ГОУВПО КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Л.Г. Лелевкина, И.В. Гончарова, Н.М. Комарцов

ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ НЕПРЕРЫВНОГО АРГУМЕНТА

Учебно-методическое пособие

Издательство Кыргызско-Российского
Славянского университета

Бишкек 2009

УДК 517

Лелевкина Л.Г., Гончарова И.В., Комарцов Н.М.

ПРЕДЕЛЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ НЕПРЕРЫВНОГО АРГУМЕНТА: Учебно-методическое пособие. – Бишкек: Издательство КРСУ, 2009. – 48 с.

Данное методическое пособие положено в основу компьютерной контрольно обучающей программы тестирования.

Методическое пособие содержит краткие теоретические основы одного из основных разделов математического анализа «Теория пределов». Приведены многочисленные примеры с методическими рекомендациями по их решению.

Для выполнения студентами индивидуальных типовых расчетов, а также для проведения контрольных работ пособие содержит 120 задач в тестовой форме, разбитых на 20 вариантов, заложенных в компьютерную контрольно-обучающую программу тестирования. Задачи охватывают основной материал данного раздела, стимулируют его усвоение и проверяют уровень подготовленности студентов.

Такая структура методического пособия направлена на развитие у студентов навыков самостоятельного решения задач и позволяет до начала экзаменационной сессии проверить уровень усвоения материала путем прохождения компьютерного тестирования и способствуют развитию самоконтроля.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов естественно-технического, экономического и архитектурно-строительного факультетов дневной и заочной форм обучения.

Рецензенты:

д.ф.-м.н., проф. Т.М. Иманалиев

д.ф.-м.н., проф. А.А. Чекеев

Печатается по решению кафедры высшей математики и РИСО КРСУ

Оглавление

Глава 1. Пределы числовых последовательностей

§1. Основные определения, свойства, операции над пределами последовательностей

Основные определения

Если по некоторому закону каждому натуральному числу n поставлено в соответствие определенное число a_n, то говорят, что задана ***числовая последовательность*** $\{a_n\}$.

Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого наперед заданного сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что все члены последовательности с номерами $n>N$ удовлетворяют неравенству $|x_n - a| < \varepsilon$.

Предел последовательности $\{x_n\}$ обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (*Lim* - от латинского слова *limes*, или французского *limite*, что означает ограничение, предел, грань).

Последовательность, имеющая предел называется сходящейся, иначе она называется расходящейся.

Иногда удобно использовать ***геометрическое*** определение предела последовательности. Число a называют пределом последовательности $\{x_n\}$, если в любой окрестности a находятся все члены последовательности, начиная с некоторого номера. Эта окрестность называется ***ε - окрестностью.***

Если последовательность $\{x_n\}$ обладает следующим свойством: какое бы большое постоянное положительное число A ни взять, все достаточно далекие значения окажутся большими, чем A

$x_n > A$

то говорят, что $\{x_n\}$ ***стремится к плюс бесконечности*** или ***имеет своим пределом плюс бесконечность***, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Аналогично, числовая последовательность $\{x_n\}$ ***стремиться к минус бесконечности*** $x \to -\infty$**,** если при произвольном $A > 0$ все последующие значения, начиная с некоторого будут удовлетворять неравенству $x_n < -A$.

Свойства пределов последовательностей

1. Числовая последовательность может иметь только один предел.
2. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.

3. Если для двух последовательностей x_n и y_n всегда выполняется неравенство $x_n \geq y_n$, причем каждая из них имеет конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то $a \geq b$.

   Замечание. Если последовательности удовлетворяют строгому неравенству $x_n > y_n$, то для их пределов может получиться и знак равенства $a \geq b$.

4. Если для последовательностей x_n, y_n, z_n всегда выполняются неравенства $x_n \leq y_n \leq z_n$, причем x_n и z_n стремятся к общему пределу a: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то и последовательность y_n имеет тот же предел $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.

Операции над пределами последовательностей

1. Предел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей равен сумме (соответственно, разности) их пределов:
   $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$.
2. Предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов:
   $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = a \cdot b$.

   В частности:

- постоянный множитель можно выносить за знак предела:
  $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $C \in R \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(Cx_n) = C \cdot a$;
- предел натуральной степени от сходящейся последовательности равен этой степени от ее предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(x_n)^k = \left(\lim_{\mathrm{n}\to\infty} x_n\right)^{\mathrm{k}} = \mathrm{a}^{\mathrm{k}}, \ k = 1,2,3,...$$

3. Предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному их пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} y_n = b \ \left(b \neq 0, \quad y_n \neq 0 \ \forall n\right) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

4. Предел корня $\kappa -$й степени от сходящейся последовательности равен корню этой же степени от предела последовательности:
   $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $k = 2,3,4,... \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}$.

Отметим, что пределы переменных, стоящие в левых частях операций (1) – (3), могут существовать без того, чтобы существовали отдельно пределы x_n и y_n. Например, если $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$, то x_n и y_n не имеют пределов, в то время как $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\left((-1)^n + (-1)^{n+1}\right) = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n \cdot (-1)^{n+1} = -1$.

Операции над пределами во многих случаях дают возможность узнать, имеет ли числовая последовательность предел и чему он равен, если она есть результат конечного числа арифметических действий над несколькими другими последовательностями, существование и величина пределов которых известны.

§2. Неопределенности различного вида

Пусть даны две последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0 \quad (y_n \neq 0)$. Рассмотрим отношение этих последовательностей. О пределе этого отношения последовательностей заранее ничего определенного сказать нельзя, так как в зависимости от самих последовательностей предел их отношения может принимать различные значения. Например:

если $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n^2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$;

если $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$;

если $x_n = \dfrac{a}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} a = a$;

если $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$, а этот предел не существует.

Таким образом, для нахождения предела последовательности $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ недостаточно знать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Нужны еще дополнительные сведения о характере изменения $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$. Для нахождения этого предела в каждом конкретном случае требуются специальные приемы. Возникают неопределенности различного вида.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то говорят, что выражение $\dfrac{x_n}{y_n}$ представляет собой неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то выражение $\dfrac{x_n}{y_n}$ также представляет собой неопределенность и ее называют неопределенностью вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, то для выражения $x_n y_n$ получаем неопределенность вида $[0\cdot\infty]$.

Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$, то выражение $x_n + y_n$ представляет собой неопределенность вида $[\infty - \infty]$.

Раскрыть соответствующую неопределенность – это значит найти предел (если он существует) соответствующего выражения.

§3. Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$

Правило. *Чтобы раскрыть неопределенность вида* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ *надо числитель и знаменатель почленно разделить на переменную величину в наибольшей степени.*

Пример 1. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}.$$

Решение. Дробь $\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}$ - есть отношение двух бесконечно больших величин, о котором без исследования ничего определенного сказать нельзя – неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Здесь также нельзя применить теорему о пределе частного, так как в условии этой теоремы предполагается, что пределы числителя и знаменателя существуют, а в нашем случае при $n\to\infty$ $(n+1)^3+(n-1)^3\to\infty$, $n^3-3n\to\infty$. В этом случае поступают так: числитель и знаменатель дроби делят на наивысшую степень n,встречающуюся в членах дроби (в данном случае на n^3).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^3+(n-1)^3}{n^3}}{\dfrac{n^3-3n}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(n+1)^3}{n^3}+\dfrac{(n-1)^3}{n^3}}{\dfrac{n^3}{n^3}-\dfrac{3n}{n^3}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^3+\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^3}{1-\dfrac{3}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^3+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^3}{1-\dfrac{3}{n^2}}=\frac{1+1}{1}=2.$$

$\left(\text{Здесь}\quad \dfrac{1}{n}\to 0, \dfrac{1}{n^2}\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty\right)$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(n+1\right)^3+(n-1)^3}{n^3-3n}=2$.

