КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЕСТЕСТВЕННО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

Кафедра математики

Л.Г.Лелевкина, Т.А.Шемякина

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Учебное пособие
по математическому анализу

Издательство Кыргызско-Российского
Славянского университета

Бишкек 2001

517.2

Л 33

УДК 517.9

Лелевкина Л.Г., Шемякина Т.А.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ: Учебное пособие по математическому анализу /Кыргызско-Российский Славянский университет. – Бишкек, 2001. – 44 с.

Кратко изложены теоретические основы по разделу математического анализа «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Приведены многочисленные примеры с методическими рекомендациями по их решению.

Для проведения контрольных работ и для выполнения студентами индивидуальных типовых заданий приведено около 500 задач, скомпонованных в 31 вариант.

Для студентов естественно-технического и экономического факультетов дневной и заочной форм обучения, а также для преподавателей, ведущих практические занятия.

Рецензент: д.ф.-м.н. С.Н.Алексеенко

Печатается по решению
кафедры математики КРСУ и РИСО КРСУ

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений изучаются уравнения и системы уравнений, в которых неизвестными являются функции одного действительного переменного, а в сами уравнения входят производные от неизвестных функций.

Определение 1: Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида

$$F(x,y,y',y'',\dots,y^{(n)})=0, \tag{1}$$

где y – искомая функция,
x – аргумент функции,
n – наивысший порядок производных.

Если его можно разрешить относительно n-производной, то оно имеет вид

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}). \tag{1$'$}$$

Определение 2: Общим решением (интегралом) дифференциального уравнения n-порядка (1) называется функция

$$y=\varphi(x,c_1,\dots,c_n) \quad (\Phi(x,y,c_1,c_2,\dots,c_n)=0\ ), \tag{2}$$

если она является его решением при любых значениях постоянных $c_1,\dots,c_n$.

Определение 3: Частным решением (интегралом) уравнения (1) называется функция

$$y=\varphi(x,c_1^0,\dots,c_n^0) \quad (\Phi(x,y,c_1^0,c_2^0,\dots,c_n^0)=0\ ), \tag{3}$$

которая получается из общего решения (интеграла) (2) при определенных значениях постоянных, вычисленных с использованием заданных начальных условий

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\ \ y'\big|_{x=x_0}=y_0',\ \dots,\ y^{(n-1)}=y_0{}^{(n-1)}. \tag{4}$$

График частного решения называется интегральной кривой.

Определение 4: Особым решением уравнения (1) называется решение уравнения (1), которое не может быть получено из общего решения (интеграла) (2) ни при каких частных значениях произвольных постоянных $c_1,...,c_n$.

Решить дифференциальное уравнение n-го порядка значит:
1) найти его общее решение,
2) найти то частное решение, которое удовлетворяет заданным начальным условиям.

I. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1.1. Уравнения с разделенными и разделяющимися переменными

Определение 1: Уравнение вида
$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$
называется уравнением с разделенными переменными, а интеграл –
$$\int M(x)dx = -\int N(y)dy$$
– общим интегралом этого уравнения.

Определение 2: Уравнение вида
$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$$
называется уравнением с разделяющимися переменными.

Это уравнение сводится к уравнению с разделенными переменными

$M_1(x)N_1(y)dx = -M_2(x)N_2(y)dy$

$M_1(x)/M_2(x)dx = -N_2(y)/N_1(y)dy$

$\int M_1(x)/M_2(x)dx = -\int N_2(y)/N_1(y)dy$ – общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 1:

$y' = -y/x$,

$dy/dx = -y/x$, $\quad dy/y = -dx/x$,

$\ln|y| = -\ln|x| + \ln c$, $\quad yx = c$, $\; y = c/x$.

Пример 2: Задача о скорости охлаждения тела

$dy/dt = K(y-20)$,

$dy/(y-20) = Kdt$,

$\ln|y-20| = Kt + \ln c$,

$y = 20 + ce^{kt}$, $\quad$ c – ? $\;$ K – ?

$y|_{t=0} = 100$, $\quad y|_{t=20} = 60$,

$100 = 20 + ce^{K \cdot 0}$, $\quad c = 80$,
$60 = 20 + ce^{K \cdot 20}$, $\quad e^{20K} = 40/80 = 1/2$, $\; e^K = (1/2)^{1/20}$,
$y = 20 + 80(1/2)^{(1/20)t}$.

1.2. Однородные уравнения

***<u>Определение 1</u>*:** Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если его можно записать в виде:

$$y' = \varphi(y/x),$$

где правая часть есть функция только относительно y/x.

Примеры:

$dy/dx = (y/x)^3 + \sin(y/x) + 2$,

$dy/dx = \ln(y/x) + 3e^{y/x}$.

<u>Определение 2:</u> Дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным, если f(x,y) является отношением однородных многочленов одной и той же степени.

<u>Определение 3:</u> Однородным многочленом степени «n» называется многочлен, сумма показателей переменных в каждом члене которого равна «n».

Примеры:

$f(x) = x^2 + 2xy + y^2$,

$f(x) = x^3 + 3x^2y + 3y^2x + y^3$,

$y' = (x^2 + y^2)/(2xy) = ((x^2 + y^2)/(x^2))/(2xy/x^2) = (1 + (y/x)^2)/(2y/x)$.

В однородном уравнении переменные не разделены, но их можно свести к уравнениям с разделяющимися переменными подстановкой:

$z(x) = y/x, \quad y = zx, \quad y' = z'x + z$,

тогда уравнение запишется в виде:

$z'x + z = \varphi(z)$,

$(dz/dx)x = \varphi(z) - z$,

$dz/(\varphi(z) - z) = dx/x$, полагая $\varphi(z) - z \neq 0$,

$\ln|x| = \int dz/(\varphi(z) - z) + c$.

Находя интеграл и возвращаясь к исходным переменным, получим общее решение дифференциального уравнения.

1.3. Линейные уравнения

<u>Определение:</u> Линейным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно неизвестной функции *y* и ее производной *y′*:

$$dy/dx + P(x)y = Q(x),$$

где $P(x), Q(x)$ – заданные непрерывные функции от *x*; *y, y′* – функции первой степени.

Примеры:

$xy' = y + e^x$,

$yy' + xy^3 = \sin x$.

Решение линейного уравнения ищется в виде произведения двух функций от *x*. Одна из них произвольная, другая определяемая из линейного уравнения.

$y = u(x)v(x)$

$dy/dx = vdu/dx + udv/dx$

$vdu/dx + udv/dx + Puv = Q$

$vdu/dx + u(dv/dx + Pv) = Q$.

Выбираем функцию *v* так, чтобы выполнялось уравнение:

$dv/dx + Pv = 0$

$dv/v = -Pdx$

$\ln|v| = -\int P(x)dx + c$

$v = e^{-\int p(x)dx + c}$, $\qquad v = e^{-\int p(x)dx}$, полагая $c = 0$.

Теперь найдем функцию *u*, подставляя значение *v* в уравнение:

$e^{-\int p(x)dx} du/dx = Q(x)$

$du = e^{\int P(x)dx} Q(x)dx$

$u = \int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + c$

$y = e^{-\int P(x)dx}[\int e^{\int P(x)dx} Q(x)dx + c]$

Пример:

$y' - y/x = x^2$, $P = -1/x, Q = x^2$

$y = uv,$, $y' = u'v + uv'$,

$u'v + u(v' - v/x) = x^2$

$v' - v/x = 0$, $dv/dx = v/x$, $\ln|v| = \ln|x|$, $v = x$.

