КЫРГЫЗСКО- РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

И. А. УСЕНОВ, Р.К. УСЕНОВА

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

ЛЕКЦИИ ПО КУРСУ МАТЕМАТИКИ

Бишкек-2011

УДК 512.643(575.2) (075)

Рецензенты:

канд. пед. наук, доц. Ж.Р. Жаналиева,

канд. ф.-м. наук, доц. А.К. Курманбаева

Рекомендовано к изданию УС ЕТФ КРСУ

Усенов И.А., Усенова Р.К.

У 74 ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ. Лекции по курсу математика: Бишкек: КРСУ, 2011. 86 с.

Содержатся теоретические сведения по линейной алгебре. Основные внимание уделяется матрицам, определителям и системам линейных уравнений, а также практическому освоению студентами материала. Для достижения этой цели приводиться большое число упражнений.

Пособие предназначено для студентов 1-2 курсов экономических специальностей очной, заочной и дистантной форм обучения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие “Высшая математика для экономистов” включает такие разделы высшей математики, изучение которых дает математический аппарат, наиболее активно применяемый для решения прикладных экономических и управленческих задач. Это аналитическая геометрия, линейная алгебра и математический анализ.

В разделе “Линейная алгебра” основное внимание уделяется матрицам, определителям и системам линейных уравнений, поскольку в экономических исследованиях широко используются различные матричные модели - межотраслевого баланса, в плановых расчетах, при расчетах фонда заработной платы и т.д. Линейные модели, сводящиеся к системам алгебраических линейных уравнений или неравенств, с достаточно высокой точностью соответствуют описываемым ими явлениям; с их помощью решаются многие управленческие задачи.

В начале каждого параграфа приводятся краткие сведения из теории. Основное внимание уделяется практическому освоению студентами изучаемого материала. Для достижения этой цели приводится большое число примеров. Их выполнение будет способствовать выработке навыков рационального решения типовых примеров и задач, а также задач экономического и производственного содержания, развивающих навыки применения изученного математического инструментария.

Глава 1. **МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ**

§ 1.1 Матрицы

1. Понятие матрицы. Понятия матрицы и основанный на нем раздел математики- матричная алгебра – имеют важное значение для экономистов. Так, как значительная часть математических моделей экономических объектов и процессов записывается в достаточно простой и компактной матричной форме.

Прямоугольная таблица чисел

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

содержащая m строк и n столбцов, называется *матрицей размеров* $m \times n$. Числа a_{ij} называются *элементами матрицы*. Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами: первый индекс указывает номер строки, второй – номер столбца, в которых расположен этот элемент. В дальнейшем будем обозначать матрицы большими буквами латинского алфавита: A, B и т.д.

Часто вместо подробной записи (1) употребляют сокращенную: $A = \left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{m,n}$ или даже $A = \left(a_{ij}\right)$.

Две матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ и $B = \left(b_{ij}\right)$ считаются *равными*, если совпадают их размеры и $a_{ij} = b_{ij}$ при любых i и j.

С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости. Например, таблица распределения ресурсов по отдельным отраслям экономики

Ресурсы	Отрасли экономики	
	промышленность	сельское хозяйство
Электроэнергия	5.6	6.8
Трудовые ресурсы	2.9	3.4
Водные ресурсы	6.7	4.8

может быть записана в компактной форме в виде матрицы распределения ресурсов по отраслям:

$$\underset{3x2}{A} = \begin{pmatrix} 5.6 & 6.8 \\ 2.9 & 3.4 \\ 6.7 & 4.8 \end{pmatrix}.$$

В этой записи, например, матричный элемент, $a_{11} = 5.6$ показывает, сколько электроэнергии потребляет промышленность, а элемент $a_{22} = 3{,}4$ - сколько трудовых ресурсов потребляет сельское хозяйство.

2. Квадратные матрицы. Если число строк матрицы равно числу ее столбцов, то матрица называется *квадратной*, а число n ее строк (равное числу столбцов) – *порядком* квадратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональ $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ квадратной матрицы называется *главной диагональю*, а диагональ $a_{1n}, a_{2,n-1}, ..., a_{n1}$ – *побочной диагональю*.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если все ее элементы, которые находятся ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю, т.е. треугольная матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

При этом матрицу A называют *верхнетреугольной*, а матрицу B – *нижнетреугольной*.

3. Действия с матрицами.

1) Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу $A = (a_{ij})$ на число λ, нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число: $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

2) Сложение матриц(Вычитание матриц). Складывать (Вычитать) можно только матрицы с одинаковым числом строк и столбцов, т.е. матрицы одинаковых размеров. Суммой (Разностью) матриц $A=\left(a_{ij}\right)$ и $B=\left(b_{ij}\right)$ называется матрица $C=\left(c_{ij}\right)$, элементы которой равны суммам (разностью) соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$ для любых индексов i, j.

3) Умножение матриц. Произведение матрицы A на матрицу B (обозначается AB) определено только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В результате умножения получим матрицу $C=AB$, у которой столько же строк, сколько их в матрице A, и столько же столбцов, сколько их в матрице B. Для удобства запоминания запишем это кратко:

$$\underbrace{A\cdot B=C}_{(m\times n)(n\times k)=m\times k}$$

Если $A=\left(a_{ij}\right)$, $B=\left(b_{ij}\right)$ и $C=AB=\left(c_{ij}\right)$, то элементы c_{ij} определяются следующим образом:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+...+a_{in}b_{nj}=\sum_{p=1}^{n}a_{ip}b_{pj}, \qquad (2)$$

где $i=1,2,...,m;\ j=1,2,...,k$.

Это правило можно сформулировать и словесно: элемент c_{ij}, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы $C=AB$, равен сумме попарных произведений соответствующих элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. Другими словами, элемент c_{ij} является результатом скалярного произведения i-й вектор-строки и j-го вектор-столбца.

В качестве примера применения указанного правила приведем формулу перемножения квадратных матриц 2-го порядка:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что оба произведения AB и BA можно определить лишь в том случае, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B, а число строк матрицы A совпадает с числом столбцов матрицы B. А именно, матрица A имеет размеры $m \times n$, а B – размеры $n \times m$. При этом, вообще говоря, $AB \neq BA$, например: пусть даны матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Их произведение

$$AB=\begin{pmatrix} 11 & 6 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}, \qquad BA=\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 6 & 7 & 3 \\ 10 & 10 & 4 \end{pmatrix}.$$

Следовательно $AB \neq BA$.

Из формулы (2) вытекают следующие свойства умножения матриц:

1) $(AB)C = A(BC)$ (ассоциативность умножения);

2) $(A+B)C = AC + BC$ или

$A(B+C) = AB + AC$ (дистрибутивность умножения относительно сложения).

4) Транспонирование матрицы. Наряду с матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

часто приходится рассматривать матрицу, столбцами которой являются строки матрицы A (т.е. столбцы и строки меняются местами). Эта матрица называется *транспонированной* к A и обозначается через A^T:

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Например. Если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ то $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5) Возведение в степень. Целой положительной степенью A^n $(n>1)$ квадратной матрицы A называется произведение n матриц, равных A т.е.

$$A^n = \underbrace{A \quad A \quad \ldots \quad A}_{n-раз}.$$

По определению имеем $A^0 = E$, $A^1 = A$. Нетрудно показать, что

$$A^n A^k = A^{n+k}, \quad \left(A^n\right)^k = A^{nk}.$$

Например. Найти A^2, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$.

Пример1. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем: матрица A размера 2×3, матрица B размера 3×3, тогда произведение $AB = C$ существует и элементы матрицы C равны

$c_{11} = 1\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3 = 8$, $c_{21} = 3\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3 = 5$, $c_{12} = 1\cdot 2 + 2\cdot 0 + 1\cdot 5 = 7$,

$c_{22} = 3\cdot 2 + 1\cdot 0 + 0\cdot 5 = 6$, $c_{13} = 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot 4 = 9$, $c_{23} = 3\cdot 3 + 1\cdot 1 + 0\cdot 4 = 10$.

$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 9 \\ 5 & 6 & 10 \end{pmatrix},$$

а произведение BA не существует.

Пример 2. В таблице указано количество единиц продукции, отгружаемой ежедневно на молокозаводах 1 и 2 в магазины M_1, M_2 и M_3, причем

доставка единицы продукции с каждого молокозавода в магазин M_1 стоит 50 ден. ед., в магазин M_2 - 70, а в M_3 - 130 ден. ед. Подсчитать ежедневные транспортные расходы каждого завода.

Молокозавод	Магазин		
	M_1	M_2	M_3
1	*20*	*35*	*10*
2	*15*	*27*	*8*

Решение. Обозначим через А матрицу, данную нам в условии, а через В - матрицу, характеризующую стоимость доставки единицы продукции в магазины, т.е.

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix},\ B = (50,\ 70,\ 130).$$

Тогда матрица затрат на перевозки будет иметь вид:

$$AB^T = \begin{pmatrix} 20 & 35 & 10 \\ 15 & 27 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 70 \\ 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20\cdot 50 + 35\cdot 70 + 10\cdot 130 \\ 15\cdot 50 + 27\cdot 70 + 8\cdot 130 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4750 \\ 3680 \end{pmatrix}.$$

Итак, первый завод ежедневно тратит на перевозки 4750 ден. ед., второй - 3680 ден.ед.

Пример 3. Швейное предприятие производит зимние пальто, демисезонные пальто и плащи. Плановый выпуск за декаду характеризуется вектором $\boldsymbol{X} = (10,\ 15,\ 23)$. Используются ткани четырех типов T_1, T_2, T_3, T_4. В таблице приведены нормы расхода ткани (в метрах) на каждое изделие. Вектор $\boldsymbol{C} = (40,\ 35,\ 24,\ 16)$ задает стоимость метра ткани каждого типа, а вектор $\boldsymbol{P} = (5,\ 3,\ 2,\ 2)$ - стоимость перевозки метра ткани каждого вида.

Изделие	Расход ткани			
	T_1	T_2	T_3	T_4
Зимнее пальто	*5*	*1*	*0*	*3*
Демисезонное пальто	*3*	*2*	*0*	*2*
Плащ	*0*	*0*	*4*	*3*

1. Сколько метров ткани каждого типа потребуется для выполнения плана?
2. Найти стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида.
3. Определить стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана.
4. Подсчитать стоимость всей ткани с учетом ее транспортировки.

Решение. Обозначим через А матрицу, данную нам в условии, т. е.

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

тогда для нахождения количества метров ткани, необходимой для выполнения плана, нужно вектор $\boldsymbol{X}$ умножить на матрицу A:

$$\boldsymbol{X}A = (10,15,\ 23)\begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \left(10\cdot5+15\cdot3, 10\cdot1+15\cdot2, 23\cdot4, 10\cdot3+15\cdot2+23\cdot3\right) =$$

$= (95,\ 40,\ 92,\ 129).$

Стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида, найдем, перемножив матрицу А и вектор $\boldsymbol{C}^T$:

$$A\,\boldsymbol{C}^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ 35 \\ 24 \\ 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot40+1\cdot35+0\cdot24+3\cdot16 \\ 3\cdot40+2\cdot35+0\cdot24+2\cdot16 \\ 0\cdot40+0\cdot35+4\cdot24+3\cdot16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 283 \\ 222 \\ 144 \end{pmatrix}.$$

Стоимость всей ткани, необходимой для выполнения плана, определится по формуле:

$$\boldsymbol{X}A\,\boldsymbol{C}^T = (10,15,23)\begin{pmatrix} 283 \\ 222 \\ 144 \end{pmatrix} = 10\cdot283+15\cdot222+23\cdot144 = 9472.$$

Наконец, с учетом транспортных расходов вся сумма будет равна стоимости ткани, т. е. 9472 ден. ед., плюс величина

$$\boldsymbol{X}A\,\boldsymbol{P}^T = (95,\ 40,\ 92,\ 129)\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 95\cdot5+40\cdot3+92\cdot2+129\cdot2 = 1037.$$

Итак,

$$\boldsymbol{X}A\,\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{X}A\,\boldsymbol{P}^T = 9472 + 1037 = 10509 \text{ (ден. ед)}.$$

§ 1.2 Определители

Каждой квадратной матрице A может быть поставлено в соответствие некоторое число, вычисляемое по определенному правилу с помощью элементов матрицы. Такое число называют *определителем* (или *детерминантом*) матрицы A и обозначают символом $|A|$ или $\det A$. При этом *порядком* определителя называют порядок соответствующей матрицы.

Правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков легко выписать:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Последнюю формулу, несмотря на внешнюю сложность записи, нетрудно запомнить. Если соединить линией каждые три элемента определителя, произведение которых входит в правую часть последней формулы со знаком «+», то получим легко запоминающуюся *схему 1*. Аналогично для произведений, входящих со знаком «–», имеем *схему 2*.

