо голубое, а закатное солнце красное». Надо сказать ему, что голубой свет рассеивается на флуктуациях концентрации молекул воздуха сильнее, чем красный (почему?). Вот этот рассеянный солнечный свет мы и воспринимаем, как голубой цвет неба. Высоко в горах концентрация молекул воздуха меньше, потому и рассеяние меньше и небо темнее. На вторую половину вопроса пусть он после сказанного Вами ответит сам.

§8. КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Рассмотрим две произвольные СВ X и Y, имеющие математические ожидания a и b и средние квадратические отклонения σ_X и σ_Y соответственно. Неслучайная величина

$$cov(X,Y) = M[(X - a)(Y - b)] = M(XY) - ab$$

называется **ковариацией** двух СВ. Отметим, что $cov(X,X) = DX$.

Для независимых СВ $cov(X,Y)=0$, потому что $M(XY)=(MX)(MY)=ab$. Сразу подчеркнем, что обратное, вообще говоря, неверно: равенство нулю ковариации двух СВ еще не означает их независимости.

Чтобы понять смысл ковариации, вычислим дисперсию суммы $X + Y$.

$$D(X + Y) = M(X + Y - a - b)^2 = M(X - a)^2 + M(Y - b)^2 + 2[M(X - a)(Y - b)] =$$
$$= DX + DY + 2cov(X,Y).$$

Становится ясным, что ковариация характеризует степень зависимости случайных величин. Более удобной характеристикой зависимости СВ оказывается коэффициент корреляции.

Коэффициентом корреляции двух СВ называется число K, находимое по формуле:

$$\mathbf{K(X,Y) = cov(X,Y)/(\sigma_X \sigma_Y)}.$$

Приведем свойства коэффициента корреляции (попробуйте доказать).

1. $/K(X,Y)/ \le 1$. Иными словами, всегда $/cov(X,Y)/ \le \sigma_X \sigma_Y$.

2. Если X и Y статистически независимы, то $K(X,Y) = 0$. Наоборот, если $K(X,Y) = 0$, то это **не доказывает** статистической независимости X иY (см. задачу парой строчек ниже). Если СВ распределены по **бинормальному** закону, то из равенства $K(X,Y)=0$ **следует** статистическая независимость X и Y.
3. Если X и Y связаны линейной зависмостью $Y = AX + B$, где A и B – постоянные, то $|K(X,Y)|= 1$.

Задача. Покажите, что если СВ X принимает лишь два значения 1 и (-1) с вероятностями 0,5 и если $Y = X^2$, то $K(X,Y) = 0$, хотя величины X и Y зависимы и даже связаны функционально.

В физике весьма часто используются корреляционные функции, вполне аналогичные коэффициенту корреляции. Именно через них вычисляются коэффициенты поглощения и рассеяния света, диэлектрическая проницаемость сред, характеристики турбулентного движения и т.д. Корреляция служит людям в наручных электронных часах и компьютерах с жидкокристаллическим дисплеем (ориентационная корреляция молекул).

§9. МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Моментом порядка k случайной величины X называется число $M(X^k)$. Центральным моментом порядка k называется число $\mu_k = M[(X - a)^k]$, где $a = MX$.

Центральный момент второго порядка – это дисперсия. Число $\Sigma = =\mu_3/\sigma^3$ – называют показателем асимметрии распределения. Для непрерывных распределений он характеризует количественно несимметрию кривой плотности распределения. Число $\varepsilon = (\mu_4/\sigma^4 - 3)$ называют эксцесс. Показатели Σ и ε указывают на степень отклонения рассматриваемого распределения от нормального, о котором сейчас пойдет речь. Для нормального распределения Σ и ε равны нулю.

§10. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

Особое значение в теории вероятностей и в практике имеет нормальное распределение. Дело в том, что, как будет показано ниже, если СВ формируется под воздействием многих относительно слабых случайных факторов, то она, как правило, распределена по нормальному закону (см. ниже раздел «Центральная предельная теорема»). По этой причине свойства нормального распределения изучены весьма детально, и многие результаты получены именно для этого распределения. Так, теоремы Муавра – Лапласа, возникающие в задаче Бернулли, как раз соответствуют сказанному: число успехов X в задаче Бернулли, как случайная величина, подчиняется нормальному распределению, если число испытаний n стремится к бесконечности, потому что X есть сумма n независимых случайных величин, принимающих всего два значения: 1 и 0, в то же время $max\ X=n$ стремится к бесконечности вместе с n. Заметим, что число успехов X в задаче Бернулли – величина **дискретная**, однако, если $n \to \infty$, то X ведет себя подобно непрерывной СВ.

Нормальное распределение имеет вид

$$f(x) = exp[-(x - a)^2/(2\sigma^2)]/[(2\pi)^{1/2}\sigma], \quad -\infty<a<\infty,\ \sigma>0.$$

Математическое ожидание СВ, имеющей нормальное распределение, равно

$$MX = {}_{-\infty}\int^{\infty} xf(x)dx = {}_{-\infty}\int^{\infty} x\ exp[-(x - a)^2/(2\sigma^2)]dx/[(2\pi)^{1/2}\sigma] = a.$$

Дисперсия СВ, имеющей нормальное распределение, как можно показать, равна σ^2. Таким образом, параметр a, входящий в нормальное распределение, есть математическое ожидание СВ, а параметр σ – ее среднее квадратическое отклонение.

Эти результаты, которые здесь приведены без вывода, легко получаются путем замены переменной в соответствующих интегралах и использования формул

$$ {}_{-\infty}\int^{\infty} exp(-x^2)dx = \pi^{1/2}, \quad {}_{-\infty}\int^{\infty} x^2 exp(-x^2)dx = \pi^{1/2}/2.$$

Функция распределения $F(x)$ СВ, описываемой нормальным распределением с параметрами a и σ, всегда может быть выражена через функцию Лапласа Φ_0:

$$F(x) = P(X < x) = \Phi_0((x-a)/\sigma) + \Phi_0(\infty) = \Phi_0((x-a)/\sigma) + 0,5.$$

Тогда вероятность попадания СВ на интервал $(c \le X < d)$ равна

$$P(c \le X < d) = \Phi_0((d-a)/\sigma) - \Phi_0((c-a)/\sigma).$$

Напомним, что функция Лапласа нечетная: $\Phi_0(-x) = - \Phi_0(x)$.

Пользуясь таблицей функции Лапласа, находим, в частности, что вероятность попадания нормально распределенной СВ в интервал $(a - 3\sigma \le X < a + 3\sigma)$ равна 0,9973, то есть во многих случаях можно считать, что наблюдение значений СВ **вне** указанного интервала – практически невозможное событие (его вероятность равна всего 0,0027 = =0,27%). Это так называемое «правило трех сигм».

Нормальное распределение случайной величины X с параметрами a, σ будем обозначать как $N(x;a;\sigma)$.

Приведем исключительно важные результаты, которые используются в математической статистике.

Пусть СВ X распределена по закону $N(x;\ a;\ \sigma)$, и $T = X/A$, где A – постоянная. Найдем закон распределения T. Соответствующую функцию распределения обозначим $F_T(t)$. По определению $F_T(t) =P(T<t)$. Рассмотрим событие $(T<t)$. Оно равносильно событию $(X<At)$. Значит, $F_T(t)=P(X<At)=F(At)=\Phi_0((At-a)/\sigma)+\Phi_0(\infty)$. Отсюда сразу ясно, что СВ T распределена по закону $N(t;\ a/A;\ \sigma/A)$. Совершенно аналогично можно показать, что СВ $W = X- a$ распределена по закону $N(w;0;\sigma)$. Это даже очевидно (поясните, почему). Таким образом, СВ $Z =(X-a)/ \sigma$ распределена по закону $N(x;0;1)$ (докажите).

Пусть две **независимых** СВ X и Y обе распределены по одному и тому же закону $N(x;\ 0;\ \sigma)$ (для краткости записи принято, что $a=0$). Их совместная плотность распределения в силу независимости равна просто произведению плотностей распределения:

$$f_{XY}(x,y) = exp[-(x^2+y^2)/(2\sigma^2)]/[2\pi\sigma^2].$$

Найдем закон распределения СВ $V=(X+Y)/2$. Соответствующую функцию распределения обозначим $F_V(v)$. По определению $F_V(v) = P(V<v)$. Рассмотрим событие $(V<v)$. Оно равносильно событию $(X+Y<2v)$. Тогда $F_V(v)=P(X+Y<2v)$. Последняя вероятность вычисляется как двойной интеграл от $f_{XY}(x,y)$ по полуплоскости $x+y<2v$. Поворотом осей координат на угол $\pi/4$ и использованием интеграла Пуассона сводим двойной интеграл к однократному, который заменой переменных приводится к виду

$$F_V(v)=\Phi_0(v2^{1/2}/\sigma)+\Phi_0(\infty).$$

Таким образом, V распределена по нормальному закону $N(v;0;\ \sigma/2^{1/2})$.