Пример 2. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt[3]{3n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}.$$

Решение. Здесь неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Разделим числитель и знаменатель дроби на наивысшую степень n, встречающуюся в дроби, т.е. на n^2:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n\sqrt[3]{3n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}}{n^2}}{\dfrac{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n\sqrt[3]{3n^2}}{n^2}+\dfrac{\sqrt[4]{4n^8+1}}{n^2}}{\dfrac{n+\sqrt{n}}{n}\cdot\dfrac{\sqrt{7-n+n^2}}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{n}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{3n^2}}{n}+\dfrac{\sqrt[4]{4n^8+1}}{n^2}}{\left(\dfrac{n}{n}+\dfrac{\sqrt{n}}{n}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{7-n+n^2}}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{3n^2}{n^3}}+\sqrt[4]{\dfrac{4n^8+1}{n^8}}}{\left(1+\sqrt{\dfrac{n}{n^2}}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{7-n+n^2}{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{\dfrac{3}{n^2}}+\sqrt[4]{4+\dfrac{1}{n^8}}}{\left(1+\sqrt{\dfrac{1}{n}}\right)\cdot\sqrt{\dfrac{7}{n^2}-\dfrac{1}{n}+1}}=\frac{\sqrt[4]{4}}{1}=\sqrt{2}.$$

$\left(\text{Здесь}\quad \dfrac{1}{n}\to 0, \dfrac{1}{n^2}\to 0, \dfrac{1}{n^8}\to 0\quad \text{при}\quad n\to\infty\right)$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sqrt[3]{3n^2}+\sqrt[4]{4n^8+1}}{(n+\sqrt{n})\sqrt{7-n+n^2}}=\sqrt{2}$.

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt[3]{2n^2+1}}{n+2\sin n}$.

Решение. При $n\to\infty$ $\sqrt{n^2+3n+1}\to\infty$, $\sqrt[3]{2n^2+1}\to\infty$, т.е. возникает неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. Последовательность $\sin n$ ограничена ($-1\le\sin n\le 1$).

Разделим числитель и знаменатель дроби на n

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{n^2+3n+1}}{n}+\dfrac{\sqrt[3]{2n^2+1}}{n}}{\dfrac{n}{n}+2\dfrac{\sin n}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{n^2+3n+1}{n^2}}+\sqrt[3]{\dfrac{2n^2+1}{n^3}}}{1+2\dfrac{\sin n}{n}}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{\frac{2}{n}+\frac{1}{n^3}}}{1+2\frac{\sin n}{n.}}=\frac{\sqrt{1}}{1}=1,$$

т.к. $\frac{1}{n}-$бесконечно малая последовательность при $n\to\infty$ и произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную – есть бесконечно малая последовательность, поэтому $\frac{1}{n}\sin n\to 0$ при $n\to\infty$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+3n+1}+\sqrt[3]{2n^2+1}}{n+2\sin n}=1$.

§4. Неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ в случае арифметической, геометрической прогрессий и факториалов

Правило 1. *Чтобы раскрыть неопределенность вида* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ *в случае арифметической прогрессии надо воспользоваться формулой суммы первых n членов арифметической прогрессии:* $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$.

Пример 1. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{1+2+3+...+n}.$$

Решение. В знаменателе стоит сумма членов арифметической прогрессии. Воспользуемся формулой суммы первых n членов арифметической прогрессии. В нашем случае $a_1=1, a_n=n$, тогда $S_n=\frac{1+n}{2}\cdot n$.

Получаем,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{1+2+3+...+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{\frac{1+n}{2}\cdot n}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2+4}{n+n^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{6n^2}{n^2}+\frac{4}{n^2}}{\frac{n}{n^2}+\frac{n^2}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{6+\frac{4}{n^2}}{\frac{1}{n}+1}=\frac{6+0}{0+1}=6.$$

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2}{1+2+3+...+n}=6$.

Правило 2. *Чтобы раскрыть неопределенность вида* $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ *в случае геометрической прогрессии надо воспользоваться формулой суммы первых n членов геометрической прогрессии:* $S_n = \dfrac{b_1\left(q^n - 1\right)}{q-1}$.

Пример 2. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}+1+\frac{91}{125}+\ldots+\frac{3^n+4^n}{5^n}\right).$$

Решение. Данная последовательность представляет собой сумму двух геометрических прогрессий:

$$\frac{7}{5}+1+\frac{91}{125}+\ldots+\frac{3^n+4^n}{5^n}=\left(\frac{3}{5}+\frac{9}{25}+\frac{27}{125}+\ldots+\frac{3^n}{5}\right)+\left(\frac{4}{5}+\frac{16}{25}+\frac{64}{25}+\left(\frac{4}{5}\right)^n\right).$$

Применим формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии. Для первой прогрессии $b_1=\dfrac{3}{5}, q=\dfrac{3}{5}$, для второй прогрессии $b_1=\dfrac{4}{5}, q=\dfrac{4}{5}$.

Имеем,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{5}+1+\frac{91}{125}+\ldots\frac{3^n+4^n}{5^n}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3}{5}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right)}{\frac{3}{5}-1}+\frac{\frac{4}{5}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n-1\right)}{\frac{4}{5}-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{3}{5}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n-1\right)}{-\frac{2}{5}}+\frac{\frac{4}{5}\left(\left(\frac{4}{5}\right)^n-1\right)}{-\frac{1}{5}}\right)=$$

$$=-\frac{3}{2}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{\infty}-1\right)-4\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{\infty}-1\right)=-\frac{3}{2}(0-1)-4(0-1)=\frac{3}{2}+4=\frac{11}{2},$$

т.к. если число $|A|<1,$то $A^n\to 0$ при $n\to\infty$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7}{5}+1+\dfrac{91}{125}+\ldots+\dfrac{3^n+4^n}{5^n}\right)=\dfrac{11}{2}$.

Правило 3. *Чтобы раскрыть неопределенность вида* $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ *в случае факториалов надо выразить все факториалы последовательности через наименьший и сократить на него.*

Пример 3. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{3\left(n^2+1\right)(n-1)!}.$$

Решение. По определению $n!=1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$,

$$(2n)!!=2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n,$$

$$(2n+1)!!=1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1).$$

Поэтому, числитель и знаменатель стремятся к ∞, т.е. мы имеем неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$. Выберем наименьший факториал и выразим через него все остальные. В нашем примере наименьшим будет $(n-1)!$. Тогда $n!=(n-1)!\cdot n$, $(n+1)!=(n-1)!\cdot n\cdot(n+1)$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!n(n+1)-(n-1)!n}{3\left(n^2+1\right)(n-1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)!\left(n^2+n-n\right)}{3\left(n^2+1\right)(n-1)!}=$$

$$==\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{3\left(n^2+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^2}}{3\left(\frac{n^2}{n^2}+\frac{1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{3(1+0)}=\frac{1}{3}.$$

Здесь $\frac{1}{n^2}\to 0$ при $n\to\infty$.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)!-n!}{3\left(n^2+1\right)(n-1)!}=\frac{1}{3}$.

§5. Неопределенность вида $[\infty-\infty]$

Правило. *Неопределенность вида* $[\infty-\infty]$, *получающаяся в результате алгебраической суммы иррациональных выражений, устраняется или приводится к типу* $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ *путем домножения и деления на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. В случае* ***квадратных корней*** *последовательность домножается на сопряженное выражение и применяется формула* $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. *В случае* ***кубических корней*** *последовательность домножается на неполный квадрат суммы или разности и применяется формула* $a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$.