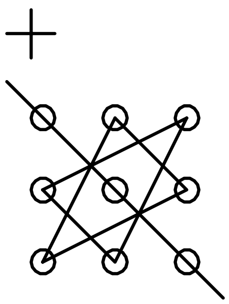


Схема 1

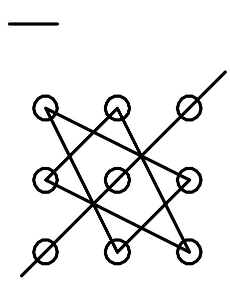


Схема 2

Это правило вычисления определителей 3-го порядка называется правилом треугольников.

Прежде, чем сформулировать определение определителя n-го порядка, рассмотрим одно вспомогательное понятие.

1. Перестановки. *Перестановкой* чисел $(1,2,...,n)$ называют расположение этих чисел в каком-либо определенном порядке (не обязательно в порядке возрастания). Например, $(3,2,1,4)$ – одна из возможных перестановок чисел $(1,2,3,4)$.

Число различных перестановок, которые можно составить из чисел $(1,2,...,n)$, равно произведению $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n = n!$ (читается: «n факториал»).

Пусть дана какая-то перестановка $J=(j_1, j_2,..., j_n)$ чисел $(1,2,...,n)$. Назовем *инверсией* (или *беспорядком*) в перестановке J любую пару чисел в этой перестановке, из которых большее число расположено левее меньшего.

Пример 1. В перестановке $(3,2,1,4)$ имеются 3 инверсии: их образуют пары $(3,2)$, $(3,1)$, $(2,1)$.

Условимся обозначать общее число инверсий в перестановке J символом $\sigma(J)$. Перестановка J называется *четной*, если число $\sigma(J)$ – четное, и *нечетной*, если число $\sigma(J)$ – нечетное.

Так в рассмотренном выше примере перестановка содержала 3 инверсии и, следовательно, является нечетной. Заметим, что перестановка $(1,2,...,n)$ не содержит ни одной инверсии, иначе говоря, содержит 0 инверсий. Следовательно, эта перестановка является четной.

2. Определитель n-го порядка. Определителем n-го порядка (или определителем матрицы n-го порядка) называется число, равное

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_J (-1)^{\sigma(J)} a_{1j_1} a_{2j_2} ... a_{nj_n}, \qquad (4)$$

где суммирование распространяется на все перестановки $J=(j_1, j_2,..., j_n)$, которые можно составить из чисел $(1,2,...,n)$. Количество слагаемых в правой части равенства (4) равно $n!$, так как количество всех перестановок множества из n элементов равно $1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n = n!$

Упражнение 1. В качестве примеров применения общей формулы (4) рассмотрите формулы для вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.

3. Свойства определителей. Сформулируем без доказательства ряд свойств, которыми обладает произвольный определитель n-го порядка.

1) *Свойство равноправности строк и столбцов.* При транспонировании величина определителя сохраняется, т.е. $\left|A^T\right| = |A|$.

Это свойство означает полную равноправность строк и столбцов и позволяет нам все последующие свойства формулировать лишь для строк и быть уверенными в справедливости их и для столбцов.

2) При перестановке местами 2-х строк определитель сохраняет свою абсолютную величину, но меняет знак на противоположный.

3) *Линейное свойство определителя.* Если все элементы i-ой строки определителя n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых

$$a_{ij} = \lambda\, a'_{ij} + \mu\, a''_{ij} \qquad (j = 1,2,\dots,n),$$

то исходный определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у которых элементами i-й строки являются соответственно a'_{ij} и a''_{ij} $(j = 1,2,\dots,n)$, а все остальные строки – такие же, как у исходного определителя. При этом определители умножаются на λ и μ соответственно:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a'_{i1} + \mu a''_{i1} & \dots & \lambda a'_{in} + \mu a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a'_{i1} & \dots & a'_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a''_{i1} & \dots & a''_{in} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Конечно линейное свойство справедливо и для случая, когда i-я строка является линейной комбинацией не двух, а нескольких строк. На этот случай (любого конечного числа слагаемых) сформулированное свойство обобщается индукцией по числу слагаемых.

Приведенные три свойства являются *основными* свойствами определителя. Все следующие свойства являются логическими следствиями трех основных свойств.

4) Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

В самом деле, при перестановке двух одинаковых строк, с одной стороны, определитель Δ не изменится, а с другой стороны, в силу свойства 2 изменит свой знак на противоположный. Таким образом, $\Delta = -\Delta$, т.е. $2\Delta = 0$ или $\Delta = 0$.

5) Умножение всех элементов некоторой строки определителя на число λ равносильно умножению определителя на это число λ.

Иными словами, общий множитель всех элементов некоторой строки определителя можно вынести за знак этого определителя. Это свойство вытекает из свойства 3 при $\mu = 0$.

6) Если все элементы некоторой строки определителя равны нулю, то и сам определитель равен нулю.

Это свойство вытекает из свойства 5 при $\lambda = 0$.

7) Если элементы двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

В самом деле, в силу свойства 5 множитель пропорциональности можно вынести за знак определителя, после чего останется определитель с двумя одинаковыми строками, который равен нулю согласно свойству 4.

8) Если к элементам некоторой строки определителя прибавить соответствующие элементы другой строки, умноженные на произвольный множитель λ, то величина определителя не изменится.

В самом деле, полученный в результате указанного прибавления определитель можно в силу свойства 3 разбить на сумму двух определителей, первый из которых совпадает с исходным, а второй равен нулю в силу пропорциональности двух строк и свойства 7.

9) *Определитель произведения матриц*. Если $C = AB$, где A и B – квадратные матрицы (одинакового порядка), то $|C| = |A| \cdot |B|$.

4. Вычисление определителей n-го порядка. Пусть дана матрица A n-го порядка. *Минором* любого элемента a_{ij} называют определитель порядка $n-1$, соответствующий той матрице, которая получается из матрицы A в результате вычеркивания i-й строки и j-го столбца (т.е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}). Минор элемента a_{ij} будем обозначать символом M_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называют минор M_{ij} этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Теорема. *Определитель матрицы A n-го порядка равен сумме произведений всех элементов какой-нибудь одной фиксированной строки на их алгебраические дополнения, т.е. для любого $i = 1,2,...,n$ имеет место равенство*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in},$$

называемое разложением определителя $|A|$ по элементам i-й строки.

Аналогично для $k = 1,2,...,n$ имеет место разложение определителя $|A|$ по элементам k-го столбца:

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + ... + a_{nk}A_{nk}.$$

Пример 2. Не вычисляя определителя

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

показать, что он равен нулю.

Решение. Вычтем из второй строки первую, получим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix},$$

равный исходному. Если из третьей строки также вычесть первую, то получится определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix},$$

в котором две строки пропорциональны. Такой определитель равен нулю.

Пример 3. Вычислить определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 5 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

разложив его по элементам второго столбца.

Решение. Разложим определитель по элементам второго столбца:

$D = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} =$

$$= (-2)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 5\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -20.$$

Пример 4. Вычислить определитель

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \; \ldots \; 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \; \ldots \; 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots \; 0 \\ \text{- - - - -} & \text{- - - - -} & \text{- - - - -} \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix},$$

в котором все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю.

Решение. Разложим определитель A по первой строке:

$$A = a_{11}A_{11} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & 0 \; \ldots \; 0 \\ a_{32} & a_{33} \ldots 0 \\ \text{- - - - -} & \text{- - - - -} \\ a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель, стоящий справа, можно снова разложить по первой строке, тогда получим:

$$A = a_{11}\cdot a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & 0 \; \ldots \; 0 \\ a_{43} & a_{44} \ldots 0 \\ \text{- - - - -} & \text{- - - - -} \\ a_{n3} & a_{n4} \ldots a_{nn} \end{vmatrix}.$$

И так далее. После n шагов придем к равенству $A = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn}$.

Пример 5. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Если к каждой строке определителя, начиная со второй, прибавить первую строку, то получится определитель, в котором все элементы, находящиеся, ниже главной диагонали, будут равны нулю. А именно, получим определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix},$$

равный исходному.

Рассуждая, как в предыдущем примере найдем, что он равен произведению элементов главной диагонали, т.е. n!. Способ, с помощью которого вычислен данный определитель, называется способом приведения к треугольному виду.

<u>Упражнение 2</u>. Вычислите каждый из следующих определителей двумя способами (с помощью правила треугольников и с помощью разложения по элементам строки или столбца):

а) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$.

5**. Обратная матрица.** Среди квадратных матриц одного и того же порядка (например, порядка n, т.е. размеров $n \times n$) важную роль играет матрица вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

которую называют *единичной* матрицей. Легко проверить, что для любой матрицы A n-го порядка имеют место равенства

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Эти равенства показывают особую роль единичной матрицы E, аналогичную той роли, которую играет число 1 при перемножении вещественных чисел.

Как известно, для каждого числа $a \neq 0$ существует такое число b, что $ab = 1$. Число b называется обратным для a. Если мы зафиксируем натуральное число n и будем рассматривать квадратные матрицы n-го порядка, то в этом множестве матриц единичная матрица E будет играть роль единицы. Естественно поставить вопрос о существовании обратной матрицы, т.е. такой матрицы, которая в произведении с данной матрицей дает единичную матрицу.

Определение. Пусть A – квадратная матрица n-го порядка. Квадратная матрица B (того же порядка n) называется обратной для A, если $AB = BA = E$. Матрицу, обратную к матрице A, принято обозначать символом A^{-1}.

Если для квадратной матрицы A существует обратная матрица A^{-1}, то справедливо равенство $AA^{-1} = E$, где E – единичная матрица. Переходя в этом равенстве к определителям (и учитывая свойство 9 определителей), имеем $|A| \cdot |A^{-1}| = |E|$, или $|A| \cdot |A^{-1}| = 1$. Отсюда заключаем, что $|A| \neq 0$ (в противном случае левая часть последнего равенства равнялась бы нулю). Этим доказано, что если $|A| = 0$, то для матрицы A не существует обратной. Другими словами, условие $|A| \neq 0$ является необходимым условием существования обратной матрицы. Оказывается, это условие является и достаточным.

Определение. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю ($|A| \neq 0$). В противном случае матрица A называется вырожденной ($|A| = 0$).

Пусть матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Теорема. *Если A – невырожденная матрица, то для нее существует обратная матрица A^{-1}, которая вычисляется по формуле*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение для элемента a_{ij} матрицы A.

Замечание. Обратим внимание на расположение чисел A_{ij} в правой части формулы (5): число A_{ij} расположено не в i-й строке и j-м столбце, а наоборот, в j-й строке и i-м столбце. Таким образом, матрица, стоящая в правой части (5), является транспонированной матрицей алгебраических дополнений элементов матрицы A. Матрица, составленная из алгебраических дополнений, называется присоединенной матрицей. Следовательно, нахождение обратной матрицы с помощью формулы (5) называется *методом присоединенной матрицы*.

Если матрица немалого размера, то нахождение обратной матрицы методом присоединенной матрицы составляет практическое неудобство, т.е. требует больше вычислений. В этом случае используется другой метод, который называется методом элементарных преобразований или методом Гаусса.

Метод элементарных преобразований (метод Гаусса) вычисления обратной матрицы к невырожденной матрице А состоит в следующем. Приписывая справа к матрице *A* размера *n x n* единичную матрицу размера *n x n*, получим прямоугольную матрицу $\Gamma = (A/\mathrm{E})$ размера *n x2 n.* С помощью элементарных преобразований над строками матрицы Γ сначала приведем ее к ступенчатому виду $\Gamma_1 = (A_1/\mathrm{B})$, где матрица A_1- треугольная, а затем к виду $\Gamma_2 = (E/\mathrm{A}^{-1})$.

Пример 6. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

найти обратную матрицу.

Решение. Находим сначала детерминант матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 27 \neq 0,$$

значит, обратная матрица существует, и мы ее можем найти по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} *(i,j=1,2,3)* - алгебраические дополнения элементов a_{ij} исходной матрицы. Имеем:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(4+2) = -6,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-4-2) = 6,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6.$$

Откуда

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 3 \\ -6 & 3 & 6 \\ 3 & -6 & 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Пример 7. Методом элементарных преобразований найти обратную матрицу для матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Приписываем к исходной матрице справа единичную матрицу того же порядка:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований столбцов приведем левую “половину” к единичной, совершая одновременно точно такие преобразования над правой матрицей. Для этого поменяем местами первый и второй столбцы:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

К третьему столбцу прибавим первый, а ко второму - первый, умноженный на -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Из первого столбца вычтем удвоенный второй, а из третьего - умноженный на 6 второй;

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 & 13 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Прибавим третий столбец к первому и второму:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & 13 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Умножим последний столбец на -1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -8 & -5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 18 & 11 & -13 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Полученная справа от вертикальной черты квадратная матрица является обратной к данной матрице А. Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

или

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -8 & -5 & 6 \\ 18 & 11 & -13 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

<u>Упражнение 3</u>. Найти обратные матрицы для следующих матриц и проверить результат:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Ранг матрицы. Ранее для квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ n-го порядка было введено понятие минора M_{ij} элемента a_{ij}. Напомним, что так был назван определитель порядка $n-1$, полученный из определителя $|A|$ вычеркиванием i-й строки и j-го столбца.