Следующий важный факт, являющийся обобщением только что полученного результата, приведем без доказательства. Пусть случайные величины X_k, $(k=1\ldots n)$ попарно независимы и все распределены по закону $N(x;\ a;\ \sigma)$. Тогда случайная величина $U=(X_1+X_2+\ldots+X_n)/n$ распределена по закону $N(x;\ a;\ \sigma/n^{1/2})$, то есть она тоже нормально распределена, имеет то же самое математическое ожидание a, что и X_k, но ее среднее квадратическое отклонение в $n^{1/2}$ раз меньше, чем у составляющих ее СВ. Можно сказать, что она “менее случайна”, чем ее составляющие. Вероятность события $(c<U<d)$ выражается через функцию Лапласа:

$$P(c<U<d)= \Phi_0[(d-a)/(\sigma/n^{1/2})] - \Phi_0[(c-a)/(\sigma/n^{1/2})].$$

Элегантнее всего последний результат получается **методом характеристических функций.**

§11. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Рассмотренное в предыдущем параграфе «правило трех сигм» получено для специальной ситуации – нормального распределения. Возникает вопрос, а как велика вероятность больших уклонений **произвольной** случайной величины от ее математического ожидания. Ответ на этот вопрос дают неравенство Чебышева и закон больших чисел. В действительности это не один закон, а группа законов разной степени общности. Вначале докажем вспомогательное

Неравенство Чебышева.

Получим его на примере дискретной СВ. Конечный результат справедлив для любых СВ, у которых существует дисперсия. Напомним, что если у СВ существует дисперсия, то существует и математическое ожидание (наоборот – не всегда!). Обозначим, как уже часто делалось выше, $a = MX$. Исходим из выражения для дисперсии:

$$DX = \Sigma p_i(x_i-a)^2.$$

Пусть ε – любое положительное число. Если в только что написанной сумме мы оставим только те члены, где $|x_i - a| \geq \varepsilon$, то от этого сумма может только уменьшиться:

$$DX \geq \Sigma p_i(x_i-a)^2.$$

Но эта сумма уменьшится еще более, если в каждом слагаемом мы заменим множитель $(x_i-a)^2$ меньшей величиной ε^2: $DX \geq \varepsilon^2 \Sigma p_i$. Стоящая справа сумма есть сумма вероятностей всех тех значений x_i случайной величины X, которые уклоняются от MX в ту или иную сторону больше, чем на ε. Другими словами, это вероятность события $(|X-a| \geq \varepsilon)$, то есть того, что фактически полученное уклонение окажется больше ε. Таким образом, находим

$$P(|X - a| \geq \varepsilon) \leq DX/\varepsilon^2. \qquad (11.1)$$

Это и есть неравенство Чебышева, точная формулировка которого такова: *Если СВ X имеет дисперсию, то при любом $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство (11.1)*. Это неравенство наиболее ярко демонстрирует смысл дисперсии как количественной характеристики возможных уклонений случайной величины от ее математического ожидания.

Сравним (11.1) с «правилом трех сигм». Для этого положим $\varepsilon = 3\sigma$. Получим $P(|X-a| \geq \varepsilon) \leq 1/9$, что примерно в четыре раза больше, чем предсказывается «правилом трех сигм».

Применим неравенство Чебышева к проблеме оценки числа измерений для получения заданной точности результата. Пусть проводится n независимых измерений некоторой неизвестной величины a. Ошибки каждого измерения $X_1, X_2, \ldots X_n$ будем считать случайными величинами. Предположим, что $MX_k=0$ $(k=0\ldots n)$, что означает отсутствие систематической ошибки. Пусть $DX_k = b^2$. За значение неизвестной величины a естественно принять среднее арифметическое результатов измерений. Тогда ошибка δ_n в определении числа a будет равна

$$\delta_n = (X_1 + X_2 + \ldots + X_n)/n, \qquad (11.2)$$

при этом, поскольку δ_n – величина случайная, ее дисперсия равна

$$D\delta_n = (DX_1 + DX_2 + \ldots + DX_n)/n^2 = b^2/n, \qquad M\delta_n = 0.$$

Предположим, что нам нужно, чтобы ошибка δ_n не превосходила ε с достаточно большой вероятностью. Например, $P(|\delta_n| < \varepsilon) > 0{,}99$. Вводя противоположное событие $(|\delta_n| \geq \varepsilon)$, это неравенство можно записать в эквивалентном виде

$$P(|\delta_n| \geq \varepsilon) \leq 0{,}01. \qquad (11.3)$$

По неравенству Чебышева тогда имеем:

$$P(|\delta_n| \geq \varepsilon) \leq D\delta_n/\varepsilon^2 = b^2/n\varepsilon^2.$$

Следовательно, неравенство (11.3) будет выполнено, если $b^2/n\varepsilon^2 \leq 0{,}01$, то есть для получения заданной точности результата (среднего арифметического) число измерений n должно превосходить $b^2/(0{,}01\varepsilon^2)$. Этот прием повышения точности измерений используется на практике.

Отметим, что без предположения о существовании дисперсии для **неотрицательной** СВ (непрерывной или дискретной) можно тем же методом, как и неравенство (11.1), получить полезное неравенство (лемма Маркова)

$$P(X \geq \varepsilon) \leq MX/\varepsilon, \qquad (11.4)$$

где $\varepsilon > 0$.

Закон больших чисел.

Докажем частный случай этого закона (теорема Чебышева).

Пусть случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ попарно независимы и $DX_k \le C$, где C – некоторая постоянная ($k = 1,2,...$). Тогда ***при любом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$***

$$\lim P[|(X_1+X_2+...+X_n+...)/n - (MX_1+MX_2+...+MX_n+...)/n| < \varepsilon] = 1.$$

Доказательство. Положим

$$\delta_n = (X_1+ X_2+...+X_n)/n. \qquad (11.5)$$

Утверждение теоремы равносильно тому, что при любом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$

$$\lim P(|\delta_n - M\delta_n| \ge \varepsilon) = 0.$$

Так как случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ попарно независимы, то дисперсия суммы равна сумме дисперсий:

$$D\delta_n = (DX_1+DX_2+...+DX_n)/n^2 \le nC/n^2 = C/n.$$

И тогда по неравенству Чебышева

$$P(|\delta_n - M\delta_n| \ge \varepsilon) \le D\delta_n/\varepsilon^2 \le C/(n\varepsilon^2).$$

Поэтому при $n \to \infty$ вероятность $P(|\delta_n - M\delta_n| \ge \varepsilon) \to 0$. Теорема доказана.

Частные случаи теоремы Чебышева.

Пусть случайные величины $X_1, X_2, ...X_n, ...$одинаково распределены, так что $MX_k = a$, попарно независимы и $DX_k \le C$, где C – некоторая постоянная ($k = 1,2,...$). Тогда ***при любом $\varepsilon > 0$ и $n \to \infty$***

$$\lim P(|(X_1+X_2+...+X_n+...)/n - a| < \varepsilon) = 1.$$

Отметим, что дисперсия комбинации $(X_1+X_2+...+X_n+...)/n = DX_k/n$ – оказалась в n раз меньше дисперсии каждой из величин X_k.

Глубокое содержание закона больших чисел состоит в следующем. Отдельная СВ может в опыте часто принимать значения, далекие от ее математического ожидания, особенно в случае большой ее дисперсии. **Сумма же (11.5) большого числа случайных величин, деленная на n – то, что мы обозначили через δ_n – ведет себя в этом отношении совершенно иначе: δ_n очень мало рассеяна (ее дисперсия мала), и с подавляющей вероятностью она принимает лишь значения, очень близкие к ее математическому ожиданию.** И это становится естественным, если вдуматься в смысл формулы (11.2). При усреднении, выражаемом этой формулой, случайные уклонения в ту и другую стороны взаимно погашаются, вследствие чего суммарное уклонение в большинстве случаев оказывается малым.

Парадокс! Что же это получается? Мы можем сколь угодно (!) точно определить значение величины, проведя достаточно большое число измерений и усредняя результаты? Нет, конечно. Дело в том, что сама точность измерений ограничена ценой деления Δ шкалы прибора, что вносит неопределенность порядка Δ в окончательный результат усреднения.

Наиболее ярко закон больших чисел проявляет себя, по-видимо-му, в молекулярно-кинетической теории. Движение каждой из многих миллиардов и миллиардов молекул макроскопического тела является хаотическим, непредсказуемым. Результат же усреднения этого движения может быть предсказан практически достоверно. Так, с высочайшей точностью давление, температура, плотность, состав равновесного газа (жидкости) в любом его месте постоянны во времени. Случайность превращается в свою противоположность – в практическую достоверность!

Теорема Бернулли (см. раздел «Применение интегральной теоремы Муавра – Лапласа») является частным случаем последней теоремы. *Вероятность того, что уклонение частости k/n от вероятности p не превзойдет по абсолютной величине сколь угодно малого $\varepsilon > 0$, стремится к единице при возрастании n:*

$$P(|k/n - p| < \varepsilon) = 2\Phi_0[\varepsilon(n/pq)^{1/2}] \to 1 \text{ для любого } \varepsilon \text{ при } n \to \infty.$$

Действительно, в этой теореме фигурирует СВ $k/n = (X_1+X_2+ +...+X_n)/n$, где независимые случайные величины X_m $(m=1...n)$ распределены все по одному и тому же закону: $X_m=0$, если в m-м испытании происходит событие «неудача» (H), и $X_m=1$, если в этом испытании «успех» $(У)$. Вероятности появления этих значений случайных величин X_m заданы: $P(X_m=0)=q$, $P(X_m=1)=p$. Математическое ожидание X_m находится предельно просто: $MX_m = 0q+1p=p$, а дисперсия равна

$$DX_m = M(X_m^2) - p^2 = p*1 - p^2 = p(1 - p) \le 1/4 = C.$$

Задание. Объясните, почему $p(1 - p) \le 1/4$?

Существуют и более сильные, чем теорема Чебышева, формулировки закона больших чисел.

§12. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА (ЦПТ)

Как и в случае закона больших чисел, это не один закон, а группа законов разной степени общности. Наиболее частный случай – это интегральная теорема Муавра – Лапласа, которую мы сейчас сформулируем так.