Пример 1. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n+2}-\sqrt{4n-1}).$$

Решение. При вычислении данного предела мы не мажем применить теорему о пределе разности двух переменных, ибо эта теорема верна только в том случае, когда обе переменные имеют предел. В нашем случае при $n \to \infty$ $\sqrt{9n+2} \to \infty, \sqrt{4n-1} \to \infty$, и мы имеем дело с разностью двух положительных бесконечно больших величин. Без специального исследования этой разности ничего определенного сказать нельзя, т.е. имеем неопределенность $[\infty - \infty]$. Данная неопределенность раскрывается путем избавления от иррациональности. Вспоминая формулу $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, умножим и разделим выражение $\sqrt{9n+2} - \sqrt{4n-1}$ на сопряженное $\sqrt{9n+2} + \sqrt{4n-1}$.

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{9n+2} - \sqrt{4n-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{9n+2} - \sqrt{4n-1})(\sqrt{9n+2} + \sqrt{4n-1})}{(\sqrt{9n+2} + \sqrt{4n-1})} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{9n+2-(4n-1)}{(\sqrt{9n+2} + \sqrt{4n-1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{(\sqrt{9n+2} + \sqrt{4n-1})}$$

После преобразований получили дробь, у которой числитель и знаменатель бесконечно большие последовательности ($5n+3 \to \infty$, $\sqrt{9n+2} \to \infty$, $\sqrt{4n-1} \to \infty$, а следовательно, и $\sqrt{9n+2} + \sqrt{4n-1} \to \infty$). Возникает неопределенность $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, которая раскрывается путем деления числителя и знаменателя на *n* в наибольшей степени, в нашем случае на *n*.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n+3}{(\sqrt{9n+2} + \sqrt{4n-1})} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{5n}{n} + \frac{3}{n}}{\frac{\sqrt{9n+2}}{n} + \frac{\sqrt{4n-1}}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{5 + \frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{9n}{n^2} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{\frac{4n}{n^2} - \frac{1}{n^2}}} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5 + \frac{3}{n}}{\sqrt{\frac{9}{n} + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{\frac{4}{n} - \frac{1}{n^2}}} = \frac{5+0}{\sqrt{0+0} + \sqrt{0-0}} = \frac{5}{0} = \infty$$

так как при $n \to \infty$ предел числителя равен 5, а знаменатель есть величина бесконечно малая, как сумма двух бесконечно малых величин. Т.е. мы имеем дело с величиной, которая обратна бесконечно малой, а такая величина есть бесконечно большая.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{9n+2} - \sqrt{4n-1}) = \infty$.

Пример 2. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{5-n^3} + n).$$

Решение. При $n \to \infty$ $\sqrt[3]{5-n^3} \to -\infty, n \to \infty$, поэтому имеем дело с неопределенностью вида $[\infty - \infty]$.

Для раскрытия неопределенности применим формулу $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$.

Положим $a = \sqrt[3]{5-n^3}$, $b = n$, а затем умножим и разделим на неполный квадрат разности выражения $\sqrt[3]{5-n^3} - n$. Имеем,

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{5-n^3}+n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt[3]{5-n^3}+n)((\sqrt[3]{5-n^3})^2 - \sqrt[3]{5-n^3}\cdot n + n^2)}{(\sqrt[3]{5-n^3})^2 - \sqrt[3]{5-n^3}\cdot n + n^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5-n^3+n^3}{(\sqrt[3]{5-n^3})^2 - \sqrt[3]{5-n^3}\cdot n + n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{5}{(\sqrt[3]{5-n^3})^2 - \sqrt[3]{5-n^3}\cdot n + n^2} =$$

$$= \frac{5}{(\sqrt[3]{5-\infty^3})^2 - \sqrt[3]{5-\infty^3}\cdot\infty + \infty^2} = \frac{5}{(-\infty)^2 - (-\infty)\cdot\infty + \infty^2} = \frac{5}{\infty+\infty+\infty} = 0,$$

т.к. знаменатель дроби при $n \to \infty$ есть сумма трех положительных бесконечно больших величин, а поэтому есть величина бесконечно большая. Величина же, обратная бесконечно большой, есть величина бесконечно малая, предел которой равен нулю.

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[3]{5-n^3}+n) = 0$.

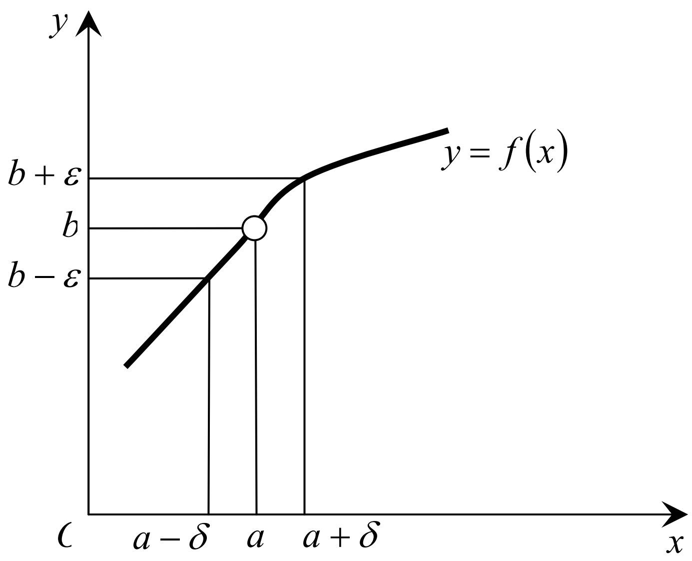
Глава 2. Пределы функций одной переменной

§1. Основные определения, свойства пределов функций одной переменной

Основные определения

Понятие предела функции является одним из основных в математическом анализе. Определения производной, интеграла, непрерывности и т.д. основаны на использовании предела.

Число b называют ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех x, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Предел функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, обозначают $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ либо $f(x) \to b$ при $x \to a$.



Дадим геометрическую интерпретацию понятия предела функции в точке. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. Предположим, что функция имеет при $x \to a$ пределом число b. Возьмем произвольное сколь угодно малое число $\varepsilon > 0$. Окружим число b ε-окрестностью $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$. Найдем на оси Ox такую окрестность точки a: $(a - \delta, a + \delta)$, при попадании в которую значений аргумента x соответствующие значения функции попадут в ε-окрестность числа b. При уменьшении числа ε интервал $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ будет стягиваться к числу b. Соответствующий ему интервал $(a - \delta, a + \delta)$ будет стягиваться к числу a. Это и доказывает, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Число b называют ***пределом функции*** $y = f(x)$ при $x \to \infty$ или $x \to -\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать положительное число N, такое, что при всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Свойства предела функции

1. Функция $f(x)$ при $x \to a$ имеет единственный предел.
2. Предел постоянной равен самой постоянной: $\lim\limits_{x \to a} C = C$ $(C = const)$.

3. Постоянную можно выносить за знак предела $\lim\limits_{x\to a} C\cdot f\left(x\right)=C\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)$.

4. Предел суммы или разности конечного числа функций равен сумме или разности пределов этих функций $\lim\limits_{x\to a}\left(f\left(x\right)\pm g\left(x\right)\right)=\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)\pm\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)$.

5. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций $\lim\limits_{x\to a}\left(f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)=\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)\cdot\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)$.

6. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)}{\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$.

7. Если $f\left(x\right)\geq 0$ $\left(f\left(x\right)\leq 0\right)$, то $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)\geq 0$ $\left(\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)\leq 0\right)$.