$xdu/dx = x^2$, $du = xdx$, $u = x^2/2 + c$

$y = x(x^2/2 + c)$

1.4. Уравнение Бернулли

Определение: Уравнение вида

$$dy/dx + P(x)y = Q(x)y^n$$

называется уравнением Бернулли, где $n \neq 0, n \neq 1$.

1) $n = 0$, $y' + P(x)y = Q(x)$ – линейное уравнение,

2) $n = 1$ $y' + [P(x) - Q(x)]y = 0$ – уравнение с разделяющимися переменными.

Эти уравнения рассматривались в п.1.1, п.1.3. Уравнение Бернулли сводится к линейному уравнению. Разделим все члены уравнения на y^n: $y^{-n}y' + Py^{1-n} = Q$

Сделаем замену: $z = y^{1-n}$, $z' = (1-n)(y^{-n}y')$

$z'/(1-n) + Pz = Q$,

Получим $z' + (1-n)Pz = (1-n)Q$ – линейное уравнение.

Пример:

$y' + xy = x^3y^3$

$y^{-3}y' + xy^{-2} = x^3$

$z = y^{-2}$, $z' = -2y^{-3}y'$

$z'/(-2) + xz = x^3$

$z' - 2xz = -2x^3$,

Полученное уравнение решается заменой $z = uv$

1.5. Уравнения в полных дифференциалах

Определение: Уравнение вида

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах,
где $M(x,y), N(x,y)$ – непрерывные, дифференцируемые функции, для которых выполнено: $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$

это равенство является необходимым и достаточным условием, чтобы левая часть уравнения была полным дифференциалом $du(x,y) = 0$, $u(x,y) = c$ – общий интеграл.

Действительно, $M(x,y)dx + N(x,y)dy = du = (\partial u/\partial x)dx + (\partial u/\partial y)dy$

$M = \partial u/\partial x$, $N = \partial u/\partial y$.

$\partial M/\partial y = \partial^2 u/(\partial x \partial y)$, $\partial N/\partial x = \partial^2 u/(\partial x \partial y)$

$\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$

Из условия $\partial u/\partial x = M(x,y)$ находим $u = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \varphi(y)$.

Учитывая $N = \partial u/\partial y$, находим $\partial u/\partial y = \int_{x_0}^{x} \partial M/\partial y dx + \varphi'(y) = N(x,y)$.

Подберем $\varphi(y)$ таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$:

$\int_{x_0}^{x} \partial N/\partial x dx + \varphi'(y) = N$ $N(x,y)\Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) = N(x,y)$

$N(x,y) - N(x_0,y) + \varphi'(y) = N(x,y)$

$\varphi'(y) = N(x_0,y)$ $\varphi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + c_1$

$u = \int_{x}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + c_1$

Приравниваем $u = c$, тогда получим общий интеграл:

$\int_{x}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy = c$

Пример:

$(2y - 3)dx + (2x + 3y^2)dy = 0$

$M(x,y) = 2y - 3$, $N(x,y) = 2x + 3y^2$

$\partial M/\partial y = 2$ $\partial N/\partial x = 2$ $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$

$u = \int (2y-3)dx = 2xy - 3x + \varphi(y)$

$\partial u / \partial y = 2x + \varphi'(y) = 2x + 3y^2$

$\varphi'(y) = 3y^2, \qquad \varphi(y) = y^3 + c_1$

$u = 2xy - 3x + y^3 + c_1$

$2xy - 3x + y^3 = c$

$u = \int (2y-3)dx = 2xy - 3x + \varphi(y)$

$u = \int (2x + 3y^2)dy = 2xy + y^3 + \psi(x)$

$u = 2xy - 3x + y^3 = c$.

II. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

2.1. Уравнения, допускающие понижение порядка

Рассмотрим некоторые виды дифференциальных уравнений n-го порядка, допускающие понижение порядка.

а) Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ **.**

Его можно записать в следующем виде:

$d(y^{(n-1)}) / dx = f(x)$

$d(y^{(n-1)}) = f(x)dx$.

Интегрируя уравнение $\int d(y^{(n-1)}) = \int f(x)dx$, в результате понизим порядок уравнения:

$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + c_1$

$d(y^{(n-2)}) / dx = \int f(x)dx + c_1$

$y^{(n-2)} = \int [\int f(x)dx + c_1]dx + c_2$

…………………………………

Интегрируя n-раз, найдем общее решение дифференциального уравнения.

Пример:

$y''' = \sin 4x$

$y'' = \int \sin 4x dx = -\cos 4x / 4 + c_1$

$y' = \int [-\cos 4x / 4 + c_1]dx = -\sin 4x / 16 + c_1 x + c_2$

$y = \cos 4x / 64 + c_1 x^2 / 2 + c_2 x + c_3$.

б) Уравнение вида $y'' = f(y, y')$.

Это уравнение явно не содержит *x*. Для понижения порядка вводим новую функцию $P(y)$, полагая $y' = P(y)$,

$y'' = P'_y y'_x$, $y'' = dP(y(x)) / dx = (dP / dy)(dy / dx) = P'_y P$,

тогда уравнение примет вид:

$$(dP / dy)P = f(y, P) .$$

Это дифференциальное уравнение первого порядка относительно *P*.

Его общее решение равно $P(y) = \varphi(y, c_1)$. Зная это решение, получаем

$dy / dx = \varphi(y, c_1)$ – уравнение с разделенными переменными.

Решая его, получаем

$\int dy / \varphi(y, c_1) = x + c_2$ – общий интеграл первоначального уравнения.

Пример:

$1 + y'^2 = 2yy''$

Полагая $y' = p(y)$, $\qquad y'' = p'_y y'_x$,

получим дифференциальное уравнение относительно *p*:

$1 + p^2 = 2y(dp / dy)p$

$dy / y = 2pdp / (1 + p^2)$

$\ln|y| = \ln\left|1 + p^2\right| - \ln c_1$

$1 + p^2 = c_1 y , \qquad p = (c_1 y - 1)^{1/2}$

$dy / dx = (c_1 y - 1)^{1/2}$

$x + c_2 = 2(c_1 y - 1)^{1/2} / c_1$ – общий интеграл.

в) Уравнение вида $y'' = f(x, y')$.

Это дифференциальное уравнение, которое не содержит явно *y*. Заменяя $y' = p(x)$, $y'' = p'(x)$, получим:

$p' = f(x, p)$ – уравнение первого порядка относительно p.

$p = p(x, c_1)$ – общее решение последнего уравнения. Зная это решение, можно решить уравнение:

$$dy / dx = p(x, c_1) .$$

Пример:

$(1 + x^2) y'' - 2xy' = 0$,

$y' = p(x), y'' = p'$,

$(1 + x^2) p' - 2xp = 0$,

$\int dp / p = \int 2xdx / (1 + x^2)$

$\ln|p| = \ln(1 + x^2) + \ln c_1$

$p = c_1(1 + x^2)$

$dy / dx = c_1(1 + x^2)$, $\quad dy = c_1(1 + x^2)dx$

$y = c_1(x + x^3 / 3) + c_2$ – общее решение.

Выделим частное решение. Пусть даны начальные условия

$y|_{x=1} = 0$, $y'|_{x=1} = 1$.