Введем теперь общее понятие минора. Рассмотрим некоторую, *не обязательно квадратную* матрицу A. Выберем какие-нибудь s номеров строк $i_1, i_2, ..., i_s$ и s номеров столбцов $j_1, j_2, ..., j_s$.

<u>Определение</u>. *Минором порядка* s матрицы A (соответствующим выбранным строкам и столбцам) называется определитель порядка s,

образованный элементами, стоящими на пересечении выбранных строк и столбцов, т.е. число

$$M^{i_1\dots i_s}_{j_1\dots j_s}=\begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_s} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i_sj_1} & a_{i_sj_2} & \dots & a_{i_sj_s} \end{vmatrix}.$$

Каждая матрица имеет столько миноров данного порядка s, сколькими способами можно выбрать номера строк $i_1, i_2, \dots, i_s$ и столбцов $j_1, j_2, \dots, j_s$.

<u>Определение</u>. В матрице A размеров $m \times n$ минор порядка s называется *базисным*, если он отличен от нуля, а все миноры порядка $s+1$ равны нулю или миноров порядка $s+1$ вообще нет, т.е. s совпадает с меньшим из чисел m или n.

Ясно, что в матрице может быть несколько разных базисных миноров. Все базисные миноры имеют один и тот же порядок. Действительно, если все миноры порядка $s+1$ равны нулю, то равны нулю и все миноры порядка $s+2$, а, следовательно, и всех больших порядков. Это становится очевидным, если разложить минор порядка $s+2$ по элементам какой-либо строки (столбца): все миноры элементов этой строки являются определителями порядка $s+1$, а поэтому равны нулю.

<u>Определение</u>. *Рангом матрицы* называется порядок базисного минора, или, иначе, самый большой порядок, для которого существуют отличные от нуля миноры. Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг такой матрицы, по определению, считают нулем.

Ранг матрицы A будем обозначать символом $r(A)$. Из определения ранга следует, что для матрицы A размеров $m \times n$ справедливо соотношение $0 \le r(A) \le \min(m,n)$.

Два способа вычисления ранга матрицы.

а) *Метод окаймляющих миноров*

Пусть в матрице найден минор M_k k-го порядка, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется. Ясно, что перебирать таким способом миноры в поисках базисного – задача, связанная с большими вычислениями, если размеры матрицы не очень малы. Существует, однако, более простой способ нахождения ранга матрицы – при помощи элементарных преобразований.

б) *Метод элементарных преобразований*

Определение. *Элементарными преобразованиями матрицы* называют следующие преобразования:

1) умножение строки на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одной строке другой строки;
3) перестановку строк;
4) такие преобразования столбцов.

Преобразования 1 и 2 выполняются поэлементно.

Комбинируя преобразования первого и второго вида, мы можем к любой строке прибавить линейную комбинацию остальных строк.

Теорема. *Элементарные преобразования не меняют ранга матрицы.*

Идея практического метода вычисления ранга матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

заключается в том, что с помощью элементарных преобразований данную матрицу A приводят к виду

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1r} & b_{1,r+1} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & b_{2r} & b_{2,r+1} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_{rr} & b_{r,r+1} & \dots & b_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

в котором «диагональные» элементы $b_{11}, b_{22}, ..., b_{rr}$ отличны от нуля, а элементы, расположенные ниже «диагональных», равны нулю. Условимся называть матрицу B такого вида треугольной (иначе, ее называют диагональной, трапециевидной или лестничной). После приведения матрицы A к треугольному виду можно сразу записать, что $r(A) = r$.

В самом деле, $r(A) = r(B)$ (т.к. элементарные преобразования не меняют ранга). Но у матрицы B существует отличный от нуля минор порядка r:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1r} \\ 0 & b_{22} & ... & b_{2r} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & b_{rr} \end{vmatrix} = b_{11} \cdot b_{22} \cdot ... \cdot b_{rr} \neq 0,$$

а любой минор порядка $r+1$ содержит нулевую строку и поэтому равен нулю.

Сформулируем теперь практическое *правило вычисления ранга* матрицы A с помощью элементарных преобразований: для нахождения ранга матрицы A следует с помощью элементарных преобразований привести ее к треугольному виду B. Тогда ранг матрицы A будет равен числу ненулевых строк в полученной матрице B.

Пример 8. Найти методом окаймления миноров ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

Решение. Начинаем с миноров 1-го порядка, т.е. с элементов матрицы А. Выберем, например, минор (элемент) $M_1 = 1$, расположенный в первой строке и первом столбце. Окаймляя при помощи второй строки и третьего столбца, получаем минор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix},$$

отличный от нуля. Переходим теперь к минорам 3-го порядка, окаймляющим M_2. Их всего два (можно добавить второй столбец или четвертый).

Вычисляем их:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0 .$$

Таким образом, все окаймляющие миноры третьего порядка оказались равными нулю. Ранг матрицы A равен $r(A) = 2$.

Пример 9. Найти методом элементарных преобразований ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & -1 & -3 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}$$

и привести ее к каноническому виду.

Решение. Из второй строки вычтем первую и переставим эти строки:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & -3 & -2 \\ 5 & 6 & -1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Теперь из второй и третьей строк вычтем первую, умноженную соответственно на 2 и 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \end{pmatrix};$$

из третьей строки вычтем первую; получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 9 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая эквивалентна матрице А, так как получена из нее с помощью конечного множества элементарных преобразований. Очевидно, что ранг матрицы В равен $r(B) = 2$, а следовательно, и $r(A) = 2$.

Матрицу В легко привести к канонической вид. Вычитая первый столбец, умноженный на подходящие числа, из всех последующих, обратим в нуль все элементы первой строки, кроме первого, причем элементы остальных строк не изменяются. Затем, вычитая второй столбец, умноженный на подходящие числа, из всех последующих, обратим в нуль все элементы второй строки, кроме второго, и получим каноническую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Упражнение 4. Найти методом элементарных преобразований и методом окаймления миноров ранг матрицы и сравнит результат

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 & -1 \\ -3 & -1 & 3 & 2 \\ -8 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

§ 1.3 Понятие вектора. Векторы в экономике

Упорядоченный набор чисел, называется вектором. Например, следующие наборы чисел *(-2, 1), (3, 0, 2), (5, 3, -1, 3)* есть векторы. Векторы вкратце записывают одной буквой. Например, *A=(-2, 1), B=(3, 0, 2), C=(5, 3, -1, 3).* Число задающие вектор называют компонентами или координатами вектора. Например, в векторе *B=(3, 0, 2)* число 3 есть 1-я компонента, число 0 – 2-я, число 2 – 3-я компонента. Число компонент вектора называется его размерностью. Например, выше записанный вектор *A* – двумерный, *B* – трехмерный, *C*– четырехмерный векторы.

n-мерный вектор – это упорядоченный набор из *n* чисел. В общем виде *n*-мерный вектор записывается в виде

$$A=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)$$

Из одних и тех же чисел можно образовать различные векторы. Например, из чисел 2, 1, 6 можно образовать векторы $A_1=(2, 1, 6)$, $A_2=(2, 6, 1)$, $A_3=(1, 2, 6)$, $A_4=(6, 1, 2)$. Поэтому в данном векторе менять, местами компоненты (координаты) нельзя. Иногда в обозначении вектора используют символы $\vec{A}, \vec{B}, \vec{a}, \vec{b}$ и т.д.

Векторы широко используются в экономике. Пусть некая фирма выпускает три вида продукции. За год продукция 1-го вида выпущена 5 тыс.

штук, 2-го – 3 тыс. штук, а 3-го вида на 7 тыс. штук. Тогда валовой выпуск за год можно записать в виде вектора $A=(5, 3, 7)$.

Пусть произведенная продукция 1-го вида реализуется по 100 сомов за штуку, 2-го по 150 сомов, а 3-го по 80 сомов за штуку. Тогда набор $P=(100, 150, 80)$ есть вектор цен.

Вектор, все координаты которого равны нулю называется нулевым и обозначается $0 = (0, 0, \ldots, 0)$. Таким образом векторы можно записать в виде строки $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ или в виде столбца

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Строчная запись вектора можно перевести в столбцовую запись и наоборот.

Такая операция называется транспонированием вектора и обозначения символом A^T.

Если

$$A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

то

$$A^T=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \ldots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Если

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то

$$B^T=(b_1, b_2, \ldots, b_n).$$

Легко видеть, что $(A^T)^T=A$

Глава 2. **СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

§ 2.1 Системы линейных уравнений

1. Общие понятия. Линейным (относительно неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$) называют алгебраическое уравнение первой степени, т.е. уравнение вида $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$, где $a_1, ..., a_n, b$ – числа. Причина такого названия в том, что уравнение первой степени с двумя переменными $ax + by = c$ определяет на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат прямую линию.

Система m линейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (6)$$

В общем случае число уравнений в системе не обязательно совпадает с числом неизвестных: m может быть меньше, равно или больше числа n.

Числа a_{ij} (вещественные или комплексные) называются *коэффициентами системы* (6); b_i – *свободными членами*; $x_1, x_2, ..., x_n$ – *неизвестными*.

Систему (6) можно записать в матричной форме:

$$A\,X = B,$$

где $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Если $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$, то система называется *однородной*, в противном случае она называется *неоднородной*.

Определение. Совокупность n чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называется *решением* системы (6), если после замены неизвестных $x_1, x_2, ..., x_n$ числами $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ соответственно каждое из уравнений системы превращается в верное равенство.

Пример 1. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ 2x+2y+2z=3. \end{cases}$$

Эта система 2-х уравнений с тремя неизвестными решений не имеет, так как любая тройка чисел, удовлетворяющая первому уравнению, не может удовлетворять второму.

Пример 2. Система

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+7y=-3. \end{cases}$$

имеет единственное решение $x=2$, $y=-1$.

Пример 3. Рассмотрим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 2x+2y=2, \\ 3x+3y=3. \end{cases}$$

Пара чисел $(1;0)$ есть одно из решений этой системы трех уравнений с двумя неизвестными, $(-1;2)$ – другое решение. Эта система имеет бесконечно много решений: значения $x=C$, $y=1-C$ при любом действительном значении C удовлетворяют данной системе.

Рассмотренные примеры систем линейных уравнений показывают, что, вообще говоря, система может либо вовсе не иметь решений, либо иметь единственное решение, либо иметь их несколько (в последнем случае, оказывается, система всегда имеет бесконечное множество решений).

Определение. Система линейных уравнений, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*. Система, обладающая хотя бы одним решением, называется *совместной*.

Относительно каждой системы линейных уравнений могут быть поставлены следующие вопросы:

1) Совместна заданная система или нет?

2) В случае, если система совместна, как определить, сколько она имеет решений – одно или несколько?

3) Как найти все решения системы?

Ответ на все эти вопросы дает теория систем линейных уравнений.

2. Правило Крамера. Ограничимся сначала рассмотрением систем, у которых число уравнений равно числу неизвестных (такие системы называют *квадратными*).

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (7)$$

Определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы* (7).

<u>Теорема</u>. *Если определитель Δ квадратной системы (6) отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение. Это решение может быть найдено по формулам*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где Δ_k – определитель, получаемый из определителя Δ заменой k-го столбца на столбец свободных членов.

Формулы для неизвестных носят название формул Крамера.

Пример 4. Решить систему уравнений по формуле Крамера

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 9, \\ 7x_1 + 8x_2 \qquad = -6. \end{cases}$$

Вычислим основной определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27.$$

Так, как $\Delta \neq 0$ то решение системы существует и единственно. Найдем дополнительные определители системы

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -54, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 27, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 54.$$

Отсюда по формуле Крамера получаем решение системы уравнений

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-54}{27} = -2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2.$$

3. Матричный метод. Если матрица А системы линейных уравнений невырожденная, т.е. $\det A \neq 0$, то матрица А имеет обратную матрицу, и решение системы (7) совпадает с вектором $C = A^{-1}B$. Иначе говоря, данная система имеет единственное решение. Отыскание решения системы по формуле $X = C$, $C = A^{-1}B$ называют *матричным способом решения системы,* или *решением по методу обратной матрицы*.

Пример 5. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

Решение. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; X = (x_1, x_2, x_3)^T, \; B = (6, 3, 5)^T.$$

Тогда данная система уравнений запишется матричным уравнением

$$AX = B.$$

Поскольку $\Delta = \det A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 5 \neq 0$, то матрица А невырождена и поэтому имеет обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Для получения решения X мы должны умножить вектор-столбец B слева на матрицу A^{-1}: $X = A^{-1}B$. В данном случае

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Выполняя действия над матрицами, получим:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \\ x_3 = 3 \end{matrix}$$

Итак, $C = (1,-2,3)^T$.