Пусть случайные величины X_m $(m=1...n)$ независимы и, принимая только два значения, одинаково распределены так, что $P(X_m=0) = q$, $P(X_m=1) = p$. Тогда **при $0<p<1$ и $n \to \infty$**

$$P[(X_1+X_2+\ldots+X_n - na)/(\sigma n^{1/2}) < x] \to \Phi_0(x) + \Phi_0(\infty) = \Phi_0(x) +1/2, \quad (12.1)$$

$\Phi_0(x)$ – функция Лапласа. Разумеется, $a = MX_m = p$, $\sigma^2 = DX_m = pq$.

Более общая формулировка ЦПТ (без доказательства). *Пусть случайные величины X_m $(m=1,\ldots, n\ldots)$ независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию. Тогда* ***при $n \to \infty$*** *выполняется соотношение (12.1), где $a = MX_m$, $\sigma^2 = DX_m$.*

Таким образом, ЦПТ – это утверждения о том, что *при* ***определенных условиях*** *сумма большого числа независимых СВ распределена асимптотически нормально с плотностью распределения вероятностей*

$$f(x) = exp[-(x-b)^2/2s^2]/(2\pi s^2)^{1/2} \quad (12.2)$$

или, что то же самое, при надлежащей нормировке (подходящем выборе коэффициентов) функция распределения этой суммы сколь угодно близка к $\Phi_0(x) + \Phi_0(\infty)$, где

$$\Phi_0(z) = {}_0\int^z exp(-x^2/2)dx/(2\pi)^{1/2}, \qquad \Phi_0(\infty)=1/2 .$$

Коэффициенты b и s^2, как известно, – это математическое ожидание и дисперсия нормального распределения.

«Определенные условия» – это, в первую очередь, требование незначительности вклада каждого из слагаемых в сумму $X_1+X_2+\ldots$ Именно с такой ситуацией мы сталкиваемся в задаче Бернулли при больших n, в задачах массового обслуживания, при крупномасштабном производстве однотипных изделий, в задачах маркетинга, в условиях эпидемий, при изучении проблем миграции населения, в проблемах надежности работы устройств, состоящих из большого числа однотипных компонент, в банковском деле и так далее. С высочайшей точностью условия ЦПТ выполняются в молекулярно-кинетической теории. Именно поэтому равновесное распределение молекул по скоростям описывается известной формулой Максвелла $f(v) \sim exp[-mv^2/(2kT)]$.

Следует помнить, что ЦПТ – теорема математическая, не несущая ответственности за деятельность людей, неправильно ее применяющих или приводящих к нарушению условий ее применимости. Так, ЦПТ имеет большое значение при выборе условий страхования от несчастного случая. Однако редкие события с тяжелыми последствиями типа гибели «Титаника» могут привести к краху, нет, не центральной предельной теоремы, а страховой компании. Такими «опасными» редкими событиями занимается теория риска. В ней учитывается, что весьма часто, хотя $f(x)$ суммы $X_1+X_2+\ldots$ и напоминает асимптотически нормальное распределение, однако при больших значениях $/x-b/$ реальная $f(x)$ слишком далека от нормального распределения. Напомним, что большие значения $/x-b/$ в силу условия $f(x)\to 0$ при $/x-b/\to\infty$ как раз соответствуют редким (маловероятным) событиям.

Для количественного применения ЦПТ необходимо знать параметры b и s, входящие в распределение (12.2). Оценкой этих параметров занимается математическая статистика.

ЗАДАЧИ

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ СХЕМЫ

§1. Действия над событиями

Примечание: подчеркивание букв снизу означает противоположное событие.

1.1. Задано множество $\Omega = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$. $A = \{a,b,d,e\}$, $B = \{b,d,f,g\}$ – его подмножества. Найти $\underline{A}$, $A+B$, AB, $A\backslash B$, $B\backslash A$, $\underline{A}\ \underline{B}$, $\underline{A} + \underline{B}$. Показать, что $\underline{AB}=\underline{A}+\underline{B}$, $\underline{A+B} =\underline{A}\ \underline{B}$.

В задачах 1.2-1.12 считается, что A, B, C – произвольные события. Результаты решения всех задач этого параграфа следует иллюстрировать диаграммами Венна.

1.2. Опыт – бросание трех монет. События: *A={на первой монете выпал герб}*, *B={на второй монете выпал герб}*, *C={на третьей монете выпал герб}*. Найти выражения для событий, состоящих в том, что произошло только событие A; произошло только одно событие; произошли A и B, но C не произошло; произошли A и B; произошли два события; все три события произошли; произошло по крайней мере одно событие; произошло не более двух событий; ни одного события не произошло; произошло A или B или C.

1.3. Верно ли, что если $C = A + B$, то $A = C\backslash B$? (Ответ. Нет)

1.4. **Доказать**, что $\underline{AB} = \underline{A} + \underline{B}$, $\underline{A+B} = \underline{A}\ \underline{B}$.

1.5. Упростить выражение (раскрыть скобки): $A = (B+C)(B+\underline{C})\times \times(\underline{B}+C)$. (Ответ. $A=BC$).

1.6. Найти событие X из уравнения $\underline{(X + A)} + \underline{(X + (\text{не}A))} = B$. (Ответ. $X=\underline{B}$).

1.7. Доказать, что $A+B = A+ \underline{A}B$, $B = B\underline{A} + BA$.

1.8. Доказать, что $\underline{A}B + A\underline{B} + \underline{A}\ \underline{B} = \underline{AB}$, $\underline{A} + \underline{B} = A\underline{B} + B\underline{A} + \underline{A}\ \underline{B}$, $A+B=A\backslash B+AB+B\backslash A$.

1.9. Когда возможны равенства $A + B = B$, $A+B = \underline{B}$, $AB = \underline{B}$, $AB = B$, $A + B = AB$?

1.10. Проверить равенства $A\backslash B = A\underline{B}$, $A\backslash B = A\backslash AB$, $A(B\backslash C) = AB\backslash AC$.

1.11. Совместны ли события A и $\underline{A + B}$; A и $A + B$; A и $\underline{A}$; A и $\underline{A}B$; $B\underline{A}$ и BA, A и AB; A и A\B; AB и $B\backslash A$? (Ответы. Нет. Да. Нет. Нет. Нет. Да. Да. Нет).

1.12. Событие B есть частный случай события A: $B\subseteq A$, то есть из того, что произошло событие B следует, что событие A произошло тоже. Следует ли из $\underline{B}$, что $\underline{A}$ произошло? (Ответ. Нет).

1.13. Показать, что если вычесть из числа людей, находящихся в здании Университета, число тех людей, которые не являются студентами, то получим тот же результат, как если из числа всех студентов вычтем число тех студентов, которые не находятся в здании Университета.

1.14. Продовольственные запасы экспедиции состоят из консервов и другой пищи. Консервы составляют 2/3 всех запасов. Предварительный контроль установил, что 1/3 всех запасов испорчена. Какая часть консервов наверняка не испорчена?

1.15. Из 100 дней 50 дней шел дождь, 60 – снег, 20 – и дождь, и снег; а в остальные дни было ясно. Сколько было ясных дней? (Ответ. 10).

1.16. В группе из N студентов 20 увлекаются спортом, 9 – музыкой, 6 – музыкой и спортом. Каждый из студентов увлекается музыкой, либо спортом. Найти N и число студентов, увлекающихся только спортом; только музыкой.

1.17. В 100 опытах 70 раз произошло событие A, 80 раз – событие B, 60 раз – событие AB. Сколько раз произошло событие $\underline{A}\ \underline{B}$?

1.18. Из 100 студентов 50 человек знают английский язык *(А)*, 40 человек – немецкий *(Н)*, 45 – французский *(Ф)*, 15 человек – *А* и *Н*, 20 человек – и *А*, и *Ф*, 20 человек – *Н* и *Ф*. Ни один человек не знает все три языка. Сколько человек не знает ни одного языка?

§2. Комбинаторика. Пространство элементарных событий

2.1. Могут ли 8 человек прибыть из города A в город C через B различными путями, если из A в B ведут 3 дороги, а из B в C – две?

2.2. Из пункта T преступник может попасть в один из пунктов $Б_1$, $Б_2$,$Б_3$, затем в один из пунктов P_1,P_2,P_3,P_4, затем в один из пунктов M_1,M_2 и, естественно, назад в пункт T. Сколько вариантов маршрутов имеется?

2.3. Сколько имеется трехзначных чисел, у которых каждая следующая цифра меньше предыдущей?

2.4. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 0,1,2, 3,4? (Ответ. 100).

2.5. Сколькими способами можно на шахматной доске расположить 8 ладей так, чтобы они не били друг друга? Рассмотреть два варианта: ладьи (а) неразличимы, (б) различимы. (Ответы. 40320, 40320^2).

2.6. На презентации 10 человек пожали друг другу руки. Сколько было рукопожатий? (Ответ. 45).

2.7. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом N-угольнике?

2.8. В селении живут 1000 жителей. Доказать, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы, состоящие из двух букв (число букв в алфавите равно 29).

2.9. Есть 25 портфелей и 30 депутатов. Каким числом способов можно раздать портфели, мучается торага? (Ответ. 142506).

2.10. Каким числом способов можно рассадить 4-х студентов на 10 стульях? (Ответ. 5040).

2.11. Задача свахи. Каким числом способов можно рассадить 10 гостей за круглым столом (стульев тоже 10) так, чтобы Он и Она оказались рядом? (Ответ. 806400).