$\begin{cases} 0 = 4c_1 / 3 + c_2, \\ 1 = 2c_1, \end{cases}$, $\quad \begin{cases} c_2 = -2/3 \\ c_1 = 1/2 \end{cases}$

$y = x^3 / 6 + x / 2 - 2/3$ – частное решение.

2.2. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

<u>Определение:</u> Дифференциальное уравнение n-го порядка называется линейным, если оно первой степени относительно $y, y', ..., y^{(n)}$, т.е. имеет вид

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = F(x) . \qquad (1)$$

Предполагается, что $a_0, a_1, ..., a_n, F$ непрерывные функции от x или постоянные, $a_0 = 1$, $F(x)$ – правая часть уравнения.

Если $F(x) \neq 0$, то уравнение неоднородное.

Если $F(x) = 0$, то уравнение однородное.

Рассмотрим метод решения на уравнениях второго порядка:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = F(x) . \qquad (2)$$

Пусть дано линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 , \qquad (3)$$

$a_1, a_2 - const$.

Чтобы найти общий интеграл этого уравнения, достаточно найти два линейно независимых решения. Общее решение имеет вид:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 .$$

Частные решения будем искать в виде $y = e^{kx}$, $k = const$, тогда $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$. Подставляя полученные выражения в уравнение (3), находим $e^{kx}(k^2 + a_1 k + a_2) = 0$. Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + a_1 k + a_2 = 0 \qquad (4)$$

– характеристическое уравнение.

Его корни $k_1 = -a_1 / 2 + (a_1{}^2 / 4 - a_2)^{1/2}$, $k_2 = -a_1 / 2 - (a_1{}^2 / 4 - a_2)^{1/2}$.

Возможны следующие случаи:

а) Если корни k_1, k_2 – действительные, не равные между собой числа, $D > 0$. Частными решениями будут $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$.

Следовательно, общий интеграл имеет вид:

$$y_{00} = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} .$$

Пример:

$y'' + y' - 2y = 0$

$k^2 + k - 2 = 0$, $\quad k_1 = 1, \quad k_2 = -2$

$y_{00} = c_1 e^x + c_2 e^{-2x}$

б) Если корни $k_1 = k_2 = k$ – действительные, $D = 0$, тогда положим $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$.

$y_{00} = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}$ – общий интеграл.

Пример:

$y'' - 4y' + 4y = 0$

$k^2 - 4k + 4 = 0$, $\quad k_1 = k_2 = 2$

$y_{00} = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$.

в) Если корни k_1, k_2 – комплексно сопряженные, $D<0$.

$k_{1,2}=\alpha\pm\beta i, \quad \alpha=-a_1/2, \quad \beta=(a_2-a_1{}^2/4)^{1/2}$

$y_{00}=e^{\alpha x}[c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x]$ – общий интеграл.

Пример:

$y''+2y'+5y=0$

$k^2+2k+5=0$

$k_1=-1+2i, k_2=-1-2i$,

$y_{00}=e^{-x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$.

2.3. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим уравнение

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=F(x). \qquad (1)$$

Это уравнение можно записать в следующем виде:

$$y''+py'+qy=f(x), \qquad (1')$$

p, q – постоянные, $f(x)$ – известная функция.

Общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{он}=y_{оо}+y_{чн},$$

где y_{00} – общее решение соответствующего однородного уравнения,

$y_{чн}$ – частное решение неоднородного уравнения.

Метод нахождения y_{00} был изложен. Для нахождения $y_{чн}$ применяют метод вариации произвольных постоянных.

2.3.1. Уравнения второго порядка со специальной правой частью

Для уравнений с постоянными коэффициентами, правые части которых имеют специальный вид, существует более простой способ нахождения $y_{чн}$. Он называется методом неопределенных коэффициентов или методом подбора формы частного решения. Рассмотрим несколько таких случаев.

Первый случай: $f(x)=P_n(x)e^{\alpha x}$,

где $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n$

Составим характеристическое уравнение $k^2+pk+q=0$.

а) Если α – не является корнем характеристического уравнения. Тогда нужно $y_{чн}$ искать в виде:

$$y_{чн}=Q_n(x)e^{\alpha x},$$

$Q_n(x)=A_0x^n+A_1x^{n-1}+...+A_{n-1}x+A_n$ – многочлен той же степени «n» с неизвестными коэффициентами $A_0, A_1, ...A_{n-1}, A_n$. Действительно, подставляя в неоднородное дифференциальное уравнение частное решение и сокращая на $e^{\alpha x}$ будем иметь:

$$Q_n''(x)+(2\alpha+p)Q_n'(x)+(\alpha^2+p\alpha+q)Q_n(x)=P_n(x)$$

где $Q_n(x)$ – многочлен степени «n», $Q_n'(x)$ – многочлен степени «n-1», $Q_n''(x)$ – многочлен степени «n-2». Для нахождения коэффициентов $A_0, A_1, ...A_{n-1}, A_n$, приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях *x*.

б) Если α – простой корень характеристического уравнения $\alpha=k_1$ или $\alpha=k_2$. Тогда решение $y_{чн}$ надо искать в виде

$$y_{чн}=xQ_n(x)e^{\alpha x}.$$

в) Если α – двукратный корень характеристического уравнения, т.е. $\alpha=k_1=k_2$. Тогда решение $y_{чн}$ надо искать в виде

$$y_{чн}=x^2Q_n(x)e^{\alpha x}.$$

Пример 1:

$y''+3y'+2y=x^2$

$k^2+3k+2=0$, $k_1=-1$, $k_2=2$

$y_{00}=c_1e^{-x}+c_2e^{-2x}$.

Так как правая часть есть многочлен второй степени и ни один корень характеристического уравнения не совпадает с $\alpha=0$, то частное решение ищем в виде

$$y_{чн}=(Ax^2+Bx+C)e^{0x}=Ax^2+Bx+C$$

$A-?B-?C-?$

Находим $y'=2Ax+B$, $y''=2A$ и подставляя в дифференциальное уравнение, получим:

$$2A+3(2Ax+B)+2(Ax^2+Bx+C)=x^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, найдем коэффициенты A, B, C и этим самым частное решение

$$y_{чн} = x^2/2 - 3x/2 + 7/4 .$$

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$$y_{он} = x^2/2 - 3x/2 + 7/4 + c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} .$$

Второй случай: $f(x) = (M\cos\beta x + N\sin\beta x)e^{\alpha x}$**,**
где α, M, N, β – заданные числа. Следует искать $y_{чн}$ в виде:

а) $y_{чн} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)e^{\alpha x}$,
если $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения.
A, B – неизвестные коэффициенты, которые находят путем подстановки $y_{чн}$ в дифференциальное уравнение и приравнивая коэффициенты при $\cos\beta x, \sin\beta x$.

б) $y_{чн} = (A\cos\beta x + B\sin\beta x)xe^{\alpha x}$,
если $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения.

Пример:

$y'' + 9y = \cos 3x e^x$

$k^2 + 9 = 0$, $\quad k_{1,2} = \pm 3i$

$y_{00} = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x$

Частное решение ищем в виде: $\quad y_{чн} = (A\cos 3x + B\sin 3x)e^x$.