4. Критерий совместности системы линейных уравнений. Рассмотрим снова произвольную систему m линейных уравнений с n неизвестными, которую запишем, как и раньше, в матричной форме:

$$AX = B, \qquad (8)$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Матрицу A называют матрицей системы (8), а матрицу, полученную из матрицы A добавлением столбца свободных членов B, – *расширенной матрицей системы* (8). Обозначим расширенную матрицу системы (8) символом $(A\,|\,B)$:

$$(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Очевидно, что ранги матриц A и $(A\,|\,B)$ связаны неравенством

$$r(A\,|\,B)\ge r(A).$$

<u>Упражнение</u>. Ранг матрицы $(A\,|\,B)$ может быть лишь на единицу больше ранга матрицы A. Объясните, почему.

Вопрос о совместности системы (8) полностью решается следующей теоремой.

<u>Теорема Кронекера-Капелли</u>. *Для того чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы был равен рангу ее расширенной матрицы, т.е. чтобы* $r(A\,|\,B)=r(A)$ *.(Без доказательства)*

Пример 6. Исследовать систему уравнений и решить ее, если она совместна:

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7, \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выписываем основную и расширенную матрицу системы:

$$A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \qquad \overline{(A/B)}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг основной матрицы системы. Очевидно, что, например, минор второго порядка в левом верхнем углу $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 \ne 0$; содержащие его миноры третьего порядка равны нулю:

$$M'_3=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix}=0, \quad M''_3=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & -6 \end{vmatrix}=0.$$

Следовательно, ранг основной матрицы системы равен $r(A)=2$. Для вычисления ранга расширенной матрицы (A/B) рассмотрим окаймляющий минор

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 14 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -35 \neq 0,$$

значит, ранг расширенной матрицы $r(A/B)=3$. Поскольку $r(A/B) \neq r(A)$, то система несовместна.

5. Метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных) решения систем линейных уравнений.

Под элементарными преобразованиями системы линейных уравнений понимаются следующие операции:

1) умножение какого-либо уравнения системы на число, отличное от нуля;
2) прибавление к одному уравнению другого уравнения;
3) перемена местами уравнений в системе.

Комбинируя элементарные преобразования первого и второго типов, мы можем к любому уравнению прибавить другое уравнение, умноженное на произвольное число.

Производя элементарные преобразования в системе, мы получаем новую систему. Очевидно, что каждому элементарному преобразованию системы соответствуют аналогичные преобразования над строками расширенной матрицы этой системы, и наоборот, каждому элементарному преобразованию строк расширенной матрицы соответствует некоторое элементарное преобразование в системе. Таким образом, элементарные преобразования в системе сводятся к соответствующим преобразованиям над строками ее расширенной матрицы.

Определение. Две системы линейных уравнений от одних и тех же неизвестных называются *равносильными*, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот (или если обе системы несовместны).

Заметим, что число уравнений в равносильных системах может быть различным.

Теорема. *При элементарных преобразованиях система линейных уравнений переходит в равносильную систему.*

Сущность метода Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к такому виду, чтобы матрица системы оказалась треугольной. Для упрощения изложения мы будем иметь дело не с самой системой (6), а с расширенной матрицей этой системы (производя при этом элементарные преобразования только над строками матрицы).

Рассмотрим алгоритм применения метода Гаусса на простых примерах.

Пример 7. Решить систему

$$\begin{cases} x+y=1, \\ -x-y=2. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что $r(A)=1$, $r(A\,|\,B)=2$, т.е. исходная система несовместна. Заметим, что, применяя метод Гаусса (т.е. исключая неизвестные), мы одновременно проводим исследование системы на совместность (т.е. отыскиваем ранги матрицы системы и расширенной матрицы).

Пример 8. Решить систему

$$\begin{cases} x+y=1, \\ -x-y=-1. \end{cases}$$

Решение. Исследуем систему на совместность:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отсюда следует, что $r(A)=r(A\,|\,B)=1$ – система совместна.

Итак, полученная система, равносильная исходной, содержит одно уравнение с двумя неизвестными. Решение этой системы может быть найдено только в том случае, если мы придадим произвольное действительное значение одному из неизвестных. Тогда другое неизвестное можно выразить через первое.

Заметим, что неизвестные, значения которых можно выбирать произвольно, называют *свободными*. Число свободных неизвестных определяется по формуле $n-r$, где n – число неизвестных в исходной системе, r – ранг матрицы системы (совпадающий с рангом расширенной матрицы в силу совместности системы).

В данном случае $n-r=1$. Положим $y=C$; тогда $x=1-C$. В итоге получаем *общее решение* системы:

$$\bar{x}=\begin{pmatrix}1-C\\ C\end{pmatrix},$$

где C – произвольная постоянная.

Придавая постоянной C различные действительные значения, получаем бесконечное множество решений исходной системы.

При желании можно произвести проверку:

$$\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1-C\\ C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-C+C\\ -1+C-C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}.$$

Пример 9. Решить систему

$$\begin{cases}x-2y+3z=0,\\ 2x+y-z=0.\end{cases}$$

Решение. Данная система apriori является совместной, т.к. она однородна (все свободные члены равны нулю). Однородная система всегда имеет *нулевое* (или *тривиальное*) решение: $x=y=z=0$. Для однородных систем особый интерес представляет вопрос о существовании *ненулевых* (или *нетривиальных*) решений. Так называют всякое решение системы, у которого значение хоть одного неизвестного отлично от нуля.

Преобразуем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}^{C_2-2C_1}\sim\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & 0\\ 0 & 5 & -7 & 0\end{pmatrix}.$$

Имеем $r(A) = r(A\,|\,B) = 2$ – система совместна. Тогда $n - r = 3 - 2 = 1$ – количество свободных неизвестных. Полагая $z = C$ (где C – произвольная постоянная), получим

$$\begin{cases} x - 2y + 3C = 0, \\ \quad 5y - 7C = 0. \end{cases}$$

Отсюда $x = -\dfrac{C}{5}$, $y = \dfrac{7C}{5}$. Таким образом, общее решение системы имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C/5 \\ 7C/5 \\ C \end{pmatrix},$$

где C – произвольная постоянная.

Как мы отмечали ранее, система линейных уравнений может либо вовсе не иметь решений, либо иметь единственное решение, либо иметь их несколько (в последнем случае, оказывается, система всегда имеет бесконечное множество решений). Это утверждение исчерпывает все возможные ситуации. При изложении (на примерах) метода Гаусса мы получили возможность эвристически дать ответ на вопрос о числе решений (в случае совместности системы). Строгий ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема (о числе решений). *Пусть для системы m линейных уравнений с n неизвестными выполнено условие совместности, т.е. ранг r матрицы системы равен рангу ее расширенной матрицы. Тогда, если ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r = n$), то система имеет единственное решение. Если же ранг матрицы системы меньше числа неизвестных ($r < n$), то система имеет бесконечное множество решений, а именно: некоторым $n - r$ неизвестным можно придавать произвольные значения, тогда оставшиеся r неизвестных определятся уже единственным образом.*

6. Системы линейных уравнений общего вида. Если система (6) оказалась совместной, т. е. матрицы А и $(A\,|\,B)$ имеют один и тот же ранг, то могут представиться две возможности.

а) Если $r = n$, то имеем n независимых уравнений с n неизвестными, причем определитель Δ этой системы отличен от нуля. Такая система имеет единственное решение, получаемое по формулам Крамера.

б) Если $r < n$, то число независимых уравнений меньше числа неизвестных.

Перенесем лишние неизвестные, $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$ которые принято называть свободными, в правые части; наша система линейных уравнений примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - a_{2n}x_n, \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_m - a_{mr+1}x_{r+1} - a_{mn}x_n. \end{cases}$$

Ее можно решить относительно $x_1, x_2, ..., x_r$, так как определитель этой системы (r-го порядка) отличен от нуля. Придавая свободным неизвестным произвольные числовые значения, получим по формулам Крамера соответствующие числовые значения для $x_1, x_2, ..., x_r$. Таким образом, при $r < n$ имеем бесчисленное множество решений.

Система (6) называется *однородной*, если все $b_i = 0$, т. е. она имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \qquad (9)$$

Из теоремы Кронекера-Капелли следует, что она всегда совместна, так как добавление столбца из нулей не может повысить ранга матрицы. Это, впрочем, видно и непосредственно - система (9) заведомо обладает нулевым, или тривиальным, решением $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$. Пусть матрица A системы (9) имеет ранг r.

Если $r = n$, то нулевое решение будет единственным решением системы (9); при $r < n$ система обладает решениями, отличными от нулевого, и для их разыскания применяют тот же прием, как и в случае произвольной системы уравнений.

Пример 10. Исследовать систему уравнений и решить ее, если она совместна.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 - 8x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Будем находить ранги матриц A и (A/B) методом элементарных преобразований, приводя одновременно систему к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & -9 & -8 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -7 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 7 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $r(A) = r(A/B) = 2$. Исходная система равносильна следующей системе, приведенной к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ -4x_2 + 7x_3 + 7x_4 = 1. \end{cases}$$

Поскольку определитель при неизвестных x_1 и x_2 отличен от нуля, то их можно принять в качестве главных и переписать систему в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3 + x_4 - x_5, \\ -4x_2 = -7x_3 - 7x_4 + 1, \end{cases}$$

откуда $x_2 = 7/4\ x_3 + 7/4\ x_4 - 1/4$, $x_1 = 1/4\ x_3 - 3/4\ x_4 - x_5 + 5/4$ - общее решение системы, имеющей бесчисленное множество решений. Придавая свободным неизвестным x_3, x_4, x_5 конкретные числовые значения, будем получать частные решения. Например, при $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ $x_1 = 5/4$, $x_2 = -1/4$. Вектор $C(5/4, -1/4, 0, 0, 0)$ является частным решением данной системы.

Пример 11. Исследовать систему уравнений и найти общее решение в зависимости от значения параметра *a*.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = a. \end{cases}$$

Решение. Данной системе соответствует матрица

$$\left(A/B\right)=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 1 & 7 & -4 & 11 & a\end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\left(A/B\right)\approx\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2\\ 0 & -5 & 3 & -7 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 4 & 2\\ 0 & 5 & -3 & 7 & a-2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-5\end{pmatrix},$$

следовательно, исходная система равносильна такой системе:

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3+4x_4=2,\\ \quad 5x_2-3x_3+7x_4=a-2,\\ \qquad\qquad 0=a-5.\end{cases}$$

Отсюда видно, что система совместна только при $a=5$. Общее решение в этом случае имеет вид:

$$x_2 = 3/5 + 3/5x_3 - 7/5x_4,\ x_1 = 4/5 - 1/5x_3 - 6/5x_4.$$

Пример 12. Выяснить, будет ли линейно зависимой система векторов:

$$\boldsymbol{a}_1 = (1,\ 1,\ 4,\ 2),$$

$$\boldsymbol{a}_2 = (1,\ -1,\ -2,\ 4),$$

$$\boldsymbol{a}_3 = (0,\ 2,\ 6,\ -2),$$

$$\boldsymbol{a}_4 = (-3,\ -1,\ 3,\ 4),$$

$$\boldsymbol{a}_5 = (-1,\ 0,\ -4,\ -7).$$

Решение. Система векторов является линейно зависимой, если найдутся такие числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, из которых хотя бы одно отлично от нуля, что выполняется векторное равенство:

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + x_3\boldsymbol{a}_3 + x_4\boldsymbol{a}_4 + x_5\boldsymbol{a}_5 = 0.$$

В координатной записи оно равносильно системе уравнений:

$$\begin{cases}x_1+x_2-3x_4-x_5=0,\\ x_1-x_2+2x_3-x_4=4,\\ 4x_1-2x_2+6x_3+3x_4-4x_5=0,\\ 2x_1+4x_2-2x_3+4x_4-7x_5=0.\end{cases}$$

Итак, получили систему линейных однородных уравнений. Решаем ее методом исключения неизвестных:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -10 & 10 & -5 & 10 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система приведена к ступенчатому виду, ранг матрицы равен 3, значит, однородная система уравнений имеет решения, отличные от нулевого ($r < n$). Определитель при неизвестных x_1, x_2, x_4 отличен от нуля, поэтому их можно выбрать в качестве главных и переписать систему в виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 = x_5\,, \\ -2x_2 + 2x_4 = -2x_3 - x_5\,, \\ -3x_4 = -x_5. \end{cases}$$

Имеем:

$$x_4 = 1/3\, x_5,\ x_2 = 5/6 x_5 + x_3,\ x_1 = 7/6\, x_5 - x_3.$$

Система имеет бесчисленное множество решений; если свободные неизвестные x_3 и x_5 не равны нулю одновременно, то и главные неизвестные отличны от нуля. Следовательно, векторное уравнение

$$x_1\, \boldsymbol{a}_1 + x_2\, \boldsymbol{a}_2 + x_3\, \boldsymbol{a}_3 + x_4\, \boldsymbol{a}_4 + x_5\, \boldsymbol{a}_5 = 0$$

имеет коэффициенты, не равные нулю одновременно; пусть например, $x_5 = 6$, $x_3 = 1$. Тогда $x_4=2$, $x_2 = 6$, $x_1=6$ и мы получим соотношение

$$6\boldsymbol{a}_1 + 6\boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{a}_4 + 6\boldsymbol{a}_5 = 0,$$

т.е. данная система векторов линейно независима.