2.12. Модель диффузии. Каждую миллисекунду атом скачком перемещается по одномерной кристаллической решетке на один ангстрем равновозможно налево или направо. Определить число возможных траекторий за сто прыжков. (Ответ. 1267650600000000000000000000000 траекторий).

2.13. Доказать, что $C_{n+1}^{\ k} = C_n^{\ k} + C_n^{\ k-1}$.

2.14. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость n прямых?

2.15. На какое наибольшее число частей могут разделить пространство n сфер?

В нижеследующих задачах обозначено: ЭС – *элементарное событие,* ПЭС – *пространство элементарных событий,* АС –*алгебра событий.*

2.16. Из урны, содержащей N различимых (пронумерованных) шаров, случайным образом берутся n шаров. Сколько ЭС содержит соответствующее ПЭС?

2.17. Кубик с цифрами на гранях бросают 1 раз. Сколько всевозможных подмножеств имеет соответствующее ПЭС? Сколько событий содержит АС? (Ответы. 63, 64).

2.18. Кубик бросают 2 раза. Сколько ЭС содержит ПЭС? Сколько событий содержит АС? (Ответы. 36. Примерно 68,7 миллиардов). Чувствуете разницу с предыдущей задачей?

2.19. Бросают N монет один раз. Сколько возможно вариантов выпадения гербов и решек? Сколько событий содержит АС?

2.20. В опыте возможны три исхода: ω_1,ω_2,ω_3. Проводятся N независимых опытов. Сколько ЭС содержит ПЭС? Сколько событий содержит АС?

2.21. Бросают одновременно 2 монеты и кубик. Сколько ЭС содержит ПЭС? (Ответ. 24).

2.22. Производится два выстрела по цели. Обозначим через A_1, A_2 события, состоящие в том, что при выстреле с соответствующим номером произошло попадание. Построить все возможные пространства элементарных событий.

2.23. Производится три выстрела по цели. Обозначим через A_1, A_2, A_3 события, состоящие в том, что при выстреле с соответствующим номером произошло попадание. Построить все возможные пространства элементарных событий. Сколько их?

§3. Классическое определение вероятности.

3.1. Бросают 2 кубика с цифрами. Найти вероятности того, что сумма очков: (а) число четное; (б) число нечетное; (в) не меньше 6; (г) меньше или равна 6; (д) равна 6 или число четное. (Ответ. 1/2, 1/2, 26/36, 15/36, 1/2).

3.2. Брошены монета и кубик. Найти вероятности появления событий: *A={выпали герб и 6 очков}*; *C={выпали герб или 6 очков}*. (Ответы. $P(A)=1/12$; $P(C)=7/12$).

3.3. Найти вероятность события: 6 пронумерованных шаров вынимаются из урны в порядке возрастания номеров. (Ответ. 1/720).

3.4. Найти вероятность того, что 6 пронумерованных шаров вынимаются из урны в порядке возрастания номеров, если каждый шар после осмотра возвращается в урну. (Ответ. 1/46656).

3.5. Из 28 костей домино случайно выбираются две. Найти вероятность того, что из них можно составить цепочку согласно правилам игры.

3.6. Партнер раздал карты. В колоде 36 карт. Все его 6 карт оказались козырными. Выразите ему вотум доверия цифирью. (Ответ. Ему 0,0043% доверия!).

3.7. Найти вероятность того, что в колоде из 36 карт все четыре туза расположены рядом. (Ответ. p=0,00054).

3.8. Абонент забыл 3 последние цифры номера телефона. Набирает их наудачу. Какова вероятность, что номер телефона окажется правильный? Какие у него шансы за один час все же набрать правильный номер? (Ответы. $p_1=1/1000$. $p_2 \sim 0,3$).

3.9. Можно ли нажить состояние, многократно заключая пари на то, что в серии из четырех бросков кубика хотя бы раз появится шестерка? Это делал шевалье де Мере – один из первых спонсоров теории вероятностей. (Ответ. Можно, p=0,518>0,5).

3.10. Какое число бросков кубика надо сделать, чтобы с вероятностью не менее 90% хотя бы раз выпала шестерка? (Ответ. $n>1/lg(6/5)$).

3.11. Найти вероятность того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы. (Ответ. $12!/12^{12}$).

3.12. Докажите, что ребенок грамотный, если он с первой попытки сложил слово *ГРАМОТА* из семи карточек с этими буквами. (Ответ. С вероятностью 99,96% он грамотный).

3.13. Буквы слова *ИНТЕГРАЛ* написаны на карточках. Карточки перемешивают и наудачу извлекают четыре, выкладывая их в ряд в порядке появления. Какова вероятность получить при этом слово *ИГРА*? (Ответ. 1/70).

3.14. На полке в случайном порядке стоят n книг, среди которых четырехтомник А.С. Пушкина. Найти вероятность того, что эти тома стоят в порядке возрастания номеров слева направо (но не обязательно рядом). (Ответ. 1/24).

3.15. В кармане 10 ключей. Лишь один подходит к замку. Ключи без возвращения по одному вынимают и проверяют. Какова вероятность, что нужный ключ окажется на K-м месте? (Ответ. 1/10).

3.16. Что вероятнее при бросании 6 монет: выпадение 3-х гербов, или не менее 5 гербов? (Ответ. Первое вероятней в 20/7 раз).

3.17. Каковы вероятности того, что четырехзначный номер автомобиля (а) состоит из разных цифр; (б) имеет ровно две одинаковых цифры; (в) имеет две пары одинаковых цифр; (г) имеет ровно три одинаковые цифры; (д) имеет все цифры одинаковые?

3.18. N телеграмм случайным образом распределяются по M каналам связи $(M>N)$. Найти вероятность события *A={на каждый канал придется не более одной телеграммы}*. (Ответ. $M![(M-N)!M^N]$.

3.19. На первом этаже девятиэтажного здания в лифт вошли 5 человек. Каковы вероятности, что все они выйдут (а) на разных этажах; (б) на одном этаже? (Ответ. 6720/390625. 8/390625).

3.20. В группе 25 человек. Найдите вероятности того, что завтра у одного из них будет день рождения. Ни у одного не будет. Хотя бы у одного будет.

3.21. Из множества всех последовательностей длины n, состоящих из цифр 0,1,2 случайно выбирается одна. Найти вероятности событий: *A={последовательность начинается с 0}; B={последовательность содержит ровно m+2 нуля, причем 2 из них находятся на концах}; C={последовательность содержит ровно m единиц}; D={в последовательности ровно m_0 нулей, m_1 единиц и m_2 двоек}*.

Гипергеометрическое распределение

3.22. В урне 3 белых и 4 черных шара. Наудачу взяты 3 шара. Найти вероятности того, что один белый, а два черных; все три белых. (Ответы. 18/35, 1/35).

3.23. Из 5 лотерейных билета 2 выигрышные. Взято 2. Какова вероятность того, что оба не выигрышные? (Ответ. 3/10).

3.24. В лотерее 10 билетов, из которых 5 выигрышных. Какова вероятность выиграть, имея 3 билета? (Ответ. 11/12).

3.25. На группу из 20 человек, в которой я учусь, выделено 4 бесплатных билета на крутую дискотеку. Завтра тянем жребий. Какова вероятность, что мне повезет? (Ответ. 1/5).

3.26. Квадратное поле в виртуальной стране круглых чудаков разбито на 9 одинаковых квадратов. Где-то на пяти из них богатенький Пиноккио закопал по кругленькой сумме. Хакер Иванбек решил взломать 2 квадрата. Какова вероятность, что он что-нибудь найдет? (Ответ. 5/6).

3.27. Студент знает 50 вопросов из 75. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Каковы вероятности того, что студент ответит на (а) один вопрос; (б) два вопроса; (в) все три вопроса? (Ответы. (50*24)/(74*73), (50*49)/(74*73), (49*32)/(74*73)).

3.28. В урне 10 шаров, из них 4 белых. Наудачу взяты 5 шаров. Найти наиболее вероятное количество белых шаров среди взятых. (Ответ. 2).

3.29. Из партии в 5 изделий наудачу взято одно, оказавшееся бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно? (Ответ. 5).

3.30. Из партии в 6 изделий наудачу взято два, из которых одно оказалось бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно?

3.31. В озере N рыб. Поймали M, пометили, отпустили. Подождав перемешивания, поймали n штук. Оказалось, что из них m помечены. Оценить, сколько рыб в озере.

3.32. Оценить, сколько неисправных приборов содержит партия из N приборов, если среди случайно взятых n приборов неисправных оказалось m?

§4. Геометрические вероятности

4.1. Математическая точка наудачу брошена математиком в квадрат, через который проходит математическая кривая. Какова вероятность того, что оная падет на эту кривую?

4.2. Точка наудачу брошена в квадрат, в который вписан круг. Какова вероятность, что точка попадет в круг? (Ответ. $0{,}25\pi$).

4.3. Задача спасателя. Найти вероятность того, что разрыв кабеля длины L произошел на расстоянии меньшем, чем M от его начала. Разрыв равновозможен в любой точке. (Ответ. M/L).

4.4. На плоскости проведено бесконечное количество параллельных прямых, расстояние между которыми равно a. На эту плоскость бросается монета диаметра $D<a$. Найти вероятность того, что монета пересечет какую либо прямую. (Ответ. D/a).

4.5. Какова вероятность, что время ожидания автобуса на остановке будет менее 5 минут? Автобусы – в математической модели – подходят строго через каждые 15 минут и не стоят ни секунды. Момент прихода пассажира на остановку случаен. (Ответ. 1/3).