Подставляя в дифференциальное уравнение значения производной и функции, находим $A = 1/37, B = 6/37$ и частное решение будет:

$$y_{чн} = (\cos 3x + \sin 3x)e^x/37 .$$

Общее неоднородного уравнения будет:

$$y_{он} = (\cos 3x + \sin 3x)e^x/37 + c_1\cos 3x + c_2 \sin 3x .$$

Пример 2:

$y'' - 2y' - 3y = (x+2)e^{3x}$

$k^2 - 2k - 3 = 0$, $\quad k_1 = -1, k_2 = 3$

$y_{00} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$

$y_{чн} = x(Ax + B)e^{3x}$

$A = 1/8, B = 7/16$

$y_{он} = x(x/8 + 7/16)e^{3x} + c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$

Третий случай: $f(x) = (P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$**,**
где $P_n(x)$ – многочлен степени «n», $Q_m(x)$ – многочлен степени «m». Следует искать $y_{чн}$ в виде:

а) $y_{чн} = (A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$, если $\alpha \pm \beta i$ не является корнем характеристического уравнения. $A(x), B(x)$ – многочлены, степень которых равна наивысшей степени многочленов $P_n(x), Q_m(x)$;

б) $y_{чн} = x(A(x)\cos\beta x + B(x)\sin\beta x)e^{\alpha x}$, если $\alpha \pm \beta i$ является корнем характеристического уравнения.

Пример:

$y'' + y = (4x\sin x)$

$k^2 + 1 = 0$, $\quad k_{1,2} = \pm 1i$

$y_{00} = c_1\cos x + c_2 \sin x$

$y_{чн} = x[(Ax + B)\cos x + (A_1 x + B_1)\sin x]$

Подставляя в дифференциальное уравнение значение производной и функции, находим $A = -1,\ B = 0,\ A_1 = 0,\ B_1 = 1$ и частное решение неоднородного уравнения: $\quad y_{чн} = x(\sin x - x\cos)$.

Общее решение неоднородного уравнения имеет вид:

$y_{он} = x(\sin x - x\cos x) + c_1\cos x + c_2 \sin x$.

2.3.2. Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа)

Мы показали, что для нахождения общего решения линейного неоднородного уравнения, достаточно найти общее решение соответствующего однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения

$$y_{он} = y_{oo} + y_{чн} .$$

Укажем общий метод нахождения общего решения неоднородного уравнения. Напишем общее решение однородного уравнения y_{oo}:

$$y_{00} = c_1 y_1 + c_2 y_2 , \qquad (5)$$

где y_1, y_2 – частные решения, образующие фундаментальную систему.

Будем искать частное решение неоднородного уравнения (1′) в форме (5), рассматривая c_1, c_2 как некоторые пока неизвестные функции от x.

Продифференцируем равенство (5). Подберем c_1, c_2 так, чтобы выполнялась система уравнений:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' = f(x). \end{cases}$$

Определитель системы уравнений есть определитель Вронского и для линейно независимых функций выполняется:

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Решая систему уравнений, найдем c_1', c_2' как функции от x, т.е. $c_1' = \varphi_1(x)$, $c_2' = \varphi_2(x)$. Тогда $c_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + \overline{c_1}$, $c_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + \overline{c_2}$, где $\overline{c_1}$, $\overline{c_2}$ – постоянные интегрирования.

Подставляя полученные выражения c_1, c_2 в (5), найдем интеграл, зависящий от произвольных постоянных $\overline{c_1}$, $\overline{c_2}$, т.е. общее решение неоднородного уравнения.

Пример:

$y'' + 4y = 1/\cos 2x$

$k^2 + 4 = 0$, $\quad k_{1,2} = \pm 2i$

$y_{00} = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$

$$\begin{cases} c_1' \sin 2x + c_2' \cos 2x = 0 \\ 2c_1' \cos 2x - 2c_2' \sin 2x = 1/\cos 2x \end{cases}$$

$c_1' = 1/2$, $c_2' = -tg 2x/2$

$c_1 = x/2 + \overline{c_1}$

$c_2 = \ln|\cos 2x|/4 + \overline{c_2}$.

Общее решение неоднородного уравнения будет:

$y_{он} = (x/2 + \overline{c_1})\sin 2x + (\ln|\cos 2x|/4 + \overline{c_2})\cos 2x$.

III. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Во многих задачах математики, физики, техники требуется определить сразу несколько функций, связанных между собой дифференциальными уравнениями. Совокупность таких уравнений называется системой дифференциальных уравнений.

<u>Определение 1:</u> Системой линейных дифференциальных уравнений первого порядка называется совокупность уравнений, в каждое из которых входят независимые переменные искомых функций и их первые производные.

Пример:

$$\begin{cases} dx/dt = 5x + y \\ dy/dt = 3x - 2y. \end{cases}$$

<u>Определение 2:</u> Система линейных дифференциальных уравнений первого порядка, представленная в виде

$$\begin{cases} dy_1/dx = f_1(x, y_1, ..., y_n) \\ .... \\ dy_n/dx = f_n(x, y_1, ..., y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

называется системой в нормальной форме или нормальной системой.

<u>Определение 3:</u> Общее решение нормальной системы (1) имеет вид

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, c_1, ..., c_n) \\ .... \\ y_n = \varphi_n(x, c_1, ..., c_n), \end{cases}$$

где $c_1, c_2, ..., c_n$ – произвольные постоянные.

Начальные условия:

$$y_1|_{x=x_0} = y_{10}, \quad y_2|_{x=x_0} = y_{20}, \ldots, y_n|_{x=x_0} = y_{n0} .$$

С помощью начальных условий из общего решения выделяют частное. Подставляя начальные условия в общее решение, получаем систему для определения произвольных постоянных.

$$\begin{cases} y_{10} = \varphi_1(x_0, c_1, ..., c_n) \\ .... \\ y_{n0} = \varphi_n(x_0, c_1, ..., c_n). \end{cases}$$

Определение 4: Совокупность функций $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$, обращающих каждое из уравнений системы (1) в тождество, называется решением системы (1).

Определение 5: Порядком системы (1) дифференциальных уравнений называется наивысший из порядков уравнений, входящих в эту систему. Следовательно, нормальная система (1) первого порядка.

Наиболее распространенным *методом* решения нормальных систем является *сведение их к дифференциальным уравнениям высших порядков.* Для простоты изложения эту методику покажем на примере.

Пример: Пусть дана система

$$\begin{cases} dx/dt = -7x + y \\ dy/dt = -2x - 5y. \end{cases}$$

Одно из уравнений системы (например, первое уравнение; в этом случае стремятся получит дифференциальное уравнение относительно x) продифференцируем почленно по t и получим уравнение второго порядка.

$$x'' = -7x' + y'.$$

Выразим из первоначальной системы уравнений y, y' через x, x' т.е.

$$y = x' + 7x, \qquad y' = -2x - 5y = -2x - 5(x' + 7x) = -5x' - 37x$$

и подставим в уравнение второго порядка относительно x:

$$x'' = -7x' + y' = -12x' - 37x.$$

Мы получили уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение этого уравнения будет:

$$x = c_1 e^{-6t}\cos t + c_2 e^{-6t}\sin t.$$

Находим производную и, подставляя x, x' в значение для y получим:

$$y = c_1 e^{-6t}(\cos t - \sin t) + c_2 e^{-6t}(\sin t + \cos t).$$

Другим методом решения систем линейных дифференциальных уравнений будет *метод с использованием характеристического уравнения.*

Определение 6: Система линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид:

$$\begin{cases} dx_1/dt = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ .... \\ dx_n/dt = a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n, \end{cases} \tag{1'}$$

где $a_{i,j}(i = 1,...,n,\ j = 1,...,n)$ – постоянные, t – аргумент, $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$ – искомые функции.