8. Пусть функции связаны соотношением $f\left(x\right)\leq g\left(x\right)\leq h\left(x\right)$, причем $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to a} h\left(x\right)=A$, тогда и $\lim\limits_{x\to a} g\left(x\right)=A$.

9. $\lim\limits_{x\to a}\left[f\left(x\right)\right]^{g(x)}=\left[\lim\limits_{x\to a}\left[f\left(x\right)\right]\right]^{\lim\limits_{x\to a}\left[g\left(x\right)\right]}$.

Следствие. $\lim\limits_{x\to a}\left[f\left(x\right)\right]^{n}=\left[\lim\limits_{x\to a}\left[f\left(x\right)\right]\right]^{n}$.

10. $\lim\limits_{x\to a} f\left(\varphi(x)\right)=f(\lim\limits_{x\to a}\varphi\left(x\right))$.

Замечание. Все свойства пределов распространяются и на случай, когда $x\to\infty$.

§2. Понятие неопределенностей

В практике отыскания пределов наиболее часто применяются свойства 2 - 6 об арифметических действиях над пределами. Однако их непосредственное применение бывает невозможно в особых случаях, называемых неопределенностями, которые возникают при нарушении их условий. Виды неопределенностей $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, $\left[\infty-\infty\right]$, $\left[0\cdot\infty\right]$.

Кроме этих неопределенностей, связанных с арифметическими действиями над пределами, существуют неопределенности $\left[1^{\infty}\right]$, $\left[0^{0}\right]$, $\left[\infty^{0}\right]$.

Чтобы найти пределы при наличии неопределенности, надо эту неопределенность устранить, открыв тем самым возможность использования того или иного свойства пределов. Это достигается, с одной стороны, применением алгебраических и тригонометрических преобразований (разложение функции на множители или на слагаемые, приведение дробей к общему знаменателю, добавление и вычитание некоторого выражения, умножение и деление на некоторую функцию, вынесение множителя за скобку и т.п.) заменой переменной, использованием эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших, а с другой стороны, использование так называемых ***замечательных пределов.***

Таблица раскрытия различных видов неопределенностей

<table>
<tr><th>Тип неопределенности</th><th>Правило раскрытия</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1. $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$</td><td>1.1. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, заданную отношением двух многочленов, надо и числитель и знаменатель почленно разделить на переменную величину в наибольшей степени.</td></tr>
<tr><td>1.2. Для раскрытия неопределенности вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$, заданную отношением иррациональных функций, надо и числитель и знаменатель почленно разделить на переменную величину в наибольшей степени с учетом степеней корней.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2. $\left[\frac{0}{0}\right]$</td><td>2.1. Для того, чтобы определить предел дробно-рациональной функции в случае, когда при $x \to a$ числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные нулю, надо числитель и знаменатель дроби разделить на $x - a$ и перейти к пределу. Если и после этого числитель и знаменатель новой дроби имеют пределы, равные нулю при $x \to a$, то надо произвести повторное деление на $x - a$.</td></tr>
<tr><td>2.2. Чтобы раскрыть неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, в которой числитель или знаменатель иррациональны, следует надлежащим образом избавиться от иррациональности, умножив и числитель и знаменатель дроби на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. Неопределенность устраняется после сокращения дроби.
В случае квадратных корней и числитель и знаменатель дроби умножаются на сопряженное выражение тому, которое содержит иррациональность и применяется формула $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.
В случае кубических корней и числитель и знаменатель дроби умножаются на неполный квадрат суммы или разности и применяется формула $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)\left(a^2 \mp ab + b^2\right)$.</td></tr>
</table>

3. $[\infty-\infty]$	3.1. Неопределенность вида $[\infty-\infty]$, получающаяся в результате алгебраической суммы иррациональных выражений, устраняется или приводится к типу 1 путем домножения и деления на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения. В случае **квадратных корней** разность домножается на сопряженное выражение и применяется формула $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$. В случае **кубических корней** функция домножается на неполный квадрат суммы или разности и применяется формула $a^3\pm b^3=(a\pm b)\left(a^2\mp ab+b^2\right)$.
	3.2. Неопределенность вида $[\infty-\infty]$, получающаяся в результате алгебраической суммы двух дробей, устраняется или сводится к типу 2 $\left[\frac{0}{0}\right]$ путем приведения дробей к общему знаменателю. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=\infty$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=[\infty-\infty]=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{\frac{1}{f(x)}}-\dfrac{1}{\frac{1}{g(x)}}=$ $=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)}\cdot\frac{1}{g(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]$.
. Замечательные пределы	4.1. **Первый замечательный предел** (неопределенность $\left[\frac{0}{0}\right]$). В случае, когда под знаком предела стоят тригонометрические функции, дающие неопределенность**,** используется первый замечательный предел: $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$ Его различные формы: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg\,x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{tg\,x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{arctg\,x}=1$.

	4.2. **Второй замечательный предел** (неопределенность $\left[1^{\infty}\right]$): $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e.$$ Его различные формы: $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e$, $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x\right)}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1,$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\ln a,$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=1,$$ $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x\right)^{p}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=p.$$
5. $\left[0\cdot\infty\right]$	5.1. Неопределенность типа $\left[0\cdot\infty\right]$ сводится либо к неопределенности типа 1 $\left(\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\right)$, либо к неопределенности типа 2 $\left(\left[\frac{0}{0}\right]\right)$ путем перемещения в знаменатель одного из сомножителей. Пусть $\lim\limits_{x\to a}f\left(x\right)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g\left(x\right)=\infty$. Тогда $$\lim_{x\to a}f\left(x\right)g\left(x\right)=\left[0\cdot\infty\right]=\begin{cases}\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f\left(x\right)}{1/g\left(x\right)}=\left[\dfrac{0}{0}\right],\\ \textit{или}\\ \lim\limits_{x\to a}\dfrac{g\left(x\right)}{1/f\left(x\right)}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right].\end{cases}$$
6. $\left[\infty^{0}\right],\left[0^{0}\right]$	6.1. Неопределенности вида $\left[\infty^{0}\right]$, $\left[0^{0}\right]$ сводятся к неопределенности типа 5 $\left[0\cdot\infty\right]$ путем **логарифмирования.**

Замечание. Применение замечательных пределов требует понимания и запоминания структуры каждого из них и при необходимости ее воспроизведения. Так, для предела $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ характерно отношение синуса бесконечно малого угла к самому углу. Поэтому всякий предел вида $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin f(x)}{f(x)}$ равен 1, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$. Например, каждый из пределов $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}$, $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin(\pi-x)}{\pi-x}$, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin\left(x^2-1\right)}{x^2-1}$ есть, в сущности, первый замечательный предел и потому равен 1, чего нельзя сказать ни об одном из пределов $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}$, $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{\sin x}{x}$.

Для предела $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$ (e - иррациональное число e=2,7182818…) характерно, что сумма, равная единице плюс бесконечно малая, возводится в степень, обратную этой бесконечно малой. Следовательно, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, то и $\lim\limits_{x\to a}\left(1+f(x)\right)^{1/f(x)}=e$. Такова структура каждого из пределов $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/3x}$, $\lim\limits_{x\to \pi/2}(1-\cos x)^{-1/\cos x}$, $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+1/\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$, и поэтому все они равны e, но структура пределов $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{1/x}$, $\lim\limits_{x\to \pi/2}(1-\cos x)^{1/\cos x}$, $\lim\limits_{x\to 1}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ отлична от структуры второго замечательного предела.

Подобные рассуждения справедливы и для других форм замечательных пределов.