§ 2.2 Использование систем линейных уравнений при решении экономических задач

Пример 13. Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

Тип заготовки	Способ раскроя		
	1	2	3
А	*3*	*2*	*1*
Б	*1*	*6*	*2*
В	*4*	*1*	*5*

Записать в математической форме условия выполнения задания.

Решение. Обозначим через x, y, z количество листов материала, раскраиваемых соответственно первым, вторым и третьим способами. Тогда при первом способе раскроя x листов будет получено $3x$ заготовок типа А, при втором - $2y$, при третьем - z. Для полного выполнения задания по заготовкам типа *А* сумма $3x+2y+z$ должна равняться *360*, т.е.

$$3x+2y+z=360.$$

Аналогично получаем уравнения

$$x+6y+2z=300$$

$$4x+y+5z=675,$$

которым должны удовлетворять неизвестные x, y, z для того, чтобы выполнить задание по заготовкам Б и В. Полученная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y+z=360, \\ x+6y+2z=300, \\ 4x+y+5z=675. \end{cases}$$

и выражает в математической форме условия выполнения всего задания по заготовкам А, Б и В. Решим систему методом исключения неизвестных. Запишем расширенную матрицу системы и приведем ее с помощью элементарных преобразований к треугольному виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 3 & 2 & 1 & 360 \\ 4 & 1 & 5 & 675 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & -16 & -5 & -540 \\ 0 & -7 & 2 & 15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & -14 & 4 & 30 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 16 & 5 & 540 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 300 \\ 0 & 2 & 9 & 570 \\ 0 & 0 & -67 & -4020 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, исходная система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x + 6y + 2z = 300, \\ \quad 2y + 9z = 570, \\ \qquad -67z = -4020. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $z = 60$; подставляя найденное значение z во второе уравнение, получим $y = 15$ и, наконец, из первого имеем $x = 90$. Итак, вектор $C\ (90,\ 15,\ 60)$ есть решение системы.

Пример 14. Три судна доставили в порт 6000 т чугуна, 4000 т железной руды и 3000 т апатитов. Разгрузку можно производить как непосредственно в железнодорожные вагоны для последующей доставки потребителям, так и на портовые склады. В вагоны можно разгрузить 8000 т, а остаток груза придется направить на склады. Необходимо учесть, что поданные в порт вагоны не приспособлены для перевозки апатитов. Стоимость выгрузки 1 т в вагоны составляет соответственно 4,30, 5,25 и 2,20 ден. ед.

Записать в математической форме условия полной разгрузки судов, если затраты на нее должны составить 58850 ден. ед.

Решение. По условию задачи, доставленные в порт чугун, железную руду и апатиты можно разгрузить двумя способами: либо в железнодорожные вагоны, либо в портовые склады. Обозначим через $x_{i\,j}$ количество груза (в тоннах) i-го вида $(i = 1,2,3)$, которое предполагается разгрузить j-м способом $(j = 1, 2)$. Таким образом, задача содержит шесть неизвестных. Условие полной разгрузки чугуна можно записать в виде

$$x_{11} + x_{12} = 6000,$$

где x_{11}, x_{12} - части чугуна, разгружаемого соответственно в вагоны и на склады. Аналогичное условие должно выполняться и для железной руды:

$$x_{21} + x_{22} = 4000.$$

Что же касается апатитов, то их можно разгружать только на склады, а поэтому неизвестное $x_{31} = 0$, и условие полной разгрузки апатитов принимает вид

$$x_{32} = 3000.$$

Условие полной загрузки всех поданных в порт вагонов запишется так:

$$x_{11} + x_{21} = 8000.$$

Затраты на разгрузку, по условию, определены в 58850 ден. ед., что можно выразить записью:

$$4,3x_{11} + 7,8\,x_{12} + 5,25\,x_{21} + 6,4x_{22} + 3,25x_{32} = 58850.$$

Итак, с учетом сложившейся в порту ситуации условия полной разгрузки судов выражаются в математической форме системой линейных уравнений (1) - (2). С учетом (3) уравнение (5) перепишется в виде:

$$4,3x_{11} + 7,8x_{12} + 5,25x_{21} + 6,4x_{22} = 49100,$$

и теперь мы имеем систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными $x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}$, расширенная матрица которой имеет вид:

$$\overline{(A/B)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6000 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 8000 \\ 4,3 & 7,8 & 5,25 & 6,4 & 49100 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем ее к треугольному виду:

$$(A/B)\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 6000\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 8000\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000\\ 4,3 & 7,8 & 5,25 & 6,4 & 49100\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 6000\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2000\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000\\ 0 & 3,5 & 5,25 & 6,4 & 23300\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 6000\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2000\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000\\ 0 & 0 & 8,75 & 6,4 & 30300\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 6000\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 2000\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 4000\\ 0 & 0 & 0 & -2,35 & -4700\end{pmatrix}.$$

Наша система равносильна следующей системе:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}=6000,\\ \quad -x_{12}+x_{21}=2000,\\ \qquad x_{21}+x_{22}=4000\\ \qquad -2,35x_{22}=.-4700,\end{cases}$$

откуда $x_{22} = 2000$, $x_{21} = 2000$, $x_{12} = 0$, $x_{11} = 6000$.

Пример 15. На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий А и Б из некоторого сырья. В таблице указано количество изделий, которое может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов.

Записать в математической форме условия выбора технологий при производстве из 94 ед. сырья 574 изделий А и 328 изделий Б.

Изделие	Выход из единицы сырья			
	I	II	III	IV
А	*2*	*1*	*7*	*4*
Б	*6*	*12*	*2*	*3*

Решение. Обозначим через x_1, x_2, x_3, x_4 количество сырья, которое следует переработать по каждой технологии, чтобы выполнить плановое задание. Получим систему трех линейных уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 94, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 4x_4 = 574, \\ 6x_1 + 12x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 328. \end{cases}$$

Решаем ее методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 2 & 1 & 7 & 4 & 574 \\ 6 & 12 & 2 & 3 & 328 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 386 \\ 0 & 6 & -4 & -3 & -236 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 94 \\ 0 & -1 & 5 & 2 & 386 \\ 0 & 0 & 26 & 9 & 2080 \end{pmatrix}.$$

Имеем: $r(A) = r(A) = 3$, следовательно, число главных неизвестных равно трем, одно неизвестное x_4 - свободное. Исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 94 - x_4, \\ -x_2 + 5x_3 = 386 - 2x_4, \\ 26x_3 = 2080 - 9x_4. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим $x_3 = 80 - 9/26\, x_4$, подставляя x_3 во второе уравнение, будем иметь: $x_2 = 14 + 7/26 x_4$ и, наконец, из первого уравнения получим: $x_1 = -\,12/13\ x_4$. С математической точки зрения система имеет бесчисленное множество решений, т. е. неопределенна. С учетом реального экономического содержания величины x_1 и x_4 не могут быть отрицательными, тогда из соотношения $x_1 = -\,12/13\ x_4$ получим: $x_1 = x_4 = 0$. Тогда вектор $(0, 14, 80, 0)$ является решением данной системы.

Математическая модель межотраслевого баланса. Модель межотраслевого баланса, разработанная профессором В. Леонтьевым (Гарвардский университет, США), имеет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i = x_i \qquad (i = \overline{1, n}), \tag{10}$$

или, в матричной форме,

$$AX + Y = X, \tag{11}$$

где $A = (a_{ij})$ - матрица коэффициентов прямых затрат, X - вектор валовых выпусков, Y - вектор конечного продукта.

Перепишем систему (11) в виде

$$(E - A)\,X = Y, \qquad (12)$$

где E - единичная матрица n-го порядка, тогда решение системы (12) относительно неизвестных значений объемов производства продукции при заданном векторе конечного продукта находится по формуле

$$X = (E - A)^{-1}\,Y. \qquad (13)$$

Здесь $(E - A)^{-1}$ - матрица коэффициентов полных затрат. Элемент b_{ij} матрицы $(E - A)^{-1}$ характеризует потребность в валовом выпуске отрасли i, который необходим для получения в процессе материального производства единицы конечного продукта отрасли j. Благодаря этому имеется возможность рассматривать валовые выпуски x_i в виде функций планируемых значений y_j конечных продуктов отраслей:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j .$$

Пример 16. Пусть дана Леонтьевская балансовая модель "затраты - выпуск" $X = AX + Y$. Найти вектор конечной продукции Y при заданном X, где

$$A = \begin{pmatrix} 0,1 & 0 & 0,6 \\ 0 & 0,7 & 0,2 \\ 0,7 & 0,1 & 0,1 \end{pmatrix};\ X = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix};$$

Решение. Имеем: $Y = (E - A)\,X,$ где E - единичная матрица третьего порядка.

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0,3 & -0,2 \\ -0,7 & -0,1 & 0,9 \end{pmatrix},$$

значит, $$Y = \begin{pmatrix} 0,9 & 0 & -0,6 \\ 0 & 0,3 & -0,2 \\ -0,7 & -0,1 & 0,9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9\cdot 100 + 0 - 0,6\cdot 150 \\ 0 + 0,3\cdot 200 - 0,2\cdot 150 \\ -0,7\cdot 100 - 0,1\cdot 200 + 0,9\cdot 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix}.$$

Пример 17. Пусть дана Леонтьевская балансовая модель “затраты-выпуск”. Определить, будет ли продуктивной матрица технологических коэффициентов А. Найти вектор валовой продукции X при заданном Y, где

$$A=\begin{pmatrix} 0{,}125 & 0{,}125 \\ 1{,}125 & 0{,}125 \end{pmatrix};\ \mathrm{Y}=\begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для решения вопроса о продуктивности матрицы А следует найти собственные значения этой матрицы. Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 0{,}125-\lambda & 0{,}125 \\ 1{,}125 & 0{,}125-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

Или $(0{,}125-\lambda)^2-0{,}140625=0 \Rightarrow 0{,}125-\lambda=\pm 0{,}375.$

Следовательно, $\lambda_1 = 0{,}5$; $\lambda_2 = -0{,}25$. Оба корня по модулю меньше единицы, значит, матрица технологических коэффициентов А продуктивная. Для определения вектора валовой продукции X имеем формулу $X=(E-A)^{-1}\,Y$.

Найдем обратную матрицу для матрицы

$$E-A=\begin{pmatrix} 0{,}875 & -0{,}125 \\ -1{,}125 & 0{,}875 \end{pmatrix}.$$

Обозначим $B = E\text{-}A$, тогда $\mathrm{B}^{-1}=\dfrac{1}{\det \mathrm{B}}\begin{pmatrix} \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{21} \\ \mathrm{A}_{12} & \mathrm{A}_{22} \end{pmatrix}=\dfrac{1}{5{,}4}\begin{pmatrix} 0{,}875 & 0{,}125 \\ 1{,}125 & 0{,}875 \end{pmatrix}$.

Следовательно,

$$\mathrm{X}=\frac{1}{5{,}4}\begin{pmatrix} 0{,}875 & 0{,}125 \\ 1{,}125 & 0{,}875 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 300 \\ 400 \end{pmatrix}=\frac{1}{5{,}4}\begin{pmatrix} 0{,}875\cdot 300+0{,}125\cdot 400 \\ 1{,}125\cdot 300+0{,}125\cdot 400 \end{pmatrix}=\frac{1}{5{,}4}\begin{pmatrix} 312{,}5 \\ 687{,}5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 57{,}9 \\ 127{,}3 \end{pmatrix}.$$

Глава 3. ЭЛЕМЕНТЫ МАТРИЧНОГО АНАЛИЗА

§ 3.1 Векторные (Линейные) пространства

1. Понятие векторного пространства.

Определение. Множество L элементов любой природы называется векторным пространством, если выполнены следующие три требования:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам $x, y \in L$ ставится в соответствие третий элемент этого множества, называемый суммой элементов x и y и обозначаемый символом $x+y$.

II. Имеется правило, посредством которого любому элементу $x \in L$ и любому числу λ ставится в соответствие элемент этого множества, называемый произведением элемента x на число λ и обозначаемый символом λx.

III. Для любых элементов $x, y, z \in L$ и любых чисел λ и μ выполнены следующие аксиомы:

1) $x+y=y+x$;

2) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

3) $\exists \overline{0} \in L\colon\ x+\overline{0}=x \ \ \forall x \in L$. Этот элемент $\overline{0}$ пространства L называют нулевым (не путать с числом 0!);

4) $\forall\, x \in L\ \ \exists(-x) \in L\colon\ x+(-x)=\overline{0}$. Такой элемент $(-x)$ называют противоположным для x;

5) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;

6) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$;

7) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$;

8) $1\cdot x=x$.

Замечание 1. Если в пункте II мы ограничиваемся вещественными числами, то L называется вещественным векторным пространством; если же определено умножение на любое комплексное число, то векторное пространство называется комплексным.