4.6. Призовой тир. В нем две мишени. Вероятность попадания в одну 0,3, а в другую – 0,2. Равновозможно попадание в любую точку мишени. Выбор мишени производится случайно. В мишенях по одному кругу, каждый из которых занимает половину площади мишени. Приз 10 сомов выдается только при попадании внутрь кругов. Установить минимальную плату за выстрел, такую, чтобы доходы хозяина тира в среднем превосходили расходы. Накладные расходы – 1 сом на выстрел. (Ответ. 3 сома 51 тыйин).

4.7. Двое договорились о встрече в определенном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго 15 мин., после чего уходит. Найти вероятность, что встреча состоится, если каждый наудачу выбирает момент своего прихода. (Ответ. 7/16).

4.8. Дано линейное уравнение $AX = B$. Если A и B выбирают наудачу на сегменте $[0,1]$, то какова вероятность того, что корень данного уравнения будет больше единицы? (Ответ. 1/2).

4.9. Величины A и B описаны в предыдущей задаче. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $X^2+AX+B=0$ имеет вещественные корни. (Ответ. 1/12).

4.10. Величины A и B описаны в предыдущей задаче. Найти вероятность того, что кубическое уравнение $X^3-3A^2X+3B=0$ имеет вещественные корни.

4.11. Пусть A – случайная точка квадрата со стороной длины 1. Равновозможно любое ее положение в квадрате. Найти вероятности того, что расстояние от A до ближайшей стороны не превосходит числа x; расстояние от A до ближайшей вершины не превосходит x; расстояние от A до центра квадрата не превосходит x.

4.12. Какова вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков длины не более L можно построить треугольник?

§5. Зависимость событий. Условные вероятности

5.1. Завтра дождь может быть, а может и нет. Зависимы ли эти случайные события?

5.2. Зависимы ли события при одном бросании кубика: *A={число очков четное}* и *B={число очков больше 4-x}*?

5.3. Доказать, что если события несовместны, то они зависимы. Зависимы или независимы совместные события?

5.4. Число аварий, которые могут произойти с самолетами, можно оценить, умножая (найденную статистически) вероятность аварии на общее число полетов. Получается так: с каждым новым полетом шансы пассажира попасть в аварию увеличиваются?

5.5. Несовместные события A и B произошли соответственно 30 и 40 раз в 100 одинаковых независимых опытах. Оценить вероятность события $A + B$. (Ответ. 0,7).

5.6. Независимые события A и B произошли соответственно 70 и 80 раз в 100 одинаковых независимых опытах. Оценить вероятность события $A + B$. (Ответ. 0,94).

5.7. События A и B произошли соответственно 30 и 70 раз в 100 одинаковых независимых опытах. Оценить вероятность события $A + B$. (Ответ. От 0,7 до 1).

5.8. Цифровой замок сейфа содержит 6 цифр. Какова вероятность, что преступник успеет за ночь (8 час.) его открыть, набирая каждую секунду новый код? Как изменится ситуация, если две цифры ему известны? (Ответы. $p_1 \approx 0{,}0288$; $p_2=100\%$).

5.9. В колоде 36 карт. Одна карта случайным образом извлекается, результат запоминается, после чего карта возвращается. Колода перемешивается. Вынимается вторая карта. Найти вероятность того, что оба раза были пики. (Ответ. 1/16).

5.10. В колоде 36 карт. По очереди берутся две без возвращения. Первая карта оказалась пика. Какова вероятность, что и вторая будет пика? (Два варианта ответа, обусловленные несовершенством бытового языка: 8/35 либо 2/35).

5.11. В урне 2 белых и 3 черных шара. Один за другим взяли 2 шара. Первый оказался белым. Какова вероятность того, что и второй шар будет белым? (См. комментарий к предыдущей задаче).

5.12. Из 100 студентов (60 девушек и 40 юношей) 40% знают английский язык. Наудачу взят 1 студент. Какова вероятность того, что это юноша, знающий английский? (Ответ. 0,16).

5.13. Последовательно бросаются две монеты. События: *A={герб на первой монете}; B={хотя бы один герб}; C={хотя бы одна решка}; D={герб на второй монете}*. Найдите, зависимы или независимы пары событий (а) A и C; (б) A и D; (в) B и C; B и D. Найти условные и безусловные вероятности событий.

5.14. В ящике 10 деталей, из которых 6 окрашено. Наудачу взято 4. Найти вероятность того, что они все окрашены. (Ответ. 1/14).

5.15. Лотерейных билетов серии A в 3 раза больше, чем серии B. Выигрывают 10% билетов серии A и 20% серии B. Взят один билет. Какова вероятность того, что он выигрышный? (Ответ. 0,125).

5.16. Выходя из дома, рассеянный человек с вероятностью 95% забывает взять зонт, а в среднем 70 дней из 100 идет дождь. Каковы вероятности того, что он завтра: (а) промокнет; (б) не промокнет. (Ответ. Вероятность промокнуть равна 0,665).

5.17. Имеется n билетов лотереи. Лишь один выигрывает. Билеты берут по очереди. Результат объявляется в конце. Какова вероятность выиграть последнему? (Ответ. Все в равных условиях).

5.18. Имеется n билетов моментальной лотереи (результат объявляется сразу). Лишь один билет выигрышный. Брать можно только один билет. Какова Ваша стратегия? Сравните с предыдущей задачей.

5.19. Показать, что если $P(A/B) > P(A)$, то и $P(B/A) > P(B)$.

5.20. На складе три очень больших, но одинаковых по количеству партий электроламп. Процент брака в них 10, 20 и 30 соответственно. Наугад взята одна лампа. Найти вероятность того, что она не бракованная. (Ответ. 0,8).

5.21. Два завода изготавливают приборы. Первый завод изготавливает 2/3 всех изделий, второй – остальные. Процент брака на первом заводе 10, на втором 5. Наудачу взятый прибор оказался бракованным. Найти вероятность того, что он изготовлен на первом заводе.

5.22. Опрос общественного мнения показал, что 70% электората поддерживают кандидата Г, но лишь 15% из них пойдут голосовать. 30% электората поддерживают кандидата Б, и 90% из них пойдут голосовать. Оценить вероятности победы кандидатов на выборах. (Ответ. Р(Б)=0,72).

5.23. Известны вероятности $P(A)=0{,}7$, $P(A)=0{,}6$, $P(AB)=0{,}3$. Найти $P(A\underline{B})$, $P(\underline{B}/\underline{A})$.

5.24. Контроль изделий состоит из двух независимых проверок. В результате k-й проверки $(k=1,2)$ изделие, удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью b_k, а бракованное изделие принимается с вероятностью a_k. Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найти вероятности событий: *A={бракованное изделие будет принято}, B={изделие, удовлетворяющее стандарту, будет забраковано}*.

5.25. Игральная кость (кубик) брошена 2 раза; X_1 и X_2 – числа очков, выпавшие при этих испытаниях. Рассмотрим события: A_1 = {X_1 *делится на* 2, X_2 *делится на* 3}, A_2={X_1 *делится на* 3, X_2 *делится на* 2}, A_3= ={X_1 *делится на* X_2}, A_4={X_2 *делится на* X_1}, A_5={X_1+X_2 *делится на* 2}, A_6={X_1+X_2 *делится на* 3}. Найти все пары $\{A_k, A_m\}$ взаимно независимых событий.

§6. Задачи на сложение и умножение вероятностей.

6.1. Докажите, что $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC)$.

6.2. Из колоды (36 карт) наудачу взята одна. Найти вероятность события: взята шестерка или туз или пика. В решении поможет предыдущая задача.

6.3. Винни Пух собрался вкусно пообедать. С вероятностями $p_1= 0,3$ и $p_2 = 0,6$ что-нибудь вкусное есть соответственно у кролика и у Пятачка. Но с вероятностями $q_1 = 0,2$ и $q_2 = 0,9$ их нет дома. К кому надежнее пойти, думает Пух. (Ответ. Вероятность пообедать у кролика равна 0,24, а у Пятачка 0,06).

6.4. Из 100 студентов 60 человек знают английский (А), 50 человек – немецкий (Н), 20 человек – и А, и Н. Какова вероятность того, что наудачу взятый студент не знает ни одного языка? (Ответ. 0,1).

6.5. Прибор выходит из строя, если перегорают не менее 5 микросхем 1-го типа или не менее 2-х микросхем 2-го типа. Тестирование прибора показало, что 5 микросхем перегорело. Найти вероятность того, что прибор вышел из строя. Дополните условие задачи, если это необходимо. Набросок решения: Прибор не вышел из строя, только если произошло событие *П1П1П1П1П2.* Буква *П* означает: *{микросхема перегорела}*.

6.6. Каждый из 3-х стрелков попадает в цель независимо от другого с вероятностью соответственно $p_1=0,5;$ $p_2=0,6;$ $p_3=0,7$. Дается залп. Каковы вероятности того, что (а) цель не будет поражена; (б) цель будет поражена; (в) будет ровно одно попадание; (г) будет ровно два попадания; (д) не более одного; (е) будет ровно три попадания;(ж) не менее одного; (з) третий стрелок попадет, а первый и второй – нет? В решении Вам поможет задача 1.2. (Ответы. (а) P_1= 0,06. (б) P_2=0,94. (в) P_3=0,29. (г) P_4=0,44. (д) P_5=0,35. (е) P_6=0,21. (ж) P_7= 0,94. (з) P_8=0,14).

6.7. В одной студенческой группе каждый день может быть зачет *{Z}* или экзамен *{E}*. Составьте выражение для события *A={Три дня не было ни зачетов, ни экзаменов}*.