§3. Раскрытие неопределенностей вида $\left[\frac{0}{0}\right]$

Пример 1. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$.

Решение. Знаменатель дроби $\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$ обращается в нуль при $x=3$, а потому функция $f(x)=\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$ при $x=3$ не существует. Теорему о пределе дроби применить нельзя, так как предел знаменателя равен нулю. Но определение предела функции содержит существенную оговорку: при отыскании предела функции $f(x)$ при $x\to a$ значение функции $f(a)$ при $x=a$ может не рассматриваться.

Т.к. при $x \to 3$ числитель и знаменатель дроби – бесконечно малые функции $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 + x - 12) = 0$ и $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2 - 9x + 9) = 0$, то имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Для решения задачи используем правило 2.1 (см. таблицу). Разделим числитель и знаменатель на $(x-3)$. Мы имеем право это сделать, потому что значение $x = 3$ не рассматривается, и, значит $x - 3 \neq 0$.

$$\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+4)}{2(x-3)(x-\frac{3}{2})} = \lim_{x\to 3}\frac{x+4}{2(x-\frac{3}{2})} = \lim_{x\to 3}\frac{x+4}{2x-3} = \frac{7}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 + x - 12}{2x^2 - 9x + 9} = \dfrac{7}{3}$.

Пример 2. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 - 3x^2 - 45x - 81}$.

Решение. Имеем неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. По правилу 2.1 разделим числитель и знаменатель на $x + 3$.

$$\begin{array}{r|l}
x^3 + 5x^2 + 3x - 9 & x+3 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^3 + 3x^2} & x^2 + 2x - 3 \\
2x^2 + 3x & \\
-\ \underline{2x^2 + 6x} & \\
-3x - 9 & \\
-\ \underline{-3x - 9} & \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 - 45x - 81 & x+3 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{x^3 + 3x^2} & x^2 - 6x - 27 \\
-6x^2 - 45x & \\
-\ \underline{-6x^2 - 18x} & \\
-27x - 81 & \\
-\ \underline{-27x - 81} & \\
0 &
\end{array}$$

Тогда

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x^2 + 2x - 3)}{(x+3)(x^2 - 6x - 27)} = \lim_{x\to -3}\frac{(x^2 + 2x - 3)}{(x^2 - 6x - 27)} = \left[\frac{0}{0}\right].$$

Еще раз разделим числитель и знаменатель на $x + 3$:

$$\lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-1)}{(x+3)(x-9)} = \lim_{x\to -3}\frac{(x-1)}{(x-9)} = \frac{-4}{-12} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3 + 5x^2 + 3x - 9}{x^3 - 3x^2 - 45x - 81} = \dfrac{1}{3}$.

Пример 3. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}$.

Решение. Имеем неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. По правилу 2.2 умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю и применим формулу $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{x+16})^2-4^2}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+16-16}{(x^2+2x)(\sqrt{x+16}+4)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x(x+2)(\sqrt{x+16}+4)}=\frac{1}{(0+2)(\sqrt{0+16}+4)}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot(4+4)}=\frac{1}{16}$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+16}-4}{x^2+2x}=\dfrac{1}{16}$.

Пример 4. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x}{\sqrt[3]{x^2+8}-2}$.

Решение. Т.к. здесь неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ и знаменатель содержит иррациональность, то, используя правило 2.2, умножим числитель и знаменатель дроби на неполный квадрат (т.к. корень кубический) и применим формулу $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x}{\sqrt[3]{x^2+8}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x^3-3x)((\sqrt[3]{x^2+8})^2+2\sqrt[3]{x^2+8}+4)}{(\sqrt[3]{x^2+8}-2)((\sqrt[3]{x^2+8})^2+2\sqrt[3]{x^2+8}+4)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-3x)((\sqrt[3]{x^2+8})^2+2\sqrt[3]{x^2+8}+4)}{(\sqrt[3]{x^2+8})^3-8}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-3x)((\sqrt[3]{x^2+8})^2+2\sqrt[3]{x^2+8}+4)}{x^2+8-8}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(x-3)((\sqrt[3]{x^2+8})^2+2\sqrt[3]{x^2+8}+4)}{x^2}=$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(x-3)((\sqrt[3]{x^2+8})^2+2\sqrt[3]{x^2+8}+4)}{x} = \frac{-3((\sqrt[3]{8})^2+2\sqrt[3]{8}+4)}{0} =$$

$$= \frac{-3(4+4+4)}{0} = \frac{-36}{0} = -\infty$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x}{\sqrt[3]{x^2+8}-2} = -\infty$.

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x\left(-2+\sin\dfrac{1}{x}\right)+4\cos x}$.

Решение. Т.к функция $y=\sqrt{x}$ непрерывна при всех x,то, переходя к пределу под знаком непрерывной функции, получаем

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+4\cos x} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0}\left[x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+4\cos x\right]}.$$

Т.к x – бесконечно малая функция в точке x=0, а функция $y=2+\sin\dfrac{1}{x}$ - ограниченная в окрестности точки $x=0$, то $x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)$-бесконечно малая функция в точке $x=0$ (произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию – есть бесконечно малая функция), т.е. $\lim\limits_{x\to 0}x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)=0$.

Т.к. функция $y=\cos x$ непрерывна в точке $x=0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Используя основные теоремы о пределе функции в точке, получим

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+4\cos x} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 0}\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)+4\lim_{x\to 0}\cos x} = 2.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x\left(2+\sin\dfrac{1}{x}\right)+4\cos x} = 2$.

§4. Первый замечательный предел

Пример 1. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin x}{1-\cos x}$.

Решение. Выражение под знаком предела является отношением двух бесконечно малых величин, имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.Учитывая, что

$$1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2},$$

имеем,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Воспользуемся по правилу 4.1 первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Для этого умножим и числитель, и знаменатель на $\frac{x}{4}$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot x\cdot\frac{x}{4}}{\sin^2\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{4}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2}{\sin^2\frac{x}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{4}}=4\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2=4\cdot 1\cdot 1=4.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}=4$.

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Сделаем замену переменной $x-\pi=t$, при $x\to\pi$ $t\to 0$, и воспользуемся формулами тригонометрии

$$\cos(3\pi+3t)=-\cos 3t,\cos(\pi+t)=-\cos t, tg(2\pi+2t)=tg2t,$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\cos 3(\pi+t)-\cos(\pi+t)}{tg^2 2(\pi+t)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos t-\cos 3t}{tg^2 2t}=\lim_{t\to 0}\frac{-2\sin 2t\sin(-t)}{tg^2 2t}.$$

Заменим бесконечно малые функции эквивалентными при $t\to 0$:

$$\sin 2t\sim 2t,\ \sin(-t)\sim(-t),\ tg2t\sim 2t,$$

тогда

$$\lim_{t\to 0}\frac{-2\cdot 2t\cdot(-t)}{(2t)^2}=\lim_{t\to 0}\frac{4t^2}{4t^2}=1.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos 3x-\cos x}{tg^2 2x}=1$.