Замечание 2. Элементы произвольного векторного пространства принято называть векторами. То обстоятельство, что часто термин «вектор» употребляется в более узком смысле, при этом не приводит к недоразумениям, а, напротив, обращаясь к сложившимся геометрическим представлениям, можно уяснить, а зачастую и предвидеть ряд результатов, справедливых для векторных пространств произвольной природы.

При введении понятия векторного пространства мы абстрагируемся не только от природы изучаемых объектов, но и от конкретного вида правил образования суммы элементов и произведения элемента на число. Важно лишь, чтобы эти правила удовлетворяли аксиомам векторного пространства.

Примеры векторных пространств

1. Пространство V_2 геометрических векторов на плоскости.
2. Пространство V_3 геометрических векторов в трехмерном пространстве.
3. Множество $P_n(R)$ многочленов с вещественными коэффициентами степени не выше n образует векторное пространство относительно операций сложения многочленов и умножения многочлена на вещественное число.
4. Множество $M_{m\times n}(R)$ матриц одинаковых размеров образуют векторное пространство относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число. В частности, часто встречается и используется векторное пространство матриц-строк $M_{1\times n}(R)$ ($M_{1\times n}(C)$). Для него принято другое обозначение – R^n (C^n). Элементами этого векторного пространства служат упорядоченные совокупности n произвольных вещественных (комплексных) чисел $(x_1, x_2, ..., x_n)$.
5. (Нестандартный пример). Рассмотрим множество R_+ всех положительных вещественных чисел. Определим «сумму» двух элементов $x, y \in R_+$ как произведение вещественных чисел x и y (понимаемое в обычном смысле): $x + y \mapsto xy$. «Произведение» элемента $x \in R_+$ на вещественное число λ определим как возведение числа x в степень λ: $\lambda x \mapsto x^{\lambda}$. Нулевым элементом пространства будет служить вещественное число 1, а противоположным

элементом (для данного элемента x) будет число $1/x$. Проверьте выполнение аксиом векторного пространства (которые в обычной записи принимают другой вид: вместо $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ мы имеем $\left(x^{\mu}\right)^{\lambda} = x^{\lambda\mu}$ и т.д.). В этом примере, быть может, для обозначения суммы элементов пространства и для произведения элемента пространства на число предпочтительнее другие обозначения (например, $\oplus$ и $\otimes$).

2. Некоторые свойства произвольных векторных пространств. Из определения векторного пространства следует ряд утверждений, справедливых для произвольных векторных пространств.

1) В векторном пространстве существует единственный нулевой элемент.

2) Для каждого элемента векторного пространства существует единственный противоположный элемент.

3) $0 \cdot x = \overline{0} \quad \forall x \in L$.

4) Для любого элемента $x \in L$ противоположный ему элемент $(-x)$ равен произведению элемента x на число (-1), т.е. $(-1)x = -x$.

Отметим также, что из определения векторного пространства следует существование и единственность *разности* любых двух элементов векторного пространства x и y, которая определяется как элемент z, удовлетворяющий условию $x = z + y$. Этим элементом служит сумма $z = x + (-1)y$.

§ 3.2 Размерность и базис векторного пространства

1. Линейно зависимые и независимые системы векторов. Пусть L – произвольное вещественное векторное пространство, $\{x_i\} = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset L$, $\{\alpha_i\} = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\} \subset R$. *Линейной комбинацией* векторов $\{x_i\}$ с коэффициентами $\{\alpha_i\}$ называется вектор $x \in L$, получаемый по правилу

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \,. \qquad (14)$$

Линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ называется *нетривиальной*, если в ней, хотя бы один из коэффициентов α_i отличен от нуля. Линейная комбинация вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n$ называется *тривиальной*; она, очевидно, равна нулевому вектору $\overline{0}$.

Определение. Система векторов $\{x_i\}$ называется *линейно зависимой*, если существует, хотя бы одна нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору. В противном случае, т.е. если только тривиальная линейная комбинация данных векторов равна нулевому вектору, векторы называются *линейно независимыми*.

Теорема (критерий линейной зависимости). *Для того чтобы система векторов $\{x_i\}$ линейного пространства была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы, по крайней мере, один из этих векторов являлся линейной комбинацией остальных.*

Имеет место два простых, но важных предложения о линейной зависимости.

1) Если среди векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ имеется хотя бы один нулевой вектор, то вся система векторов линейно зависима.

2) Если среди векторов $x_1, x_2, ..., x_n$ некоторые образуют линейно зависимую систему, то и вся система $x_1, x_2, ..., x_n$ линейно зависима.

Примером линейно независимых векторов является два неколлинеарных, вектора a_1, a_2 на плоскости. Действительно, условие

$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 = 0$ будет выполняться лишь в случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, ибо если, например $\lambda_2 \neq 0$, то $a_2 = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} a_1$ и векторы a_1, a_2 коллинеарны.

Пример 1. Показать**,** что векторы $a_1 = (1,3,1,3)$, $a_2 = (2,1,1,2)$, $a_3 = (3,-1,1,1)$ линейно зависимы.

Решение. Составим векторное равенство $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$. Записывая a_1, a_2, a_3 в виде вектор-столбцов, получим

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача свелась, таким образом, к решению системы

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему методом Гаусса, приведем ее к виду

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ 0 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}.$$

Таким образом, данная система имеет бесконечное множество решений $\lambda_1 = c,\ \lambda_2 = -2c,\ \lambda_3 = c$, где c- произвольная константа.

Итак, для данных векторов a_1, a_2, a_3 условие $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$ выполняется не только при $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, а например при

$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 1$,

следовательно, эти векторы линейно зависимы.

2. Базис и размерность. Фундаментальным вопросом теории векторных пространств является вопрос о том, можно ли, а если можно, то как, произвольный вектор пространства представить в виде линейной комбинации фиксированного набора векторов из этого пространства. Далее мы получим ответ на этот вопрос.

Определение. Система линейно независимых векторов $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ векторного пространства L называется *базисом* этого пространства, если любой вектор из L может быть представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы, т.е. для каждого вектора $x \in L$ существуют вещественные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ такие, что имеет место равенство

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n .$$

Это равенство называется *разложением вектора x* по базису $e_1, e_2, ..., e_n$, а числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ называются *координатами вектора x относительно базиса* (или *в базисе*) $e_1, e_2, ..., e_n$.

Очевидно, что нулевой вектор имеет все нулевые координаты, а вектор, противоположный данному,- противоположные по знаку координаты.

Справедливы следующие теоремы:

Теорема (о единственности разложения по базису). *Каждый вектор x пространства L может быть разложен по базису $e_1, e_2, ..., e_n$ единственным образом, т.е. координаты каждого вектора x в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ определяются однозначно.*

Теорема. *Если $e_1, e_2, ..., e_n$- система линейно независимых векторов пространства L и любой вектор а линейно выражается через $e_1, e_2, ..., e_n$, то пространства L является n-мерным, а векторы $e_1, e_2, ..., e_n$- его базисом.*

Главное значение базиса заключается в том, что операции сложения векторов и умножения их на числа при задании базиса превращаются в соответствующие операции над числами – координатами этих векторов. А именно, справедлива следующая

Теорема. *При сложении двух любых векторов линейного пространства L их координаты (относительно любого базиса пространства) складываются; при умножении произвольного вектора на любое число λ все координаты этого вектора умножаются на λ.*

Пример 2. . Исследуем вопрос о базисе пространства R^n, введенного ранее при рассмотрении примеров векторных пространств. Покажем, что n элементов $e_1 = (1,0,0,...,0,0),\ e_2 = (0,1,0,...,0,0),\dots,\ e_n = (0,0,0,...,0,1)$ указанного пространства образуют базис.

Решение. Во-первых, эти векторы линейно независимы. Проверка линейной независимости набора $\{e_i\}$ состоит в определении значений $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$, при которых возможно равенство

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = \overline{0} = (0,0,...,0) .$$

Но в силу преведущий теоремы

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) , \qquad (15)$$

а последний вектор является нулевым лишь при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$.

Во-вторых, всякий вектор $y = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ заведомо представим в виде линейной комбинации векторов $\{e_i\}$: $y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + ... + \beta_n e_n$ и, значит, набор $\{e_i\}$ образует базис.

<u>Определение</u>. Векторное пространство L называется n*-мерным*, если в нем существуют n линейно независимых векторов, а любые $n+1$ векторов уже являются линейно зависимыми. При этом число n называется *размерностью* пространства L.

Размерность векторного пространства, состоящего из одного нулевого вектора, принимается равной нулю.

Размерность пространства L обычно обозначают символом $\dim L$.

<u>Определение</u>. Векторное пространство L называется *бесконечномерным*, если в нем существует любое число линейно независимых векторов. В этом случае пишут $\dim L = \infty$.

Выясним связь между понятиями базиса и размерности пространства.

<u>Теорема</u>. *Если L – векторное пространство размерности n, то любые n линейно независимых векторов этого пространства образуют его базис.*

Теорема. *Если векторное пространство* L *имеет базис, состоящий из* n *векторов, то* $\dim L = n$.

Пример 3. В базисе e_e, e_2, e_3 заданы векторы $a_1 = (1,1,0)$, $a_2 = (1,-1,1)$, $a_3 = (-3,5,-6)$. Показать, что векторы a_e, a_2, a_3 образуют базис.

Решение. Составим векторное равенство $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 = 0$. Записывая a_1, a_2, a_3 в виде вектор-столбцов, получим

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача свелась, таким образом, к решению системы

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 5\lambda_3 = 0, \\ \quad \lambda_2 - 6\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему методом Гаусса, получим

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 8\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, векторы a_1, a_2, a_3 составляют систему линейно независимых векторов и, следовательно, образуют базис. Система трех линейно независимых векторов a_e, a_2, a_3 образуют базис то, размерность $\dim L = 3$.

3. Переход к новому базису. Пусть в пространстве R имеются два базиса: старый $e_1, e_2, ..., e_n$ и новый $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, ..., \tilde{e}_n$. Каждый из векторов нового базиса можно выразить в виде линейной комбинации векторов старого базиса:

$$\begin{cases} \tilde{e}_1 = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + ... + a_{1n}e_n, \\ \tilde{e}_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + ... + a_{21n}e_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \tilde{e}_n = a_{n1}e_1 + a_{n2}e_2 + ... + a_{nn}e_n. \end{cases} \qquad (16)$$

Полученная система означает, что переход от старого базиса $e_1, e_2, ..., e_n$ к новому $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, ..., \tilde{e}_n$ задается матрицей перехода

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

причем коэффициенты размножения новых базисных векторов по старому базису образуют столбцы этой матрицы.

Матрица A невырожденная, так, как столбцы базисные векторы. Обратный переход от нового базиса $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n$ к старому базису $e_1, e_2, \dots, e_n$ осуществляется с помощью обратной матрицы A^{-1}.

Найдем зависимость между координатами вектора в разных базисах. Пусть рассматриваемый вектор x имеет координаты $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ относительно старого базиса и координаты $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)$ относительно нового базиса т.е.

$$x = \tilde{x}_1\tilde{e}_1 + \tilde{x}_2\tilde{e}_2 + \dots + \tilde{x}_n\tilde{e}_n = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n. \quad (17)$$

Подставляя значения $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n$ из системы (16) в левую часть равенства (17), получим после преобразований:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}\tilde{x}_1 + a_{12}\tilde{x}_2 + \dots + a_{1n}\tilde{x}_n, \\ x_2 = a_{21}\tilde{x}_1 + a_{22}\tilde{x}_2 + \dots + a_{21n}\tilde{x}_n, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n = a_{n1}\tilde{x}_1 + a_{n2}\tilde{x}_2 + \dots + a_{nn}\tilde{x}_n. \end{cases},$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Пример 4. Вектор $b = (4, -4, 5)$**,** заданный в базисе e_1, e_2, e_3, выразить в базисе a_1, a_2, a_3, где $a_1 = (1,1,0)$, $a_2 = (1,-1,1)$, $a_3 = (-3,5,-6)$.

Решение. Выразим связь между базисами:

$$\begin{cases} a_1 = e_1 + e_2, \\ a_2 = e_1 - e_2 + e_3, \\ a_3 = -3e_1 + 5e_2 - 6e_3. \end{cases}$$

Матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису a_1, a_2, a_3 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем A^{-1}

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (18), имеем

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & -6 & -8 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 2 \\ -0,5 \end{pmatrix},$$

т.е. новые координаты вектора b в базисе a_1, a_2, a_3 есть *0,5; 2;-0,5* и вектор b может быть представлен в виде:

$$b = 0,5a_1 + 2a_2 - 0,5a_3.$$

§ 3.3 Евклидовы пространства

Выше мы определили линейное (векторное) пространства в котором можно складывать векторы и умножить их на числа, ввели понятие размерности и базиса, а теперь в данном пространстве введем метрику т.е. способ измерять длины и углы. Это возможно если ввести понятие скалярного произведения

1. Скалярное произведение.

Определение. Скалярным произведением двух векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ называется числа

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i .$$

Скалярное произведение имеет экономический смысл. Если $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ есть вектор объемов различных товаров, а $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ - вектор их цен, то скалярное произведение (x, y) выражает суммарную стоимость этих товаров.