Будем искать частное решение в виде

$$x_1 = \alpha_1 e^{kt}, x_2 = \alpha_2 e^{kt}, ..., x_n = \alpha_n e^{kt}. \tag{2}$$

Подставляя в (1′) выражения (2), получим:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + ... + a_{1n}\alpha_1 = 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - k) + ... + a_{2n}\alpha_n = 0 \\ .... \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + ... + (a_{nn} - k) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Выберем $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ и k таким, чтобы удовлетворить системе (3). Составим определитель системы (3).

$$\Delta(k) = \begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - k \end{vmatrix} \tag{4}$$

Если k таково, что $\Delta \neq 0$, то (3) имеет только тривиальное решение $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, а значит (2) дают тривиальное решение $x_1(t) = x_2(t) = ... = x_n(t) = 0$.

Нетривиальное решение получаем при таких k, при которых $\Delta = 0$. Получим:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - k & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} - k \end{vmatrix} = 0$$

– характеристическое уравнение, где $k_1, k_2, ..., k_n$ – корни характеристического уравнения.

Для каждого k_i напишем систему (3) и определим коэффициенты $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, ..., \alpha_n^{(i)}$.

1. Если корни $k_1, k_2, ..., k_n$ – действительные, различные.

Для $k_1, k_2, ..., k_n$ решение (2) для уравнения (1′) имеет вид:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t}, \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t}, ..., \ x_n^{(1)} = \alpha_n^{(1)} e^{k_1 t} \\ x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, \ x_2^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t}, ..., \ x_n^{(2)} = \alpha_n^{(n)} e^{k_2 t} \\ .... \\ x_1^{(n)} = \alpha_1^{(n)} e^{k_n t}, \ x_n^{(n)} = \alpha_2^{(n)} e^{k_n t}, ..., \ x_n^{(n)} = \alpha_n e^{k_n t}. \end{cases}$$

Тогда общее решение системы (1′) будет иметь вид:

$$\begin{cases} x_1 = c_1 \alpha_1^{(1)} e^{k_1 t} + c_2 \alpha_1^{(2)} e^{k_2 t} + ... + c_n \alpha_1^{(n)} e^{k_n t} \\ x_2 = c_1 \alpha_2^{(1)} e^{k_1 t} + c_2 \alpha_2^{(2)} e^{k_2 t} + ... + c_n \alpha_2^{(n)} e^{k_n t} \\ .... \\ x_n = c_1 \alpha_n^{(1)} e^{k_n t} + c_2 \alpha_n^{(2)} e^{k_2 t} + ... + c_n \alpha_n^{(n)} e^{k_n t}. \end{cases}$$

2. Если корни характеристического уравнения различные, но среди них есть комплексные $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$.

Этим корням будут соответствовать решения:

$x_j^{(1)} = \alpha_j^{(1)} e^{(\alpha + i\beta)t}, (j = 1,2,...,n)$

$x_j^{(2)} = \alpha_j^{(2)} e^{(\alpha - i\beta)t}, (j = 1,2,...,n),$

$\overline{x}_j^{(1)} = e^{\alpha t} (\lambda_j^{(1)} \cos \beta x + \lambda_j^{(2)} \sin \beta x)$

$\overline{x}_j^{(2)} = e^{\alpha t} (\overline{\lambda}_j^{(1)} \sin \beta x + \overline{\lambda}_j^{(2)} \cos \beta x)$,

где $\lambda_j^{(1)}, \lambda_j^{(2)}, \overline{\lambda}_j^{(1)}, \overline{\lambda}_j^{(2)}$ – действительные числа, определяемые через $\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}$. Коэффициенты $\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}$ определяются из системы уравнений (3). Общее решение представляется комбинацией из этих равенств.

Пример: $\begin{cases} dx_1 / dt = 2x_1 + 2x_2 \\ dx_2 / dt = x_1 + 3x_2 \end{cases}$.

Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-k & 2 \\ 1 & 3-k \end{vmatrix} = 0, \quad k^2 - 5k + 4 = 0 \quad k_1 = 1, k_2 = 4.$$

Решение ищется в виде

$$x_1^{(1)} = \alpha_1^{(1)} e^t, \quad x_2^{(1)} = \alpha_2^{(1)} e^t \qquad x_1^{(2)} = \alpha_1^{(2)} e^{4t}, \quad x_2^{(2)} = \alpha_2^{(2)} e^{4t}.$$

Составим систему (3) для $k_1 = 1$ и определяем $\alpha_j^{(1)}, \alpha_j^{(2)}$.

$$\begin{cases} (2-1)\alpha_1^{(1)} + 2\alpha_2^{(1)} = 0 \\ 1\alpha_1^{(1)} + (3-1)\alpha_2^{(1)} = 0 \end{cases}$$

т.е. $\alpha_2^{(1)} = -\alpha_1^{(1)} / 2$.

Полагая $\alpha_1^{(1)} = 1$, получим $\alpha_2^{(1)} = -1/2$, $x_1^{(1)} = e^t$, $x_2^{(1)} = -e^t / 2$.

Составим систему (3) для $k_2 = 4$ и определяем $\alpha_j^{(2)}, \alpha_j^{(2)}$.

$$\begin{cases} -2\alpha_1^{(2)} + 2\alpha_2^{(2)} = 0 \\ \alpha_1^{(2)} - 1\alpha_2^{(2)} = 0 \end{cases}$$

т.е. $\alpha_1^{(2)} = \alpha_2^{(2)}$.

Полагая $\alpha_1^{(2)} = 1$, получим $\alpha_2^{(2)} = 1$ и $x_1^{(2)} = e^{4t}$, $x_2^{(2)} = e^{4t}$.

Тогда общее решение системы (1′) имеет вид:

$$x_1 = c_1 e^t + c_2 e^{4t}, \qquad x_2 = -c_1 e^t / 2 + c_2 e^{4t}.$$

IV. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ТИПОВЫХ РАСЧЕТОВ

4.1. Типовой расчет по теме «Дифференциальные уравнения 1 порядка»

Задача 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения. (Ответ представить в виде ($\psi(x, y) = C$)).

1.1. $4xdx - 3ydy = 3x^2 ydy - 2xy^2 dx$.

1.2. $x(1 + y^2)^{1/2} + yy'(1 + x^2)^{1/2} = 0$.

1.3. $(4 + y^2)^{1/2} dx - ydy = x^2 ydy$.

1.4 $(3 + y^2)^{1/2} dx - ydy = x^2 ydy$.

1.5. $6xdx - 6ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx$.

1.6. $x(3+y^2)^{1/2}dx + y(2+x^2)^{1/2}dy = 0$.

1.7. $(e^{2x}+5)dy + ye^{2x}dx = 0$.

1.8. $y'y(\dfrac{1-x^2}{1-y^2})^{1/2} + 1 = 0$.

1.9. $6xdx - 6ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$.

1.10. $x(5+y^2)^{1/2}dx + y(4+x^2)^{1/2}dy = 0$.

1.11. $y(4+e^x)dy - e^xdx = 0$.

1.12. $(4-x^2)^{1/2}y' + xy^2 + x = 0$.

1.13. $2xdx - 2ydy = x^2ydy - 2xy^2dx$.