§5. Второй замечательный предел

Пример 1. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}=\left(\frac{2-1}{1}\right)^{\frac{\ln(3+2)}{\ln(2-1)}}=(1)^{\frac{\ln 5}{\ln 1}}=(1)^{\frac{\ln 5}{0}}=\left[1^\infty\right].$

Преобразуем выражение под знаком предела так, чтобы можно было использовать второй замечательный предел, правило 4.2,

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{2x-1}{x}-1\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln 2-x}}.$$

При $x\to 1$ $\frac{x-1}{x}\to 0$. Сформируем степень, учтем, что $\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}}=e$ и $\lim_{x\to 1}\frac{\ln(1+(1-x))}{1-x}=1$. Получим,

$$\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{x-1}{x}\right)^{\frac{x}{x-1}\cdot\frac{x-1}{x}\cdot\frac{\ln(3+2x)}{\ln(1+(1-x))}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x}\cdot\frac{\ln(3+2x)}{\ln(1+(1-x))}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln(1+(1-x))}\cdot\frac{\ln(3+2x)}{x}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-(1-x)}{\ln(1+(1-x))}\cdot\ln 5}=e^{-\ln 5}=\text{-5}.$$

Ответ: $\lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-1}{x}\right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}=-5$.

Пример 2. Вычислить предел числовой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}.$$

Решение. При $n\to\infty$ выражение под знаком предела представляет собой степень, основание которой стремится к единице: $\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}=1$, а показатель к бесконечности $\lim_{n\to\infty}\left(3n^2+1\right)=\infty$. Таким образом, мы имеем дело с неопределенностью вида $\left[1^\infty\right]$.

Преобразуем выражение под знаком предела так, чтобы по правилу 4.2 использовать второй замечательный предел $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}-1\right)^{3n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{(2n^2+n+4)\cdot\frac{\left(3n^2+1\right)}{2n^2+n+4}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+1}{2n^2+n+4}}=e^{\frac{3}{2}}$$

(т.к. при $n\to\infty, 2n^2+n+4\to\infty,$ то $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n^2+n+4}\right)^{2n^2+n+4}=e$).

Ответ: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n+5}{2n^2+n+4}\right)^{3n^2+1} = e^{3/2}$.

Пример 3. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$.

Решение. Поскольку $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^3-1\right)=0$ и $\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$,то выражение под знаком предела является отношением двух бесконечно малых функций при $x\to 1$ (неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$). Воспользуемся правилом 4.2.

Сделаем замену переменной $x-1=t$, при $x\to 1, t\to 0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{\ln x}=\begin{vmatrix} x-1=t \\ x\to 1 \\ t\to 0 \\ x=1+t \end{vmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{t((t+1)^2+(t+1)+1)}{\ln(1+t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}\lim_{t\to 0}(t^2+3t+3)=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}}\lim_{t\to 0}(t^2+3t+3)=3,$$

(где $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1$ - одна из форм второго замечательного предела)

Ответ: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}=3$.

Пример 4. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\left[\ln(x-2)-\ln(x+3)\right]$.

Решение. Здесь имеет место неопределенность $\left[\infty-\infty\right]$. Воспользуемся свойствами логарифмов $\log_a b-\log_a c=\log_a\dfrac{b}{c}$ и $k\log_a b=\log_a b^k$, а также вторым замечательным пределом, правило 4.2:

$$\lim_{x\to\infty}(x+3)\left[\ln(x-2)-\ln(x+3)\right]=\lim_{x\to\infty}(x+3)\ln\frac{x-2}{x+3}=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{x+3}=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{x+3}\right]=1^\infty=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2}{x+3}\right)^{x+3}\right]=$$

$$=\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{x-2-x-3}{x+3}\right)^{x+3}\right]=$$

$$= \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x+3}\right)^{(x+3)\cdot\frac{-5}{-5}}\right] = \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{-5}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{-5}}\right)^{-5}\right] = \ln e^{-5} = -5.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to\infty}(x+3)\left[\ln(x-2)-\ln(x+3)\right] = -5$.

§6. Одновременное использование первого и второго замечательных пределов

Пример 1. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x}$.

Решение. Имеем неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Воспользовавшись правилом 4.2, умножим числитель и знаменатель на $\sin 2x$. При $x\to 0$ $\sin 2x\to 0$, поэтому воспользуемся одной из форм второго замечательного предела $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 2x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x\cdot 2x\cdot 3}{\sin 3x\cdot 2x\cdot 3} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 2x}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Использовали правило 4.1. При $x\to 0$ $3x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x} = 1$,

$2x\to 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = 1$.

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\sin 3x} = \dfrac{2}{3}$.

Пример 2. Вычислить предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}$.

Решение. Имеем неопределенность $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. В числителе добавим и вычтем 1:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x} = \lim_{x\to 0}\frac{2^{3x}-1-(3^{5x}-1)}{\sin 7x-2x}.$$

Затем поделим числитель и знаменатель дроби на x и воспользуемся свойствами пределов, первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ (правило 4.1) и одной из форм второго замечательного предела: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$ (правило 4.2).

$$\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2^{3x}-1}{x}-\dfrac{3^{5x}-1}{x}}{\dfrac{\sin 7x}{x}-\dfrac{2x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(2^3\right)^x-1}{x}-\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(3^5\right)^x-1}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{7\sin 7x}{7x}-2\right)}=\frac{\ln 2^3-\ln 3^5}{7-2}=\frac{1}{5}\ln\frac{2^3}{3^5}.$$

Ответ: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{3x}-3^{5x}}{\sin 7x-2x}=\dfrac{1}{5}\ln\dfrac{2^3}{3^5}$.

Варианты контрольных заданий

Вариант № 1

1. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$$

Ответы:

1) 2; 2) 0; 3) ∞; 4) -1.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+x^2}-3}{x^2}$$

Ответы:

1) 2; 2) 1; 3) ∞; 4) $\frac{1}{6}$.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\left[\ln(x-1)-\ln(x+2)\right]$$

Ответы:

1) 4; 2) 3; 3) $-\frac{1}{3}$; 4) -3.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$$

Ответы:

1) 4; 2) $\frac{1}{3}$; 3) -3; 4) 3.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[4]{5x^3-x^2-1}}{\sqrt[7]{2x^2-4}}$$

Ответы:

1) $\frac{5}{2}$; 2) 0; 3) ∞; 4) 1.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}$$

Ответы:

1) 1; 2) $\frac{9}{4}$; 3) 0; 4) -1.

Вариант № 2

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$$

Ответы:

1) 0 2) $\frac{4}{5}$; 3) 2; 4) 1.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$$

Ответы:

1) 3; 2) $\sqrt{3}$; 3) ∞; 4) 0.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$$

Ответы:

1) $\frac{1}{2}$; 2) -2; 3) 1; 4) 0.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2+1}-\sqrt{x^2+1})$$

Ответы:

1) $-\infty$; 2) ∞; 3) 1; 4) 0.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin^2 3x)^{ctg^2 x}$$

Ответы:

1) 1; 2) 0; 3) e^9; 4) e^{-9};

6. Найти предел

$$\lim_{n\to 0}\frac{\sqrt{n^2+4n}}{\sqrt[3]{8n^3-3n^2}}$$

Ответы:

1) 0; 2) $-\frac{4}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{8}$.

Вариант № 3

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}$$

Ответы:

1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) ∞; 4) $\frac{1}{2}$.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}}$$

Ответы:

1) 0; 2) $\frac{\pi^2}{2}$; 3) $\frac{\pi}{2}$; 4) $\frac{2}{\pi}$.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to \infty}\left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}$$

Ответы:

1) $e^{\frac{2}{3}}$; 2) $e^{-\frac{2}{3}}$; 3) 1; 4) e^{-1}.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}$$

Ответы:

1) 1; 2) 0; 3) $\frac{3}{5}$; 4) ∞.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to \infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$$

Ответы:

1) $\frac{1}{2}$; 2) 1; 3) 2; 4) 0.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to \infty}\frac{\sqrt[5]{3x^3-1}}{\sqrt{5x^5-2x+2}}$$

Ответы:

1) $\frac{3}{5}$; 2) 0; 3) ∞; 4) 2.