Скалярное произведение имеет следующие свойства:

1. $(x, y) = (y, x)$- коммутативное свойство;
2. $(x, y + z) = (y, x) + (x, z)$- дистрибутивное свойство;
3. $(ax, y) = a(x, y)$- для любого действительного числа a;
4. $(x, x) > 0$, если x ненулевой вектор, $(x, x) = 0$ если x нулевой вектор.

Мы рассмотрим векторные пространства произвольной природы, для элементов которых каким-либо способом (причем, безразлично каким) определено правило, ставящее в соответствие любым двум элементам число, называемое скалярным произведением этих элементов. При этом важно только, чтобы это правило обладало теми же четырьмя свойствами, что и правило составления скалярного произведения для геометрических векторов на плоскости или в пространстве. Векторные пространства, в которых определено указанное правило, называются евклидовыми пространствами.

Дадим более строгое

Определение. Вещественное векторное пространство E называется вещественным *евклидовым пространством* (или просто евклидовым пространством), если выполнены следующие два требования:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам этого пространства x и y ставится в соответствие вещественное число, называемое *скалярным произведением* этих элементов (и обозначаемое символом (x, y)).

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:

1) $(x, y) = (y, x)$ (коммутативность или симметрия);

2) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (дистрибутивность скалярного произведения относительно сложения);

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y) \quad \forall\, \lambda \in R$;

4) $(x, x) > 0$, если $x \neq \overline{0}$; $(x, x) = 0$, если $x = \overline{0}$.

Пример 5. Рассмотрим векторные пространства V_2 или V_3 геометрических векторов на плоскости или в пространстве. Скалярное произведение любых двух векторов определим стандартным образом (как произведение длин этих векторов на косинус угла между ними). В курсе аналитической геометрии доказывается, что в этом случае выполняются аксиомы 1) – 4). Следовательно, пространства V_2 и V_3 являются евклидовыми пространствами.

Пример 6. Рассмотрим n-мерное координатное пространство R^n. Если $\bar{x} = (x_1, ..., x_n) \in R^n$, $\bar{y} = (y_1, ..., y_n) \in R^n$, то скалярное произведение (x, y) определим равенством $(x, y) \overset{def}{=} x_1 y_1 + ... + x_n y_n$. В этом случае выполнение аксиом 1) – 4) легко проверяется.

Длиной вектора x в евклидовом пространстве называется корень квадратный из его скалярного квадрата

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\,.$$

Имеют место следующие свойства длины векторов:

1. $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

2. $|\lambda x| = \lambda |x|$, где λ-действительное числа;

3. $|(x, y)| \le |x||y|$ - неравенство Коши-Буняковского;

4. $|x + y| \le |x| + |y|$ - неравенство треугольника.

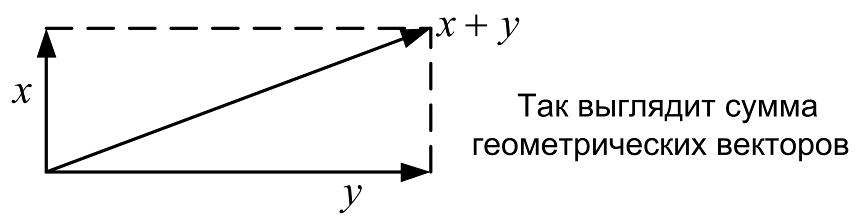
Угол φ между двумя векторами x и y определяется равенством

$$\cos\varphi = \frac{(x, y)}{\| x \| \cdot \| y \|} = \frac{(x, y)}{\sqrt{(x, x)} \cdot \sqrt{(y, y)}},$$

где $0 \le \varphi < \pi$.

Данное нами определение угла корректно, ибо в силу неравенства Коши-Буняковского дробь, стоящая в правой части последнего равенства, по модулю не превосходит единицы т.е. $\cos\varphi \le 1$.

Будем называть два произвольных элемента x и y евклидова пространства E *ортогональными*, если $(x, y) = 0$ (в этом случае $\cos(\hat{x, y}) = 0$).



Проводя аналогию с геометрическими объектами, назовем сумму $x + y$ двух ортогональных элементов x и y *гипотенузой* прямоугольного треугольника, построенного на элементах x и y.

Во всяком евклидовом пространстве справедлива *теорема Пифагора*: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. В самом деле, поскольку x и y ортогональны, а, следовательно, $(x, y) = 0$, то в силу аксиом и определения длины

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) =$$
$$= (x, x) + (y, y) = |x|^2 + |y^2|.$$

Ранее было введено понятие базиса n-мерного векторного пространства. Все базисы в произвольном векторном пространстве являлись равноправными, и у нас не было оснований предпочитать один базис другому. В евклидовом пространстве существуют специальные, особо удобные базисы, называемые ортонормированными базисами. Эти базисы играют ту же роль, что и декартов прямоугольный базис в аналитической геометрии.

Определение. Говорят, что n элементов $e_1, e_2, ..., e_n$ n-мерного евклидова пространства E образуют *ортонормированный базис* этого пространства, если эти элементы попарно ортогональны и норма каждого из них равна единице, т.е. если

$$(e_i, e_k) = \begin{cases} 1 & при\ i = k, \\ 0 & при\ i \neq k. \end{cases}$$

Ценность понятия ортонормированного базиса была бы невелика, если бы не следующая теорема.

Теорема. *Во всяком n-мерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.*

Произвольный ортонормированный базис любого евклидова пространства обладает свойствами, аналогичными свойствам декартова прямоугольного базиса (на плоскости и в пространстве геометрических векторов). Так, например, в ортонормированном базисе скалярное произведение двух любых векторов равно сумме произведений соответствующих координат этих векторов.

Еще раз подчеркнем, что существенным отличием произвольных векторных пространств от их частного случая, евклидовых пространств, является то, что в векторном пространстве не определены метрические соотношения между его элементами.

Примером ортонормированного базиса является система n- единичных векторов $e_1 = (1,0,0,...,0,0)$, $e_2 = (0,1,0,...,0,0), ...,$ $e_n = (0,0,0,...,0,1)$.

§ 3.4 Линейные операторы

1. Оператор. Одно из фундаментальных понятий матричной алгебры – понятие линейного оператора.

Рассмотрим два линейных пространства: R^n размерности n и R^m размерности m.

Определение. Если задан закон, по которому каждому вектору x пространства R^n ставится в соответствие единственный вектор y пространства R^m, то говорят, что задан оператор $\widetilde{A}(x)$, действующий из R^n в R^m и записываются $y = \widetilde{A}(x)$.

Оператор называется линейным, если для любых векторов x и y пространства R^n и любого числа λ выполняются соотношения:

1. $\widetilde{A}(x+y) = \widetilde{A}(x) + \widetilde{A}(y)$ - свойство аддитивности операторов;
2. $\widetilde{A}(\lambda x) = \lambda \widetilde{A}(x)$ - свойство однородности операторов.

Вектор $y = \widetilde{A}(x)$ называется образом вектора x, а сам вектор x - прообразом вектора y.

Если пространства R^n и R^m совпадают, то оператор A отображает R^n в себя. Именно такие операторы будет изучаться в дальнейшем.

Выбираем в пространстве R^n базис $e_1, e_2, ..., e_n$, то разложение вектора x по данному базису имеет вид

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_n e_n$$

В силу линейности оператора $\widetilde{A}(x)$ получаем

$$\widetilde{A}(x) = x_1 \widetilde{A}(e_1) + x_2 \widetilde{A}(e_2) + ... + x_n \widetilde{A}(e_n).$$

Поскольку $\widetilde{A}(e_i)$ $(i = 1,2,...,n)$- также вектор из R^n, то его можно разложить по базису $e_1, e_2, ..., e_n$ т.е.

$$\widetilde{A}(e_i) = a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2 + ... + a_{ni} e_n \quad (i = 1,2,...,n).$$

Тогда

$$\widetilde{A}(e_i) = x_1\left(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n\right) + x_2\left(a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n\right) + \\ + \ldots + x_n\left(a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n\right) = e_1\left(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n\right) + \\ + e_2\left(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n\right) + \ldots + e_n\left(a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n\right). \qquad (19)$$

С другой стороны, вектор $y = \widetilde{A}(x)$, имеющий в том же базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ координаты $\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$ можно записать так:

$$\widetilde{A}(x) = y_1e_1 + y_2e_2 + \ldots + y_ne_n. \qquad (20)$$

Ввиду единственности разложение векторов по базису равны правые части равенства (19) и (20), откуда

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{21n}x_n, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n. \end{cases} \qquad (21)$$

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Называется матрицей оператора $\widetilde{A}$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а ранг r матрицы A - рангом оператора $\widetilde{A}$.

Таким образом, каждому линейному оператору соответствует матрица в данном базисе. Справедливо и обратное.

Связь между вектором x и его образом $y = \widetilde{A}(x)$ можно выразить в матричной форме уравнением

$$Y = AX,$$

где A- матрица линейного оператора, $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = \left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right)$- матрицы столбцы из координат векторов x и y.

Пример 6. Пусть в пространстве R^n линейный оператор $\widetilde{A}$ в базисе e_1, e_2, e_3 задан матрицей

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 2\end{pmatrix}.$$

Найти образ $y=\widetilde{A}(x)$ вектора $x=4e_1,-3e_2+e_3$.

Решение. По формуле (21) имеем

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 4\\ -1 & 5 & 6\\ 1 & 8 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ -13\\ -18\end{pmatrix}.$$

Следовательно $y=10e_1,-13e_2-18e_3$.

Зависимости между матрицами одного и того же оператора в разных базисах выражается формулой

$$A'=C^{-1}AC,$$

где A, A' матрицы оператора $\widetilde{A}$ в базисах $e_1,e_2,...,e_n$ и $e'_1,e'_2,...,e'_n$, C- матрица перехода от старого базиса к новому.

Пример 7. В базисе e_1,e_2 оператор $\widetilde{A}$ имеет матрицу

$$A=\begin{pmatrix}17 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора $\widetilde{A}$ в базисе $e_1^*=e_1,-2e_2$, $e_2^*=2e_1,+e_2$.

Решение. Определяем матрицу перехода

$$C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу к матрицу перехода

$$C^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

Следовательно

$$A'=C^{-1}AC=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}17 & 6\\ 6 & 8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 20\end{pmatrix}.$$

2.Собственные векторы и собственные значения оператора.

<u>Определение.</u> Всякий ненулевой вектор $x\neq 0$ называется *собственным вектором линейного оператора* $\widetilde{A}$ *(квадратной матрицы* А*),* если найдется такое число λ, что будет выполняться равенство

$$\widetilde{A}(x) = \lambda x$$

Число λ называется *собственным значением линейного оператора* $\widetilde{A}$ *(матрицы* A*),* соответствующим вектору x. Матрица A имеет порядок n.

В математической экономике большую роль играют так называемые *продуктивные матрицы*. Доказано, что матрица A является продуктивной тогда и только тогда, когда все собственные значения матрицы A по модулю меньше единицы.

Для нахождения собственных значений матрицы A перепишем равенство $\widetilde{A}(x) = \lambda x$ в векторном виде

$$(A - \lambda E)X = 0, \qquad (22)$$

где E- единичная матрица n-го порядка, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ -вектор-столбец или в координатной форме:

$$\begin{cases} a_{11} - \lambda x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0, \\ .... \\ a_{nm1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases} \qquad (23)$$

Получили систему линейных однородных уравнений, которая имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель этой системы равен нулю, т.е.

$$|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & ... & a_{2n} \\ .... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Получили уравнение n-ой степени относительно неизвестной λ, которое называется *характеристическим уравнением матрицы A*, многочлен $|\mathrm{A} - \lambda \mathrm{E}|$ называется *характеристическим многочленом матрицы A*, а его корни - *характеристическими числами, или собственными значениями, матрицы A*.

Для нахождения собственных векторов матрицы A в векторное уравнение (22) или в соответствующую систему однородных уравнений (23) нужно подставить найденные значения λ и решать обычным образом.

Пример 8. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы *A - λE:*

$$|A - \lambda E| = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5-\lambda & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \lambda^2-4\lambda+4 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -5-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & -1 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda^2-4\lambda+4 & 0 & 0 \\ 3 & -5-\lambda & -3 \\ 1+\lambda & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^2-4\lambda+4)\begin{vmatrix} 5+\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix}.$$

Итак, $|A - \lambda E| = (\lambda - 2)^2 \cdot (\lambda+2)^2$. Корни характеристического уравнения $|A - \lambda E|=0$ - это числа $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$. Другими словами, мы нашли собственные значения матрицы A. Для нахождения собственных векторов матрицы A подставим найденные значения λ в систему (23): при $\lambda = 2$ имеем систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 - x_2 = 0, \\ 3x_1 - 7x_3 - 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2, \\ 3x_2 = 7x_3 + 3x_4, \\ 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Следовательно, собственному значению $\lambda = 2$ отвечают собственные векторы вида $\alpha\ (8,\ 8,\ -3,\ 15)$, где α - любое отличное от нуля действительное число. При $\lambda = -2$ имеем:

$$A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

и поэтому координаты собственных векторов должны удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Поэтому собственному значению $\lambda = -2$ отвечают собственные векторы вида $\beta\,(0,\ 0, -1,\ 1)$, где β - любое отличное от нуля действительное число.