1.14. $x(4+y^2)^{1/2}dx + y(1+x^2)^{1/2}dy = 0$.

1.15. $(8+e^x)dy - ye^xdx = 0$.

1.16. $(5+y^2)^{1/2} + y'y(1-x^2)^{1/2}dy = 0$.

1.17. $6xdx - ydy = yx^2dy - 3xy^2dx$.

1.18. $y\ln y + xy' = 0$.

1.19. $(1+e^x)y' = ye^x$.

1.20. $(1-x^2)^{1/2}y' + xy^2 + x = 0$.

1.21. $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx$.

1.22. $y(1+\ln y) + xy' = 0$.

1.23. $(3+e^x)yy' = e^x$.

1.24. $(3+y^2)^{1/2} + (1-x^2)^{1/2}yy' = 0$.

1.25. $xdx - ydy = yx^2dy - xy^2dx$.

1.26. $(5+y^2)^{1/2}dx + 4(x^2y+y)dy = 0$.

1.27. $(1+e^x)yy' = e^x$.

1.28. $3(x^2y+y)dy + (2+y^2)^{1/2}dx = 0$.

1.29. $2xdx - ydy = x^2ydy - xy^2dx$.

1.30. $2x + 2xy^2 + (2-x^2)^{1/2}y' = 0$.

1.31. $20xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 5xy^2dx$.

Задача 2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

2.1. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 4\dfrac{y}{x} + 2$.

2.2. $xy' = \dfrac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$.

2.3. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

2.4. $xy' = (x^2+y^2)^{1/2} + y$.

2.5. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 3$.

2.6. $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$.

2.7. $y' = \dfrac{x+2y}{2x-y}$

2.8. $xy' = 2(x^2+y^2)^{1/2} + y$.

2.9. $3y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 4$

2.10. $xy' = \dfrac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}$.

2.11. $y' = \dfrac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}$

2.12. $xy' = (2x^2+y^2)^{1/2} + y$.

2.13. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6$

2.14. $xy' = \dfrac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$.

2.15. $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}$

2.16. $xy' = 3(x^2+y^2)^{1/2} + y$.

2.17. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 8$

2.18. $xy' = \dfrac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$.

2.19. $y' = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$

2.20. $xy' = 3(2x^2+y^2)^{1/2} + y$.

2.21. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 12$.

2.22. $xy' = \dfrac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$.

2.23. $y' = \dfrac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$.

2.24. $xy' = 2(3x^2+y^2)^{1/2} + y$.

2.25. $4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 5$

2.26. $xy' = \dfrac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$.

2.27. $y' = \dfrac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}$.

2.28. $xy' = 4(x^2+y^2)^{1/2} + y$.

2.29. $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10$.

2.30. $xy' = 4(2x^2 + y^2)^{1/2} + y$.

2.31. $y' = \frac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$.

Задача 3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

3.1. $y' = \frac{x + 2y - 3}{2x - 2}$.

3.2. $y' = \frac{x + y - 2}{2x - 2}$.

3.3. $y' = \frac{3y - x - 4}{3x + 3}$.

3.4. $y' = \frac{2y - 2}{x + y - 2}$.

3.5. $y' = \frac{x + y - 2}{3x - y - 2}$.

3.6. $y' = \frac{2x + y - 3}{x - 1}$.

3.7. $y' = \frac{x + 7y - 8}{9x - y - 8}$.

3.8. $y' = \frac{x + 3y + 4}{3x - 6}$.

3.9. $y' = \frac{3y + 3}{2x + y - 1}$.

3.10. $y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$.

3.11. $y' = \frac{x - 2y + 3}{-2x - 2}$.

3.12. $y' = \frac{x + 8y - 9}{10x - y - 9}$.

3.13. $y' = \frac{2x + 3y - 5}{5x - 5}$.

3.14. $y' = \frac{4y - 8}{3x + 2y - 7}$.

3.15. $y' = \frac{x + 3y - 4}{5x - y - 4}$.

3.16. $y' = \frac{y - 2x + 3}{x - 1}$.

3.17. $y' = \frac{x + 2y - 3}{x - 1}$.

3.18. $y' = \frac{3x + 2y - 1}{x + 1}$.

3.19. $y' = \frac{5y + 5}{4x + 3y - 1}$.

3.20. $y' = \frac{x + 4y - 5}{6x - y - 5}$.

3.21. $y' = \frac{x + y + 2}{x + 1}$.

3.22. $y' = \frac{2x + y - 3}{4x - 4}$.

3.23. $y' = \frac{2x + y - 3}{2x - 2}$.

3.24. $y' = \frac{y}{2x + 2y - 2}$.

3.25. $y' = \frac{x + 5y - 6}{7x - y - 6}$.

3.26. $y' = \frac{x + y - 4}{x - 2}$.

3.27. $y' = \frac{2x + y - 1}{2x - 2}$.

3.28. $y' = \frac{3y - 2x + 1}{3x + 3}$.

3.29. $y' = \frac{6y - 6}{5x + 4y - 9}$.

3.30. $y' = \frac{x + 6y - 7}{8x - y - 7}$.

3.31. $y' = \frac{y + 2}{2x + y - 4}$.

Задача 4. Найти решение задачи Коши

4.1. $y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0.$

4.2. $y' - y\,ctgx = 2x\sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$

4.3. $y' + y\cos x = (\sin 2x)/2, \quad y(0) = 0.$

4.4. $y' + y\,tgx = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2.$

4.5. $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2.$

4.6. $y' - \frac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$

4.7. $y' - \frac{y}{x} = x\sin x, \quad y(\pi/2) = 1.$

4.8. $y' + \frac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = 1/\pi.$

4.9. $y' + \frac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$

4.10. $y' + \frac{2x}{x^2+1}y = \frac{2x^2}{x^2+1}, \quad y(0) = 2/3.$

4.11. $y' - \frac{2x-5}{x^2}y = 5, \quad y(2) = 4.$

4.12. $y' + \frac{y}{x} = \frac{x+1}{x}e^x, \quad y(1) = e.$

4.13. $y' - \frac{y}{x} = -2\frac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

4.14. $y' - \frac{y}{x} = -\frac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$

4.15. $y' + \frac{2}{x}y = x^3, \quad y(1) = -5/6.$

4.16. $y' + \frac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$

4.17. $y' - \dfrac{2xy}{x^2+1} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

4.18. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2} y = 1, \quad y(1) = 1.$

4.19. $y' + \dfrac{3y}{x} = \dfrac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$

4.20. $y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$

4.21. $y' + \dfrac{xy}{2(1-x^2)} = \dfrac{x}{2}, \quad y(0) = 2/3.$

4.22. $y' + xy = -x^3, \quad y(0) = 3.$

4.23. $y' - \dfrac{2}{x+1} y = e^x (x+1)^2, \quad y(0) = 1.$

4.24. $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, \quad y(0) = 1.$

4.25. $y' - \dfrac{2y}{x+1} = (x+1)^3, \quad y(0) = 1/2.$

4.26. $y' - y\cos x = -\sin 2x, \quad y(0) = 3.$

4.27. $y' - 4xy = -4x^3, \quad y(0) = -1/2.$

4.28. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

4.29. $y' - 3x^2 y = x^2(1+x^3)/3, \quad y(0) = 0.$

4.30. $y' - y\cos x = \sin 2x, \quad y(0) = -1.$

4.31. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{2}{x^2}, \quad y(1) = 1.$