6.8. Заяц спасается прыжками. В момент приземления он может быть схвачен с вероятностью p_1 волком, а в прыжке его с вероятностью p_2 может схватить ворона. Приземление номер N уже в норе (спасение). Найдите вероятность спасения. В этом Вам поможет предыдущая задача. Решение. Это задача на нахождение вероятности произведения независимых событий.

6.9. Производится стрельба ракетами по некоторой цели. Вероятность попадания каждой ракеты в цель равна p; попадания отдельных ракет независимы. Каждая попавшая ракета поражает цель с вероятностью p_1. Стрельба ведется до поражения цели или до израсходования всех ракет. Всего имеется N $(N>2)$ ракет. Найти вероятность того, что не все ракеты будут израсходованы. Если трудно решить эту стратегическую задачу, начните с предыдущей.

6.10. Происходит воздушный бой между двумя самолетами: истребителем и бомбардировщиком. Стрельбу начинает истребитель: он делает по бомбардировщику один выстрел и сбивает его с вероятностью p_1. Если бомбардировщик этим выстрелом не сбит, он стреляет по истребителю и сбивает его с вероятностью p_2. Если истребитель этим выстрелом не сбит, он еще раз стреляет по бомбардировщику и сбивает его с вероятностью p_3. Найти вероятности следующих исходов боя: *A={сбит бомбардировщик}, B={сбит истребитель}, C={сбит хотя бы один из самолетов}*.

6.11. Вероятность, что человек болен туберкулезом, равна p. Рентгеновское просвечивание позволяет обнаружить болезнь с вероятностью q. Обследованию подверглись n человек. Найти вероятности следующих событий: *A={больных не обнаружено}, B={обнаружено ровно 2 больных}, C={обнаружено не менее двух больных}*.

§7. Последовательность независимых испытаний. Задача Бернулли

7.1. Два одинаково метких стрелка по очереди стреляют. Выигрывает тот, кто попадет первым. Справедливы ли правила такой дуэли? (Ответ. Нет).

7.2. Вероятности попадания стрелков в цель равны 0,8. Двое стреляют по очереди до 1-го попадания. Каковы вероятности того, что им не хватит по 2 патрона; хватит? (Ответы. 0,0016. 0,9984).

7.3. Монету бросают до первого появления герба. Найти вероятности того, что им понадобится: (а) не более 3-х бросаний; (б) не менее 4-х бросаний; (в) ровно 4? (Ответы. 7/8. 1/8. 1/16).

7.4. Независимые испытания с двумя равновозможными исходами *У* или *Н* в каждом опыте повторяются до тех пор, пока исход *У* не появится 5 раз. Найти вероятность того, что для этого понадобится 10 испытаний. (Ответ. 126/1024).

7.5. В кармане 10 ключей. Лишь один подходит к замку. Ключи с возвращением в тот же карман вынимаются по одному. Какова вероятность того, что нужный ключ будет вынут при *К*-м испытании? (Ответ. $9^{k-1}/10^k$). Как это так странно получилось, что наиболее вероятным оказалось событие *{нужный ключ будет вынут с первой попытки}*? Ведь очевидно же, что в первый раз скорее всего попадется не тот ключ (шансы на немедленный успех равны 1:10)!

7.6. Кубик бросают до тех пор, пока не выпадет шестерка. Найти вероятности того, что понадобится: (а) не более 3-х бросаний; (б) ровно 3; (в) более 3-х? (Ответы. 91/216, 25/216, 115/216).

7.7. В опыте возможны три элементарных исхода $\omega_1, \omega_2, \omega_3,$ которые происходят с вероятностями p_1, p_2, p_3. Лишь последний исход считается «успехом». Испытания (независимые) продолжаются до первого успеха. Найти вероятность того, что для этого понадобится k испытаний.

7.8. Вероятность поражения цели при одном выстреле равна $p = 0,2$. Какое минимальное количество снарядов нужно иметь, чтобы с вероятностью не менее 90% гарантировать поражеие цели? (Ответ. n>- $1/lg0,8$).

7.9. Орангутанг многократно выкладывает в ряд карточки с буквами У, Т, А, Н, О, Р, А, Н, Г. После каждого выкладывания он получает банан. Хватит ли бананов и времени, чтобы дождаться, пока он с вероятностью не менее 90% выложит слово ОРАНГУТАН? Бананов – вагон. (Ответ. Число экспериментов n должно удовлетворять неравенству $n>(9!/4)ln10 \approx 200$ тыс. штук~50 тонн). Как повысится его успеваемость, если предложить выложить слово БАНАН?

Далее идут задачи, решаемые по формуле Бернулли.

7.10. Вероятность того, что в июне день будет дождливым, равна 1/7. Найти вероятность того, что в июне будет 3 дождливых дня. (Ответ. $5*29*28*6^{27}/7^{30}$).

7.11. Известно, что при каждом измерении равновозможна как положительная, так и отрицательная ошибки. Какова вероятность того, что в пяти независимых измерениях все ошибки будут положительными? (Ответ. 1/32).

7.12. В серии из 5 бросаний монеты вероятность *К* выпадений герба равна 5/16. Определить *К*.

7.13. Вероятность появления хотя бы одного события в четырех независимых испытаниях равна 0,9744. Какова вероятность появления события в одном испытании? (Ответ. $p = 0,6$).

7.14. Найти вероятности того, что при однократном бросании 5 монет гербом вверх лягут (а) не менее 4 монет; (б) не более 2-х. (Ответы. 6/32, 16/32).

7.15. Всхожесть зерна 80%. Какова вероятность того, что из 10 посаженных зерен взойдут не менее 9? (Ответ. 0,376).

7.16. При передаче сообщения вероятность искажения буквы 0,1, Передано 10 букв. Найти вероятности того, что (а) искажено не более 3-х букв; (б) не менее 2-х; (в) сообщение не искажено.

7.17. В сосуде хаотически движутся 100 молекул. Какова вероятность, что в какой-то момент времени ровно 50 молекул будут в одной его половине, а 50 – в другой? Оцените соответствующую вероятность «фифти-фифти» для всех молекул в комнате и объясните, почему барометр показывает одно и то же давление в любом месте комнаты.

7.18. Станок-автомат штампует детали. Вероятность брака 0,01 Изготовлено 10. Найти вероятность того, что бракованных деталей не более 2-х .

7.19. В группе 25 человек. Найти вероятности того, что (а) завтра у одного из них будет день рождения; (б) ни у одного не будет; (в) хотя бы у одного будет.

7.20. В озере 20% рыб больны. Выловлено 10. Найти наивероятнейшее число больных рыб среди выловленных. (Ответ. 2).

7.21. В поселке живут 10 человек, и каждый в случайные дни в среднем через день независимо от других выезжает в город на единственном такси («Жигули»). Какова вероятность того, что машина завтра будет переполнена?

7.22. Что вероятнее выиграть у равносильного противника: три партии из четырех или пять из восьми? (Ответ. Второе вероятнее в 14 раз).

7.23. Из партии в 6 изделий наудачу берутся по очереди два. Прежде чем взять второе изделие, первое после осмотра возвращается назад и их совокупность перемешивается. Одно изделие из двух взятых оказалось бракованным. Количество бракованных изделий равновозможно любое. Какое предположение о количестве бракованных изделий наиболее вероятно? Какой метод контроля качества надежнее: выборка без возвращения или с возвращением? (Ответ. 3).

7.24. Для связи со звездолетом сигнал кодируется двоичным кодом так, что сообщения состоят из нулей и единиц. Из-за помех вероятность правильного приема знака равна 0,55. Для повышения надежности правильного приема каждый знак повторяют n раз. Полагают, что последовательности из n принятых знаков соответствует знак, составляющий в ней большинство. Найти вероятность правильного приема одного знака, если n=5. (Ответ. 0,5931)

7.25. В условиях предыдущей задачи подберите n так, чтобы вероятность правильного приема знака стала не меньше 0,99. (Ответ. 536). Налицо тупиковый способ повышения качества связи. Придумайте свой.

7.26. В объеме V находится n молекул идеального газа. Какова вероятность того, что в объеме $v \in V$ находится k молекул?

7.27. Сколько изюма в среднем должна содержать булочка, чтобы вероятность иметь хотя бы одну изюминку в булочке была не менее 99%. (Ответ. 5). Подсказка: используйте результат предыдущей задачи.

7.28. Задача от Стефана Банаха. Курильщик пользуется двумя коробками спичек, беря наудачу ту или иную коробку. Через некоторое время он обнаружил, что одна коробка пуста. Какова вероятность, что во второй коробке осталось k спичек, если вначале в каждой коробке было по n спичек? В этой задаче великий Банах (1892-1945) прочитал великую формулу Бернулли наоборот.

§8. Формула Пуассона. Теоремы Муавра – Лапласа

8.1. За сутки распадается 0,5% радиоактивных ядер некоторого химического элемента. Вычислить вероятность того, что за это время распадутся 3 ядра из 1000. (Ответ. $5^3 exp(-5)/3!$).

8.2. В вагоне зерна 0,1% некачественных. Взято 1000 зерен. Найти вероятность, что среди них не более 3-х некачественных. (Ответ. $8/3e$).

8.3. Существует таблица случайных чисел, состоящая из пар цифр. Найти вероятность того, что среди случайно взятых 100 пар пара 03 встретится не менее двух раз. (Ответ. $1-2/e$).