Наиболее простой вид принимает матрица A линейного оператора $\widetilde{A}$, имеющего n линейно независимых собственных векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ соответственно соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

Векторы $e_1, e_2, ..., e_n$

примем за базисные. Тогда $\widetilde{A}(e_i) = \lambda_i e_i \ \ (i = 1,2,...,n)$ или

$$\widetilde{A}(e_i) = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + ... + a_{ni}e_n = \lambda_i e_i,$$

откуда $a_{ij} = 0$ если $i \neq j$, и $a_{ij} = \lambda_i \ \ i = j$. Таким образом, матрица оператора $\widetilde{A}$ в базисе, состоящих из его собственных векторов, является диагональной и имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Пример 9. Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ линейного оператора $\widetilde{A}$ к диагональному виду.

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 9 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 2\lambda - 35 = 0,$$

откуда собственные значения линейного оператора $\widetilde{A}$ $\lambda_1 = -5,\ \lambda_2 = 7$.

Для нахождения собственных векторов матрицы A подставим найденные значения λ в систему

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1+4x_2=0,\\ 9x_1+(1-\lambda)x_2=0.\end{cases}$$

При $\lambda_1=-5$, имеем

$$\begin{cases}6x_1+4x_2=0\\ 9x_1+6x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x_1+2x_2=0\\ 3x_1+2x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x_1+2x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=c,\\ x_2=-1{,}5c.\end{cases}$$

При $\lambda_1=7$, имеем

$$\begin{cases}-6x_1+4x_2=0\\ 9x_1-6x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-3x_1+2x_2=0\\ 3x_1-2x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x_1-2x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=c_1,\\ x_2=1{,}5c_1.\end{cases}$$

Таким образом, найдены соответствующие собственные векторы $x^{(1)}=(c,-1{,}5c)$, $x^{(2)}=(c_1,1{,}5c_1)$. Так, как координаты векторов $x^{(1)},x^{(2)}$ не пропорциональны, то векторы $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ линейно независимы. Поэтому матрица A в базисе $x^{(1)},x^{(2)}$ имеет диагональный вид:

$$A=\begin{pmatrix}-5&0\\0&7\end{pmatrix}.$$

3. Квадратичные формы. При решении различных прикладных задач часто приходится исследовать квадратичные формы.

<u>Определение</u>. Квадратичной формой $L(x_1,x_2,..,x_n)$ от n переменных называется сумма, каждый член которой является либо квадратом одной из переменных, либо произведением двух различных переменных, взятых с некоторыми коэффициентом:

$$L(x_1,x_2,..,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j\ .$$

Предполагается, что коэффициенты квадратичной формы a_{ij} - действительные числа, причем $a_{ij}=a_{ji}$. Матрица, $A=(a_{ij})$, $(i,j=1,2,...n)$ составленная из коэффициентов, называется матрицей квадратичной формы.

Матричный запись квадратичный формы имеет вид:

$$L=X'AX,$$

где $X=(x_1,x_2,..,x_n)$- матрица- столбец переменных.

В самом деле

$$L=(x_1,x_2,..,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}=(x_1,x_2,..,x_n)\begin{pmatrix} \sum a_{1j}x_j \\ \sum a_{2j}x_j \\ ... \\ \sum a_{nj}x_j \end{pmatrix}=$$

$$=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_1x_j+\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_2x_j+...+\sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_nx_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j .$$

Пример 10. Дана квадратичная форма

$$L(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2-12x_1x_2-10x_1x_3+x_2^2-3x_3^2 .$$

Записать матричной форме.

Решение. Найдем матрицу квадратичной формы. Ее диагональные элементы равны коэффициентам при квадратах переменных, а другие- половинам соответствующих коэффициентов квадратичной формы. Поэтому

$$L=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Выясним, как изменяется квадратичная форма при невырожденном линейном преобразовании переменных.

Пусть матрицы-столбцы переменных $X=(x_1,x_2,..,x_n)$ и $Y=(y_1,y_2,..,y_n)$ связаны линейным соотношением $X=CY$, где $C=(c_{ij}),\ (i,j=1,2,...n)$ есть некоторая невырожденная матрица n- го порядка. Тогда квадратичная форма

$$L=X'AX=(CY)'A(CY)=(Y'C')A(CY)=Y'(C'AC)Y .$$

Итак, при невырожденном линейном преобразовании $X=CY$ матрица квадратичной формы принимает вид:

$$A^*=C'AC .$$

Пример 11. Дана квадратичная форма

$$L(x_1,x_2)=2x_1^2+4x_1x_2-3x_2^2 .$$

Найти квадратичную форму $L(y_1,y_2)$, полученную из данной линейным преобразованием $x_1=2y_1-3y_2,\ x_2=y_1+y_2$.

Решение. Матрица данной квадратичной формы

$$A=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}.$$

Матрица линейного преобразования

$$C=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Следовательно, матрица искомой квадратичной формы:

$$A^* = C'AC=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -17\\ -17 & 3\end{pmatrix}.$$

Тогда квадратичная форма $L(y_1,y_2)$ имеет вид:

$$L(y_1,y_2)=13y_1^2-34y_1y_2+3y_2^2.$$

<u>Определение</u>. Квадратичная форма $L(x_1,x_2,..,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ называется канонической, если все ее коэффициенты $a_{ij}=0$ при $i\neq j$.

Из данной определение получим канонический вид квадратичной формы

$$L=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\ldots\_+a_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2.$$

Матрица канонической квадратичной формы является диагональной

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & \ldots & 0\\ 0 & a_{22} & \ldots & 0\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Пример 12. Привести к каноническому виду квадратичную форму $L(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3+x_3^2$.

Решение. Вначале выделим полный квадрат при x_1, коэффициент при квадрате которой отличен от нуля:

$$L=\left[x_1^2-2x_1\left(\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)+\left(\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)^2\right]-\left(\frac{1}{2}(3x_2-4x_3)\right)^2+$$

$$+2x_2x_3+x_3^2=\left(x_1-\frac{3}{2}x_2+2x_3\right)^2-\frac{9}{4}x_2^2+8x_2x_3-3x_3^2.$$

Теперь выделим полный квадрат при x_2, коэффициент при квадрате которой отличен от нуля

$$L = \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}\left(x_2^2 - \frac{32}{9}x_2x_3 + \frac{256}{81}x_3^2\right) + \frac{9}{4}\frac{256}{81}x_3^2 - 3x_3^2 =$$

$$= \left(x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3\right)^2 - \frac{9}{4}\left(x_2 - \frac{16}{9}x_3\right)^2 + \frac{37}{9}x_3^2.$$

Итак, невырожденное линейное преобразование

$$y_1 = x_1 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3,\ \ y_2 = x_2 - \frac{16}{9}x_3,\ y_3 = x_3.$$

Приводить данную квадратичную форму к каноническому виду

$$L_1(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{9}{4}y_2^2 + \frac{37}{9}y_3^2.$$

Канонический вид квадратичной формы не является однозначно определенным, так, как одна и та же квадратичная форма может быть приведена к каноническому виду многими способами. Однако полученные различными способами канонические формы обладают рядом общих свойств.

Например, квадратичную форму L в примере 12 можно было привести к виду

$$L_2(y_1, y_2, y_3) = \frac{37}{4}y_1^2 + y_2^2 - y_3^2,$$

применив невырожденное линейное преобразование

$$y_1 = x_1,\ \ y_2 = 2x_1 + x_2 + x_3,\ y_3 = \frac{7}{2}x_1 + x_2.$$

Как видим, число положительных и отрицательных коэффициентов сохранилось.

Следует отметить, что ранг матрицы квадратичной формы, называется рангом квадратичной формы и равен числу отличных от нуля коэффициентов канонической формы и не меняется при линейных преобразованиях.

<u>Определение</u>. Квадратичная форма $L(x_1, x_2, .., x_n)$называется положительно (отрицательно) определенной, если при всех значениях переменных, из которых хотя бы одно отлично от нуля

$$L(x_1, x_2, .., x_n) > 0 \quad (L(x_1, x_2, .., x_n) < 0).$$

Например, квадратичная форма

$$L_1(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2$$

является положительно определенной, а форма

$$L_2(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - x_3^2$$

является отрицательно определенной.

Теорема. Для того чтобы квадратичная форма $L = X'AX$, было положительно (отрицательно) определенной необходимо и достаточно, чтобы все собственные значений матрицы A были положительны (отрицательны).

Пример 13. Показать, что квадратичная форма

$$L(x_1, x_2) = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$$

является положительно определенной.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 13 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 13-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda^2 - 18\lambda + 56 = 0,$$

откуда собственные значения матрицы $\lambda_1 = 14,\ \lambda_2 = 4$. Так, как корни характеристического уравнения матрицы A положительны, то на основании приведенной теоремы квадратичная форма $L(x_1, x_2) = 13x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2$ положительно определенная.

4.Линейная модель обмена. В качестве примера математической модели экономического процесса, приводящейся к понятию собственного вектора и собственного значения матрицы, рассмотрим линейную модель обмена.

Пусть имеется n стран $S_1, S_2, ..., S_n$ национальный доход каждой из которых равен соответственно $x_1, x_2, .., x_n$. Обозначим коэффициентами a_{ij} долю национального дохода, которую страна S_J тратит на покупку товаров у стран S_i. Будем считать, что весь национальный доход тратится на закупку товаров либо внутри стран, либо на импорт из других стран, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad (j = 1,2,..,n). \qquad (24)$$

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

которая получила название структурной матрицы торговли. В соответствии с (24) сумма элементов любого столбца матрицы A равна 1.

Для любой страны S_J выручка от внутренней и внешней торговли составит:

$$p_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n .$$

Для сбалансированной торговли необходима бездефицитность торговли каждой страны S_i, т.е. выручка от торговли каждой страны должна быть не меньше ее национального дохода:

$$p_i \ge x_i \quad (i = 1,2,\dots,n).$$

Если считать, что $p_i > x_i \quad (i = 1,2,\dots,n)$, то получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n > x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n > x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n > x_n. \end{cases} \qquad (25)$$

Сложив все неравенства системы (25), получим после группировки

$$x_1(a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1} +) + x_2(a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2} +) + \dots +$$
$$+ x_n(a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn} +) > x_1 + x_2 + \dots + x_n .$$

Учитывая (24), выражения в скобках равны единице, и мы приходим к противоречивому неравенству

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n . > x_1 + x_2 + \dots + x_n .$$

Таким образом, неравенство $p_i > x_i \quad (i = 1,2,\dots,n)$ невозможно, и условие $p_i \ge x_i \quad (i = 1,2,\dots,n)$ принимает вид $p_i = x_i \quad (i = 1,2,\dots,n)$. С экономической точки зрения это понятно, так как все страны не могут одновременно получать прибыль.

Вводя вектор $x=(x_1,x_2,..,x_n)$ национальных доходов страны, получим матричное уравнение

$$AX=X,$$

где X - матрица- столбец из координат вектора x т.е. задача свелась к отысканию собственного вектора матрицы A, отвечающего собственному значению $\lambda=1$.

Пример 14. Структурная матрица торговли трех стран S_1,S_2,S_3 имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти национальные доходы стран для сбалансированной торговли.

Решение. Находим собственный вектор x, отвечающий собственному значению $\lambda=1$. Для этого решим систему

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Методом Гаусса. Найдем $x_1=\dfrac{3}{2}c,\ \ x_2=2c,\ \ x_3=c$ т.е. $x=\left(\dfrac{3}{2}c,\ 2c,\ c\right)$.

Полученный результат означает, что сбалансированность торговли трех стран достигается при векторе национальных доходов $x=\left(\dfrac{3}{2}c,\ 2c,\ c\right)$,т.е. при соотношении национальных доходов стран $3/2:2:1$ или $3:4:2$.

ЛИТЕРАТУРЫ

1.Тышкевич Р. И., Феденко А. С. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Минск: Вышейш. школа, 1988.

2. Высшая математика: Общий курс / Под ред. А. И. Яблонского, Минск: Вышейш. школа, 1993.

3. Баврин И. И., Матросов В. Л. Общий курс высшей математики. М.: Просвещение, 1995.

4. Рублев А. Н. Линейная алгебра. М.: Высшая школа, 1998.

5.Е.С. Федорова, Т.А. Шемякина Линейная алгебра. Бишкек-2002г.

6. Ланкастер К. Математическая экономика. М.: 2002.

7. Высшая математика для экономистов // под ред. Н.Ш. Кремера.-М.:ЮНИТИ, 2002г.

8.Общий курс высшей математики для экономистов // под ред. В.И. Ермакова.-М.:ИНФРА-М, 2008г.

9. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 87

10. Сборник задач по высшей математики для экономистов // под ред. В.И. Ермакова.-М.: ИНФРА-М, 2008г.