Задача 5. Решить задачу Коши

5.1. $y^2 dx + (x + e^{2/y}) dy = 0, \quad y(e) = 2.$

5.2. $(y^4 e^y + 2x) y' = y, \quad y(0) = 1.$

5.3. $y^2 dx + (xy - 1) dy = 0, \quad y(1) = e.$

5.4. $2(4y^2 + 4y - x) y' = 1, \quad y(0) = 0.$

5.5. $(\cos 2y \cos^2 y - x) y' = \sin y \cos y, \quad y(\dfrac{1}{4}) = \dfrac{\pi}{3}.$

5.6. $(x\cos^2 y - y^2) y' = y\cos^2 y, \quad y(\pi) = \dfrac{\pi}{4}.$

5.7. $e^{y^2}(dx - 2xydy) = ydy, \quad y(0) = 0.$

5.8. $(104y^3 - x) y' = 4y, \quad y(8) = 1.$

5.9. $dx + (xy - y^3) dy = 0, \quad y(-1) = 0.$

5.10. $(3y\cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x) y' = y, \quad y(16) = \dfrac{\pi}{4}.$

5.11. $8(4y^3 + xy - y) y' = 1, \quad y(0) = 0.$

5.12. $(2\ln y - \ln^2 y) dy = ydx - xdy, \quad y(4) = e^2.$

5.13. $2(x + y^4) y' = y, \quad y(-2) = -1.$

5.14. $y^3(y-1)dx + 3xy^2(y-1)dy = (y+2)dy, \quad y(\dfrac{1}{4}) = 2.$

5.15. $2y^2 dx + (x + e^{1/y}) dy = 0, \quad y(e) = 1.$

5.16. $(xy + y^{1/2}) dy + y^2 dx = 0, \quad y(-\dfrac{1}{2}) = 4.$

5.17. $\sin 2y dx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x) dy, \quad y(-\dfrac{1}{2}) = \dfrac{\pi}{4}.$

5.18. $(y^2 + 2y - x) y' = 1, \quad y(2) = 0.$

5.19. $2yy^{1/2} dx - (6xy^{1/2} + 7) dy = 0, \quad y(-4) = 1.$

5.20. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x) dy, \quad y(e^{\frac{\pi}{2}}) = \dfrac{\pi}{2}.$

5.21. $2(\cos^2 y \cos 2y - x) y' = \sin 2y, \quad y(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{5\pi}{4}.$

5.22. $chydx = (1 + xshy) dy, \quad y(1) = \ln 2.$

5.23. $(13y^3 - x) y' = 4y, \quad y(5) = 1.$

5.24. $y^2(4 + y^2) dx + 2xy(4 + y^2) dy = 2dy, \quad y(\dfrac{\pi}{8}) = 2.$

5.25. $(x + \ln^2 y - \ln y) y' = y/2, \quad y(2) = 1.$

5.26. $(2xy + y^{1/2}) dy + 2y^2 dx = 0, \quad y(-\dfrac{1}{2}) = 1.$

5.27. $ydx + (2x - 2\sin^2 y - y\sin 2y) dy = 0, \quad y(\dfrac{3}{2}) = \dfrac{\pi}{4}.$

5.28. $2(y^3 - y + xy)dy = dx, \quad y(-2) = 0.$

5.29. $(2y + xtgy - y^2 tgy)dy = dx, \quad y(0) = \pi.$

5.30. $4y^2dx + (e^{\frac{2}{2y}} + x)dy = 0, \quad y(e) = \frac{1}{2}.$

5.31. $dx + (2x + \sin 2y - 2\cos^2 y)dy = 0, \quad y(-1) = 0.$

Задача 6. Найти решение задачи Коши

6.1. $y' + xy = (1 + x)e^{-x} y^2, \quad y(0) = 1.$

6.2. $xy' + y = 2y^2 \ln x, \quad y(1) = 1/2.$

6.3. $2(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 2.$

6.4. $y' + 4x^3 y = 4(x^3 + 1)e^{-4x} y^2, \quad y(0) = 1.$

6.5. $xy' - y = -y^2(\ln x + 2)\ln x, \quad y(1) = 1.$

6.6. $2(y' + xy) = e^{-x} y^2 (x + 1), \quad y(0) = 2.$

6.7. $3(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 3.$

6.8. $2y' + y\cos x = y^{-1}\cos x(1 + \sin x), \quad y(0) = 1.$

6.9. $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1 - x^3), \quad y(0) = -1.$

6.10. $3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2}, \quad y(0) = -1.$

6.11. $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = 1/2^{1/2}.$

6.12. $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, \quad y(1) = 1.$

6.13. $2y' + 3y\cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1/2.$

6.14. $3(xy' + y) = xy^2, \quad y(1) = 3.$

6.15. $y' - y = 2xy^2, \quad y(0) = 1/2.$

6.16. $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, \quad y(1) = 2^{1/2}/2.$

6.17. $y' + 2xy = 2x^3 y^3, \quad y(0) = 2^{1/2}.$

6.18. $xy' + y = y^2 \ln x, \quad y(1) = 1.$

6.19. $2y' + 3y\cos x = (8 + 12\cos x)e^{2x} y^{-1}, \quad y(0) = 2.$

6.20. $4y' + x^3 y = (x^3 + 8)e^{-2x} y^2, \quad y(0) = 1.$

6.21. $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, \quad y(1) = 2^{1/2}.$

6.22. $2(y' + y) = xy^2, \quad y(0) = 2.$

6.23. $y' + xy = e^x (x - 1)y^2, \quad y(0) = 1.$

6.24. $2y' - 3y\cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1.$

6.25. $y' - y = xy^2, \quad y(0) = 1.$

6.26. $2(xy' + y) = y^2 \ln x, \quad y(1) = 2.$

6.27. $y' + y = xy^2, \quad y(0) = 1.$

6.28. $y' + 2ycthx = y^2 chx, \quad y(1) = 1/sh1.$

6.29. $2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2, \quad y(0) = 2.$

6.30. $y' - ytgx = -(2/3)y^4 \sin x, \quad y(0) = 1.$

6.31. $xy' + y = xy^2, \quad y(1) = 1.$

Задача 7. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

7.1. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0.$

7.2. $(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y})dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy = 0$

7.3. $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0.$

7.4. $(2x - 1 - \frac{y}{x^2})dx - (2y - \frac{1}{x})dy = 0.$

7.5. $(y^2 + y\sec^2 x)dx + (2xy + tgx)dy = 0.$

7.6. $(3x^2 y + 2y + 3)dx + (x^3 + 2x + 3y^2)dy = 0.$

7.7. $(\frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y})dx + (\frac{y}{(x^2 + y^2)^{1/2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2})dy = 0.$

7.8. $(\sin 2x - 2\cos(x + y))dx - 2\cos(x + y)dy = 0.$

7.9. $(xy^2 + \frac{x}{y^2})dx + (x^2 y - \frac{x^2}{y^3})dy = 0.$

7.10. $(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4})dx - \frac{2y}{x^3}dy = 0.$

7.11. $\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}dx - (\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x} + 2y)dy = 0.$

7.12. $\left(\frac{x}{(x^2+y^2)^{1/2}}+y\right)dx+\left(x+\frac{y}{(x^2+y^2)^{1/2}}\right)dy=0$.