8.4. Сколько нужно купить лотерейных билетов, чтобы вероятность выигрыша была не менее 90%? Общее количество билетов 10000, выигрышных 500. (Ответ. $n>20*ln10$).

8.5. Вероятность порчи изделия при перевозке равна 0,001. Из 1000 перевезенных изделий оказались испорчены 4. Оценить вероятность того, что порча не случайная. (Ответ. *P(порча умышленная)*= 0,9847).

8.6. Партия изделий бракуется, если в выборке из 100 изделий оказалось более 2-х некачественных. Вычислить вероятность забраковать партию, если реально процент брака равен 1%. (Ответ p=0,0803).

8.7. Монету бросают 100 раз. Какова вероятность, что герб выпадет ровно 50 раз?

8.8. В поселке 2500 жителей. Каждый из них в среднем 6 раз в месяц ездит на поезде в город, выбирая дни поездок случайно и независимо от других. Какой наименьшей вместимостью должен обладать поезд, чтобы он переполнялся в среднем не чаще одного раза в 100 дней (поезд идет раз в сутки). (Ответ. 547).

8.9. Страховая компания застраховала 1000 человек на один год на случай болезни. За этот период заболевает в среднем 25 из 1000. Страховой взнос составляет 50 сом, страховые выплаты при заболевании – 1000 сом. Какова вероятность того, что доходы компании не менее чем в 2 раза превзойдут выплаты? Какова вероятность, что выплаты превзойдут доходы? Накладными расходами пренебречь.

8.10. Страховая компания застраховала 1000 человек на один год на случай болезни. За этот период заболевает в среднем 25 из 1000. Страховые выплаты при заболевании – 1000 сом. Каким должен быть минимальный страховой взнос, чтобы с вероятностью не менее чем 90% доходы компании превосходили страховые выплаты? Накладными расходами пренебречь.

8.11. Допустим, что из некоторой страны в прошлом году эмигрировали 10000 человек из живших там 100000. Предполагая, что тенденция не изменилась, найти с доверительной вероятностью 90% число эмигрантов в текущем году. (Ответ. С этой вероятностью число эмигрантов будет лежать в интервале $9000\pm\Delta$, где Δ=153).

8.12. Тысяча мух (слонов, молекул...) хаотически перемещаются в ограниченном пространстве. Найти вероятность того, что число мух (слонов...) в правой половине этого пространства не менее 500 и не более 600.

8.13. По формуле Пуассона с вероятностью не менее 90% оцените максимальную плотность потока J(шт/м^{2}с) града, если на датчик (голову) за время t=2 с не упало ни одной градины. Эффективное поперечное сечение датчика S(м^2) измерьте самостоятельно. (Ответ. $J<-(ln0,9)/St$). Сформулируйте соответствующую проблему радиационной безопасности.

8.14. Экспериментально проверяется, что вероятность p некоторого события равна 0,5. Для этого проведено n=10000 независимых одинаковых опытов и получено значение частности w=0,49. Дайте свое заключение о существенности различия w и p. (Решение. Получено, что $|w-p|(n/pq)^{1/2}=2$. С другой стороны $P(|w-p|(n/pq)^{1/2}>2)=1-2\Phi_0(2)=0{,}0456$. Различие существенно).

8.15. В условиях предыдущей задачи n=100. Дайте заключение о существенности различия w и p.

8.16. При использовании старого метода лечения бросали курить 50% больных. Опробован новый метод. Из 100 больных прекратили курить 60. Какова вероятность того, что новый метод эффективнее? (Ответ. Вероятность того, что результаты случайны равна $1-2\Phi_0(2)= =0{,}0456$. Поэтому с вероятностью 0,9544 новый метод эффективнее).

8.17. Оцените минимальное необходимое число опытов, чтобы с доверительной вероятностью 0,95 значение частности отличалось от неизвестной оцениваемой вероятности не более чем на величину Δ=0,01. (Ответ. $n=(1{,}96/2\Delta)^2=9604$).

ГЛАВА 2. СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

§1. Распределения дискретных СВ

В задачах 1.1.-1.11 составить закон распределения случайной величины X, найти ее функцию распределения, математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение.

1.1. $X=C=const$. (Неслучайная величина объявлена случайной).

1.2. Два кубика бросают 1 раз. X – сумма очков.

1.3. Кубик бросают 3 раза. X – число выпадений шестерки.

1.4. Три монеты бросают 1 раз. X – число выпадений решки.

1.5. Вероятность поражения стрелком мишени при выстреле p=0,5. Трое стрелков дают залп. X – число попаданий.

1.6. Кубик бросают до первого появления 5 или 6. X – число бросаний.

1.7. Монету бросают до первого появления герба. X – число бросаний.

1.8. Вероятность поражения мишени при выстреле p =0,5. Стреляют до первого попадания. X – число выстрелов.

1.9. В урне 2 белых и 3 черных шара Вынимают (без возвращения после осмотра) по одному шару. Опыты проводят до первого появления белого шара. X – число опытов.

1.10. В урне 4 белых и 3 черных шара. Наудачу берутся три. X – число белых шаров среди взятых.

1.11. Из колоды 36 карт вынимают (с возвращением после осмотра) по одной карте. Опыты проводят до первого появления пики. X – число опытов.

1.12. Телефонистке в течение часа поступает в среднем 6 заказов на переговоры. Какова вероятность, что в течение ближайшего часа будет 6 заказов? Подсказка: см. в лекциях связь распределения Пуассона и задач массового обслуживания.

1.13. Телефонистке в течение часа поступает в среднем 6 заказов на переговоры. Какова вероятность, что к двум телефонисткам в течение ближайшего часа поступит 6 заказов?

1.14. Модель диффузии. Каждую миллисекунду атом скачком перемещается по одномерной кристаллической решетке на один ангстрем равновозможно налево или направо. Случайная величина X – перемещение за сутки. Определить среднее перемещение (то есть MX) и среднее квадратическое перемещение. (Подсказка к этой и к следующей задаче: они полностью аналогичны задаче о сложении случайных колебаний – см. лекции).

1.15. Нерешительный человек делает шаг вперед с вероятностью p или шаг назад с вероятностью q. Длина шага равна L. Найти его среднее перемещение (математическое ожидание) и среднее квадратическое перемещение за n шагов. Рассмотреть предельные случаи $p=0, p=0,5, p=1$. (Подсказка: см. предыдущую задачу).

1.16. Пусть складываются n независимых колебаний вида $a_m sin(\omega t)$, где $a_m= +a$ с вероятностью p и $a_m= - a$ с вероятностью q. Обозначим через X случайную величину, равную числу колебаний с амплитудой $+a$. Найти дисперсию случайной величины $J(X)$ – интенсивности суммарного колебания, которая равна квадрату суммы амплитуд

$$J(X) = [Xa + (n-X)(-a)]^2 = (n - 2X)^2 a^2.$$

1.17. Опыт: бросание n кубиков. Найти математическое ожидание и дисперсию суммы числа очков, которые выпадут на всех кубиках. (Ответы. 3,5n, 5n/4).

1.18. Справедливы ли правила следующей игры. Бросают два кубика с цифрами. Выпало в сумме менее 7 очков – получи 1 сом. Выпало более 6 очков – отдай 1 сом. Как сделать игру «справедливой»? (Ответ. Игра несправедливая. Ставки должны быть 21:15).

1.19. Примете ли Вы участие в следующей суперигре. В колоде 36 карт. Случайным образом извлекается одна. Если это пика – отдай 1 доллар, и игра заканчивается. Если это не пика – получи 2 доллара, но играй дальше. Карта возвращается в колоду, она перемешивается, и карта извлекается вновь. Если это пиковый туз – получи 200 долларов, иначе отдай 10. На этом игра заканчивается. Подсказка. P(-1)=1/4. P(-8)=105/144. P(202)=3/144.

1.20. СВ X имеет биномиальное распределение $P(X=k) = P_n(k) = =C_n^k p^k q^{n-k}$, где n=3, p=0,5. Составить закон распределения СВ $Y=X+0,5$. Найти MY и DY. (Ответы. $MY=2$; $DY=1$).

1.21. СВ X описана в предыдущей задаче. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Y=X^2$.

§2. Распределения непрерывных СВ

В задачах 2.1-2.5 задана плотность распределения вероятностей $f(x)$, непрерывной случайной величины X. Эта функция отлична от нуля только на интервале $[a,b]$. Найти функцию распределения $F(x)$, MX, DX, $\sigma(X)$, $P(c \le X < d)$. Построить $f(x)$ и $F(x)$.

2.1. $f(x) = 1/(b-a)$, $c=(a+b)/2$, $d=2b$.

2.2. $f(x) = 1- |x|$, $a=-1$, $b=1$, $c=0$, $d=1$.

2.3. $f(x)= 0,5*sin(x)$, $a=0$, $b=\pi$, $c=\pi/2$, $d=\pi$.

2.4. $f(x)= 0,5*cos(x)$, $a=-\pi/2$, $b=\pi/2$, $c=0$, $d=\pi$.

2.5. $f(x) = exp(-x)$, $a=0$, $b=\infty$, $c=1$, $d=2$.

2.6. СВ X равномерно распределена на интервале $[0, 1]$. Найти функцию распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=aX+b$, где a и b - постоянные (a>0). Найти MY, DY. (Ответ. $f(y)=1/a$ при $x \in [b, a+b]$ и $f(y)= 0$ вне этого интервала).

2.7. СВ X описана в предыдущей задаче. Пусть $Y=sin(X/2\pi)$. Найти MY, DY.