Вариант № 4

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$$

Ответы:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) 0; 3) $\frac{2}{3}$; 4) ∞.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+(1+x)^2}{-2x^2+1}$$

Ответы:

1) 0; 2) ∞; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) -1.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+7x-13}-x)$$

Ответы:

1) 0; 2) ∞; 3) $\frac{7}{2}$; 4) $-\frac{13}{2}$.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to 4}\frac{2x^2-7x-4}{x^2-x-12}$$

Ответы:

1) $\frac{1}{3}$; 2) 2; 3) $\frac{9}{7}$; 4) $-\frac{7}{9}$.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\frac{\pi}{2}-x)tgx$$

Ответы:

1) 1; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) -1; 4) 0.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}(1+2\sin x)^{\operatorname{cosec} x}$$

Ответы:

1) e; 2) 2; 3) $\frac{1}{e}$; 4) e^2.

Вариант № 5

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$$

Ответы:

1) e^{-1}; 2) e^{-2}; 3) $2e$; 4) 1.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^2+(x+1)^2}}{\sqrt[3]{1-2x^2}}$$

Ответы:

1) 0; 2) ∞; 3) 1; 4) -1.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{2x^2-3}-5x)$$

Ответы:

1) 0; 2) -3; 3) ∞; 4) $-\infty$.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-x-12}{x^2-2x-8}$$

Ответы:

1) 1; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $\frac{7}{6}$; 4) 0.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{\sec x-1}$$

Ответы:

1) 2; 2) ∞; 3) 4; 4) 0.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x^2}-2}{x^2}$$

Ответы:

1) 2; 2) -1; 3) 0; 4) $\frac{1}{4}$.

Вариант № 6

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+4x-21}{2x^2-7x+3}$$

Ответы:

1) -2; 2) $\frac{1}{2}$; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) 2.

2. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^3+1}}{\sqrt[4]{3n^6+n^2}}$$

Ответы:

1) $\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$; 2) 0; 3) ∞; 4) $\frac{2}{3}$.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^3+1}{x^3+x}\right)^x$$

Ответы:

1) 2; 2) 0; 3) ∞; 4) 8;

4. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$$

Ответы:

1) 1; 2) 0; 3) ∞; 4) $\frac{3}{2}$.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to 0} ctg\,2x\cdot ctg(\frac{\pi}{2}-x)$$

Ответы:

1) 0; 2) ∞; 3) $-\frac{1}{2}$; 4) $\frac{1}{2}$.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)$$

Ответы:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{2}{5}$; 3) $-\frac{5}{2}$; 4) 1.

Вариант № 7

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x^2}{\sin \pi x}$$

Ответы:

1) π; 2) $\frac{\pi}{2}$; 3) $\frac{2}{\pi}$; 4) $-\pi$.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^3-(x-1)^3}{x^3+2x^2+3x+1}$$

Ответы:

1) 2; 2) 0; 3) ∞; 4) $\frac{1}{2}$.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to \infty}(x-4)\left[\ln(2-3x)-\ln(5-3x)\right]$$

Ответы:

1) -1; 2) e; 3) e^{-1}; 4) 1.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$$

Ответы:

1) -2; 2) 1; 3) ∞; 4) 0.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{4x^2+2}-2x)$$

Ответы:

1) 3; 2) -1; 3) 0; 4) ∞.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$$

Ответы:

1) 1; 2) 2; 3) -1; 4) -2.

Вариант № 8

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$$

Ответы:

1) -4; 2) 4; 3) $\frac{1}{4}$; 4) $-\frac{1}{4}$.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}(1+3tgx)^{ctgx}$$

Ответы:

1) ∞; 2) 1; 3) $e^{\frac{1}{3}}$; 4) e^3.

3. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-1}{5n^2-7n+2}\right)^2$$

Ответы:

1) $-\frac{1}{7}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{2}{5}$; 4) $\frac{4}{25}$.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$$

Ответы:

1) 0; 2) -1; 3) a; 4) 1.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+x-12}{2x^2-9x+9}$$

Ответы:

1) $\frac{1}{2}$; 2) 2; 3) $-\frac{4}{3}$; 4) $\frac{7}{3}$.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

Ответы:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) ∞; 4) $\frac{4}{3}$.

Вариант № 9

1. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x^2+1}{3x^3-5}$$

Ответы:

1) $\frac{4}{3}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) ∞; 4) $-\frac{1}{5}$.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$$

Ответы:

1) 0; 2) $\frac{1}{2}$; 3) ∞; 4) -1.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$$

Ответы:

1) 0; 2) ∞; 3) 2; 4) $\frac{1}{2}$.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x^3-2x^2+x}{3x^2+2x}$$

Ответы:

1) ∞; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 0; 4) 2.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1-\cos x}}$$

Ответы:

1) $\sqrt{2}$; 2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 0; 4) 2.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x2}\right)^x$$

Ответы:

1) e; 2) 1; 3) $\frac{1}{e}$; 4) 0.

Вариант № 10

1. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}$$

Ответы:

1) ∞; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 2; 4) 0.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-1})$$

Ответы:

1) ∞; 2) $\frac{3}{2}$; 3) 0; 4) -3.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$$

Ответы:

1) 0; 2) ∞; 3) $-\frac{1}{8}$; 4) $\frac{1}{8}$.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$$

Ответы:

1) $\frac{q}{p}$; 2) p; 3) ∞; 4) $-\frac{p}{q}$.

5. Найти предел

$$\lim_{z\to 1}(1-z)tg\frac{\pi z}{2}$$

Ответы:

1) $\frac{2}{\pi}$; 2) ∞; 3) $-\pi$; 4) 0.

6. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left\{n\left[\ln(n+1)-\ln n\right]\right\}$$

Ответы:

1) e; 2) $\frac{1}{2}$; 3) 1; 4) ∞.

Вариант № 11

1. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+1}-2}{\sqrt[4]{2n^4+2}}$$

Ответы:

1) -2; 2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; 3) ∞; 4) 0.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$$

Ответы:

1) 1; 2) -5; 3) $\frac{1}{3}$; 4) 0.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$$

Ответы:

1) $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 3) 2; 4) 0.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{4x^2+1}-2x$$

Ответы:

1) 0; 2) ∞; 3) 2; 4) -2.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to\pi/3}\frac{1-2\cos x}{\sin(x-\frac{\pi}{3})}$$

Ответы:

1) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) 0; 3) $\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{3}$.

6. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}$$

Ответы:

1) 1; 2) e; 3) e^3; 4) $e^{\frac{2}{3}}$.

Вариант № 12

1. Найти предел

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$$

Ответы:

1) ∞; 2) $-\dfrac{1}{3}$; 3) $-\dfrac{2}{5}$; 4) $\dfrac{2}{5}$.

2. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n+\sqrt{n^2-3}}{\sqrt[3]{5n^5-1}}$$

Ответы:

1) $\dfrac{1}{5}$; 2) ∞; 3) $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$; 4) $\dfrac{2}{5}$.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$$

Ответы:

1) $\dfrac{2}{3}$; 2) 1; 3) 0; 4) -1.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$$

Ответы:

1) ∞; 2) 0; 3) $2\cos a$; 4) 2.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2})$$

Ответы:

1) $\dfrac{1}{2}$; 2) ∞; 3) -1; 4) 0.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\cos x)^{3\sec x}$$

Ответы:

1) $e^{-\frac{1}{3}}$; 2) e^3; 3) e^{-3}; 4) ∞.

Вариант № 13

1. Найти предел

$$\lim_{u\to -2}\frac{u^3+4u^2+4u}{u^2-u-6}$$

Ответы:

1) 1; 2) ∞; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) 0.

2. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+n}-1}{\sqrt{1-n}}$$

Ответы:

1) 0; 2) -1; 3) ∞; 4) 1.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$$

Ответы:

1) -1; 2) 0; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 2.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$$

Ответы:

1) 0; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 2.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(ax+1)}{x}$$

Ответы:

1) e^a; 2) a; 3) $\frac{1}{a}$; 4) $-a$.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$$

Ответы:

1) $\frac{5}{2}$; 2) ∞; 3) -5; 4) $-\frac{5}{2}$.

Вариант № 14

1. Найти предел

$$\lim_{n\to 0}\frac{(a+n)^3-a^3}{n}$$

Ответы:

1) n; 2) $3a^2$; 3) 0; 4) ∞.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt[7]{x^6-2x}-x}{x^4}$$

Ответы:

1) 0; 2) -1; 3) ∞; 4) 2.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

Ответы:

1) 1; 2) -1; 3) e; 4) ∞.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-x^2}{\sqrt{x}-1}$$

Ответы:

1) 1; 2) 3; 3) -1; 4) -3.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$$

Ответы:

1) 0; 2) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) 1; 4) $\sqrt{2}$.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+4x})$$

Ответы:

1) $-\frac{1}{2}$; 2) 0; 3) ∞; 4) -2.

Вариант № 15

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^2}\right)$$

Ответы:

1) 1; 2) 3; 3) 0; 4) -1.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2+x-1}}{x+\sqrt[3]{x-1}}$$

Ответы:

1) ∞; 2) 1; 3) $\sqrt{2}$; 4) 0.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$$

Ответы:

1) 0; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) -1; 4) 1.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+1}{3x^2-2}\right)^{\frac{x-1}{2}}$$

Ответы:

1) e; 2) 0; 3) 1; 4) ∞.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2xtgx-\frac{\pi}{\cos x})$$

Ответы:

1) 2; 2) -2; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to-\infty}x(\sqrt{2x^2+7}+2x)$$

Ответы:

1) $-\infty$; 2) -1,75; 3) 0; 4) 1,75.

Вариант № 16

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-4x+3)\sin(x-1)}{(x-1)^2}$$

Ответы:

1) 2; 2) 0; 3) -2; 4) ∞.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$$

Ответы:

1) $\sqrt{2}$; 2) 4; 3) 0; 4) $\frac{1}{2}$.

3. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{n+1}-\frac{2n+1}{2}\right]$$

Ответы:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $-\frac{1}{2}$; 3) ∞; 4) 2.

4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$$

Ответы:

1) 3; 2) 1; 3) 0; 4) -1.

5. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^x$$

Ответы:

1) 1; 2) e^{-1}; 3) ∞; 4) e.

6. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+1})$$

Ответы:

1) 1; 2) ∞; 3) 0; 4) -1.

Вариант 17

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{5-\sqrt{x+22}}{x^2-9}$$

Ответы:

1) ∞; 2) 0; 3) $-\frac{1}{60}$; 4) $\frac{1}{60}$.

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-6x+8}$$

Ответы:

1) $-\frac{7}{2}$; 2) $-\frac{5}{4}$; 3) $\frac{2}{7}$; 4) $\frac{7}{2}$.

3. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}(1+2\sin^2 5x)^{ctg^2 3x}$$

Ответы:

1) $e^{\frac{25}{9}}$; 2) 1 3) $e^{\frac{50}{9}}$; 4) $e^{\frac{9}{25}}$

4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{3x^2-2x+4}-\sqrt{5x^2+x-2})$$

Ответы:

1) $\frac{-2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$; 2) -$\infty$; 3) 0; 4) ∞

5. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2n^2+5n}}{\sqrt[5]{n^6-4n^3+1}}$$

Ответы:

1) ∞; 2) 0; 3) $\sqrt{2}$; 4) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x}{1-\cos 4x}$$

Ответы:

1) $\frac{1}{2}$; 2) $\frac{3}{4}$; 3) 0; 4) $\frac{9}{8}$

Вариант 18

1. Найти предел

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+12}-2x}{3x^2-12}$$

Ответы:

1) 0; 2) $-\frac{1}{8}$; 3) ∞; 4) $\frac{1}{8}$

2. Найти предел

$$\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-2x-21}{2x^2+3x-27}$$

Ответы:

1) $\frac{16}{15}$; 2) 1; 3) $\frac{15}{16}$; 4) 0

3. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-4}{5x+3}\right)^{2x-1}$$

Ответы:

1) $e^{\frac{14}{5}}$; 2) 1; 3) $e^{\frac{2}{5}}$; 4) $e^{-\frac{14}{5}}$

4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\sqrt{4x+1}-\sqrt{4x-2})$$

Ответы:

1) $-\frac{1}{4}$; 2) 0; 3) $\frac{3}{4}$; 4) ∞

5. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{27n^3-3n+1}}{\sqrt{16n-2}}$$

Ответы:

1) 0; 2) $\frac{3}{4}$; 3) ∞; 4) $-\frac{3}{4}$

6. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{arctg^2(2x)}{\ln(1+x^2-4x)}$$

Ответы:

1) 0; 2) $-0{,}5$; 3) ∞; 4) -2

Вариант 19

1. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n}-9n^2}{3n-\sqrt[4]{9n^8+1}}$$

Ответы:

1) $-\frac{9}{\sqrt{3}}$; 2) ∞; 3) 0; 4) $\frac{9}{\sqrt{3}}$

2. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(3-x)^2+(3+x)^2}{(3-x)^2-(3+x)^2}$$

Ответы:

1) 0; 2) -3; 3) ∞; 4) 9

3. Найти предел

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$$

Ответы:

1) $\frac{1}{4}$; 2) 4; 3) $-\frac{1}{4}$; 4) -4

4. Найти предел

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x(x-2)}-\sqrt{x^2-3}\right]$$

Ответы:

1) ∞; 2) -1; 3) 0; 4) $\frac{1}{3}$

5. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x}{1-\cos x}$$

Ответы:

1) 4; 2) 1; 3) 0,5 ; 4) 3

6. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2+4n-1}{4n^2+2n+3}\right)^{2n+1}$$

Ответы:

1) e; 2) e^{-2}; 3) e^2; 4) ∞

Вариант 20

1. Найти предел

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+2x-3}{x^3-4x^2+3x}$$

Ответы:

1) -5; 2) $-\dfrac{2}{3}$; 3) $\dfrac{3}{2}$; 4) 0

2. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$$

Ответы:

1) 1; 2) 2; 3) 0; 4) ∞

3. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^3+4}{x^3+9}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Ответы:

1) ∞; 2) 0; 3) e^{-1}; 4) e

4. Найти предел

$$\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x+2}$$

Ответы:

1) 12; 2) 0; 3) -3; 4) $\dfrac{1}{12}$

5. Найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2+1)}{1-\sqrt{x^2+1}}$$

Ответы:

1) -2; 2) 0; 3) 1; 4) 4

6. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt{n^4+3}-\sqrt{n^4-2})$$

Ответы:

1) 0; 2) ∞; 3) 5; 4) 1

Список использованной литературы

1. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. 4-е изд., стереотипное – СПб.: Издательство «Лань», 2001. – 736 с.
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. – 3-е изд., испр. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 432 с.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – 5-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2005. – 288 с.
4. Задачник-практикум по высшей математике: Множества. Функции. Предел. Непрерывность. Производная. Учеб. пособие / Под ред. В.А. Волкова. – Л.: Издательство Ленинградского университета, 1988. – 224 с.
5. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1966. – 466 с.