2.8. СВ X описана в предыдущей задаче. Пусть $Y=X^2$. Найти $f(y)$ и $F(y)$ этой СВ. Найти MY, DY. (Ответ. $F(y)=0$ при $y<0$, $F(y)=P(Y<y)= =P(X^2<y)=P(X<y^{1/2})=y^{1/2}$ при $0<y<1$ и $F(y)=1$ при $y>1$).

2.9. СВ X равномерно распределена на интервале $[-a, a]$. Найти функцию распределения и плотность распределения вероятностей случайной величины $Y=X^2$. Найти MY, DY.

2.10. Случайная величина X распределена по закону $N(x,2,2)$. Найти $P(0<X<1)$, $P(X>4)$, $F(4)$. [Ответы. $P(0<X<1)=\Phi_0(1)-\Phi_0(0,5)$; $P(X>4)= 0,5-\Phi_0(2)$;$F(4)= 0,5+\Phi_0(1)$].

2.11. СВ X описана в предыдущей задаче. Пусть $Y=X-1$. Найти плотность распределения Y, а также MY, DY.

2.12. СВ X описана в предыдущей задаче. Найти распределение СВ $Y=2X$. (Ответ. $N(y,4,4)$). Подсказка. Рассуждения те же, что и в задаче 2.8.

2.13. Размеры детали, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда, равны $a+X$, $b+X$, $c+X$, где $a,b,c = const$, X – случайная величина с законом распределения $N(x,0,\sigma)$, где σ весьма мало. Составить приближенный закон распределения СВ – объема $V=(a+X)(b+X)(c+X)$. [Ответ. $N(v, abc,(ab+bc+ac)*\sigma)$].

2.14. Вероятность, что молекула газа после очередного столкновения с другими молекулами газа будет далее двигаться без столкновений время, большее, чем t, равна $exp(-t/\tau)$, где τ – параметр. Докажите это, используя распределение Пуассона.

2.15. Вероятность, что молекула газа после очередного столкновения с другими молекулами газа будет далее двигаться без столкновений время, большее, чем t, равна $exp(-t/\tau)$. То есть время бесстолкновительного движения – случайная величина T. Найдите ее плотность распределения вероятностей, функцию распределения, MT, DT. Каков смысл параметра τ?

2.16. Непрерывная СВ распределена по закону: $f(x)=0$ при $x<0$ и $f(x) = exp(-x)$ при $x>0$. Найти плотность распределения вероятностей СВ $Y=X^2$. Подсказка: построить функцию распределения случайной величины Y, как в задаче 2.8.

2.17. Используя асимптотическое представление функции Лапласа при $x >> 1$

$$\Phi_0(x) \approx 1/2 - exp(-x^2/2)/ [x(2\pi)^{1/2}],$$

найти $F(10)$ случайной величины, распределенной по нормальному закону $N(x; 0;1)$.

2.18. Космонавты берут запас воздуха в баллонах. Баллона в среднем хватает на 2 часа (все числа условные). Дисперсия времени его работы равна 400 мин^2. Сколько нужно взять баллонов, чтобы с вероятностью 0,99999 их хватило на 10 суток? Используйте центральную предельную теорему и асимптотическое представление предыдущей задачи. Заслуживает ли благодарности завод-изготовитель?

§3. Совместное распределение случайных величин.

В задачах 3.1. -3.4 СВ X и Y независимы. Заданы их законы распределения. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию их композиции T. Найти $P(0\le T<2)$.

3.1.

X	0	1	Y	0	1
P	p_x	q_x	P	p_y	q_y

$T=X+Y$.

Решение. Построим только закон распределения. Возможные значения T равны 0, 1, 2. $P(T=0)=P[(X=0)(Y=0)]=P(X=0)P(Y=0)=p_xp_y=p_0$. $P(T=1)= =P[(X=0)(Y=1)+(X=1)(Y=0)]=p_xq_y+q_xp_y$. $P(T=2)=q_xq_y$. Аналогично решаются задачи 3.2-3.4.

3.2.

X	0	-1	Y	1	-1
P	0,3	0,7	P	0,6	0,4

$T=XY$.

3.3.

X	1	2	Y	-1	1
P	0,2	0,8	P	0,6	0,4

$T=X-Y$.

3.4.

X	1	2	Y	-1	1
P	p_x	q_x	P	p_y	q_y

$T=X/Y$.

3.5. Заданы законы распределения двух независимых случайных величин X и Y

X	0	1	Y	0	1
P	0,5	0,5	P	0,5	0,5

Найти их совместный закон распределения.

3.6. Задан совместный закон распределения двух случайных величин X и Y

$X\backslash Y$	-1	0	0,5	1
1	0 ,01	0,04	0,04	0,01
2	0,1	0,3	0,2	0,1
3	0,04	0,06	0,06	0,04

Найти законы распределения отдельно для X и Y. Зависимы ли эти случайные величины?

3.7. Задан совместный закон распределения двух случайных величин X и Y

$X\backslash Y$	-1	0	0,5	1
-1	0	0	0,1	0,05
0	0	0,3	?	0
1	0,08	0,07	0	0

Найти коэффициент корреляции этих СВ.

3.8. Пусть в каждом опыте событие A появляется с вероятностью p. Предположим, что проводятся две серии одинаковых и независимых опытов в количестве n и m опытов соответственно. Обозначим через X и Y случайные величины, равные числам появления события A в этих сериях. Они, очевидно, обе распределены по Бернулли. Составить закон распределения случайной величины $Z=X+Y$.

3.9. Случайные величины X и Y распределены с постоянной плотностью вероятности в квадрате $-a<x,y<a$. Написать выражение для плотности вероятности $f(x,y)$. Написать выражения для $f_X(x)$ и $f_Y(y)$. Вычислить коэффициент корреляции. Определить, являются ли X и Y независимыми. (Ответ. Независимы).

3.10. Случайная точка (X,Y) распределена равномерно в круге $x^2+y^2\le 1$. Найти MZ и DZ случайной величины $Z=XY$.

3.11. Совместное распределение X и Y является равномерным в круге $x^2+y^2\le 1$. Написать выражения для $f_X(x)$и $f_Y(y)$. Зависимы ли эти СВ? Вычислить их коэффициент корреляции. Найти $P(|X|\le 1/4)$. (Ответ. Зависимы, но не коррелированы).

3.12. Независимые СВ X иY распределены по законам $N(x;1;2)$, $N(x;2;4)$. Найти MZ и DZ случайной величины $Z=X-Y$.

§4. Лемма Маркова. Неравенство Чебышева

4.1. Среднее значение скорости ветра у поверхности земли в некоторой местности равно 16 км/ч. Оценить вероятность того, что при однократном наблюдении скорость ветра не превысит 80 км/ч. (Ответ. p<0,2).

4.2. Средний расход воды в населенном пункте составляет 50 м^3 в день. Оценить вероятность того, что в данный день расход воды не превысит 150 м^3. (Ответ. p>2/3).

4.3. Устройство состоит из 10 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого за время T равна 0,05. Оценить вероятности того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время T окажется (а) менее двух; (б) не менее двух. (Ответ. $P(|X - 0,5 |<2)>1- 0,475/4$. $P(|X-0,5|\ge 2) \le 0,475/4$).

4.4. Найти по Чебышеву вероятность того, что относительная частота X появления герба при 100 бросаниях монеты отклонится от вероятности не более чем на 0,1. Сравнить с аналогичной вероятностью, получаемой применением интегральной теоремы Муавра - Лапласа. (Ответ. $P(|X-0,5|<0,1)>1- 0,25$ – по Чебышеву. $P(|X-0,5|<0,1)>2\Phi_0(0,1*20)=0,95$ – по Муавру – Лапласу).

4.5. При использовании традиционной технологии производства средний срок службы одного прибора составляет 100 часов, а среднее квадратическое отклонение срока службы равно 10 часам. Десять приборов были изготовлены по новой технологии, и суммарный срок их службы X оказался равным 1300 часов. Есть ли основания считать, что новая технология лучше? Приборы работают независимо друг от друга. (Ответ. $P(|X-1000|\ge 300) \le 1000/90000=1/9<<1$. С вероятностью 8/9 новая технология лучше).

4.6. Дискретная С.В. X задана законом распределения

X	0,3	0,6
P	0,2	0,8

Найти по Чебышеву вероятность события $P(|X-MX|<0,2)$. Сравнить с точным значением.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ежов И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И.* Элементы комбинаторики. – М.: Наука,1977.

2. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1977.

3. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Высшая школа, 1977.

4. *Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б.* Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Высшая школа, 1991.

5. *Колмогоров А.Н.* Основные понятия теории вероятностей. – М.: Наука, 1974.

6. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. – М.: Наука, 1982.

7. *Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П.* Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1989.

8. *Севастьянов Б.А.* Курс теории вероятностей и математической статистики. – М.: Наука, 1982.

9. *Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В.* Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. – М.: Наука, 1969.

10. *Розанов Ю.А.* Случайные процессы. – М.: Наука, 1971.

11. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – Т. 1 и 2. – М.: Мир, 1984.

12. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Прикладные задачи теории вероятностей. – М.: Радио и связь, 1983.

Оглавление

В.В. Попов

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ
ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТИ

Редактор Л.В. Тарасова
Технический редактор Э.К. Гаврина
Корректор О.А. Матвеева
Компьютерная верстка Д.Р. Зайнулиной

Подписано к печати 9.02.01. Формат 60×84 1/16.
Печать офсетная. Объем 4,5 п.л.
Тираж 200 экз. Заказ 228.

Издательство Славянского университета

Отпечатано в типографии КРСУ, г.Бишкек, ул.Шопокова, 68.