7.13. $\frac{1+xy}{x^2y}dx+\frac{1-xy}{xy^2}dy=0$.

7.14. $\frac{1}{y}dx-\frac{x+y^2}{y^2}dy=0$.

7.15. $\frac{y}{x^2}dx-\frac{xy+1}{x}dy=0$.

7.16. $(xe^x+\frac{y}{x^2})dx-\frac{1}{x}dy=0$.

7.17. $(10xy-\frac{1}{\sin y})dx+(5x^2+\frac{x\cos y}{\sin^2 y}-y^2\sin y^3)dy=0$.

7.18. $(\frac{y}{x^2+y^2}+e^x)dx-\frac{x}{x^2+y^2}dy=0$.

7.19. $e^y dx+(\cos y+xe^y)dy=0$.

7.20. $(y^3+\cos x)dx+(3xy^2+e^y)dy=0$.

7.21. $xe^{y^2}dx+(x^2ye^{y^2}+tg^2 y)dy=0$.

7.22. $(5xy^2-x^3)dx+(5x^2y-y)dy=0$.

7.23. $(\cos(x+y^2)+\sin x)dx+2y\cos(x+y^2)dy=0$.

7.24. $(x^2-4xy-2y^2)dx+(y^2-4xy-2x^2)dy=0$.

7.25. $(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x})dx+(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y})dy=0$.

7.26. $(1+\frac{1}{y}e^{x/y})dx+(1-\frac{x}{y^2}e^{x/y})dy=0$.

7.27. $\frac{(x-y)dx+(x+y)dy}{x^2+y^2}=0$.

7.28. $2(3xy^2+2x^3)dx+3(2x^2y+y^2)dx=0$.

7.29. $(3x^3+6x^2y+3xy^2)dx+(2x^3+3x^2y)dy=0$.

7.30. $xy^2dx+y(x^2+y^2)dy=0$.

7.31. $xdx+ydy+(xdy-ydx)/(x^2+y^2)=0$.

4.2. Типовой расчет по теме «Дифференциальные уравнения высших порядков»

Задача 8. Найти общее решение дифференциального уравнения

8.1. $y'''x\ln x=y''$.

8.2. $xy'''+y''=1$.

8.3. $2xy'''=y''$.

8.4. $xy'''+y''=x+1$.

8.5. $y''tgx-y'+\frac{1}{\sin x}=0$.

8.6. $x^2y''+xy'=1$.

8.7. $y'''ctg2x+2y''=0$.

8.8. $x^3y'''+x^2y''=1$.

8.9. $y'''tgx=2y''$.

8.10. $y'''cth2x=2y''$.

8.11. $y''x^4+y'x^3=1$.

8.12. $xy'''+2y''=0$.

8.13. $y''(1+x^2)+2xy'=x^3$.

8.14. $x^5y'''+x^4y''=1$.

8.15. $xy'''-y''+\frac{1}{x}=0$.

8.16. $xy'''+y''+x=0$.

8.17. $y^{(4)}thx=y'''$.

8.18. $xy'''+y''=x^{1/2}$.

8.19. $y'''tgx=y''+1$.

8.20. $y'''tg5x=5y''$.

8.21. $y'''th7x=7y''$.

8.22. $x^3y'''+x^2y''=x^{1/2}$.

8.23. $y''cthx-y'+\frac{1}{chx}=0$.

8.24. $(x+1)y'''+y''=x+1$.

8.25. $y'''(1+\sin x)=y''\cos x$.

8.26. $xy'''+y''=\frac{1}{x^{1/2}}$.

8.27. $-xy'''+2y''=\frac{2}{x^2}$.

8.28. $cthxy''+y'=chx$

8.29. $y''x^4+y'x^3=4$.

8.30. $y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=2x$.

8.31. $y''(1+x^2)+2xy'=12y^3$.

Задача 9. Найти решение задачи Коши

9.1. $4y^3y''=y^4-1,\quad y(0)=2^{1/2},\quad y'(0)=1/(2^{3/2})$.

9.2. $y''=128y^3,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=8$.

9.3. $y''y^3+64=0,\quad y(0)=4,\quad y'(0)=2$.

9.4. $y''+2\sin y\cos^3 y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$.

9.5. $y'' = 32\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 4.$

9.6. $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7.$

9.7. $y''y^3 + 49 = 0, \quad y(3) = -7, \quad y'(3) = -1.$

9.8. $4y^3y'' = 16y^4 - 1, \quad y(0) = 2^{-1/2}, \quad y'(0) = 2^{-1/2}.$

9.9. $y'' + 8\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

9.10. $y'' = 72y^3, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6.$

9.11. $y''y^3 + 36 = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$

9.12. $y'' = 18\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 3.$

9.13. $4y^3y'' = y^4 - 16. \quad y(0) = 2^{3/2}, \quad y'(0) = 2^{-1/2}.$

9.14. $y'' = 50y^3, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 5.$

9.15. $y''y^3 + 25 = 0, \quad y(2) = -5, \quad y'(2) = -1.$

9.16. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

9.17. $y'' = 8\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 2.$

9.18. $y'' = 32y^3, \quad y(4) = 1, \quad y'(4) = 4.$

9.19. $y''y^3 + 16 = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 2.$

9.20. $y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4.$

9.21. $y'' = 50\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 5.$

9.22. $y'' = 18y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$

9.23. $y''y^3 + 9 = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 3.$

9.24. $y^3y'' = 4(y^4 - 1), \quad y(0) = 2^{1/2}, \quad y'(0) = 2^{1/2}.$

9.25. $y'' + 50\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 5.$

9.26. $y'' = 8y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

9.27. $y''y^3 + 4 = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = -2.$

9.28. $y'' = 2\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 1.$

9.29. $y''y^3 = y^4 - 16, \quad y(0) = 2^{3/2}, \quad y'(0) = 2^{1/2}.$

9.30. $y'' = 2y^3, \quad y(-1) = 1, \quad y'(-1) = 1.$

9.31. $y''y^3 + 1 = 0, \quad y(1) = -1, \quad y'(1) = -1.$

Задача 10. Найти общее решение дифференциального уравнения

10.1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$

10.2. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x.$

10.3. $y''' - y' = x^2 + x.$

10.4. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$

10.5. $y^{(4)} - y''' = 5(x+2)^2.$

10.6. $y^{(4)} - 2y''' + y'' = 2x(1-x).$

10.7. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1.$

10.8. $y^{(5)} - y^{(4)} = 2x + 3.$

10.9. $3y^{(4)} + y''' = 6x - 1.$

10.10. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 4x^2.$

10.11. $y''' + y'' = 5x^2 - 1.$

10.12. $y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = x - x^2.$

10.13. $7y''' - y'' = 12x.$

10.14. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x.$

10.15. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1.$

10.16. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2.$

10.17. $y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3.$

10.18. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x.$

10.19. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2.$

10.20. $y^{(4)} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2.$

10.21. $y''' + y'' = 49 - 24x^2.$

10.22. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4.$

10.23. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1.$

10.24. $y^{(4)} + y''' = x.$

10.25. $y''' - y'' = 6x + 5.$

10.26. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3.$

10.27. $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2.$

10.28. $y^{(4)} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1.$

10.29. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39.$

10.30. $y^{(4)} + y''' = 12x + 6.$

10.31. $y''' - 5y'' + 6y' = 6x^2 + 2x - 5.$

Задача 11. Найти общее решение дифференциального уравнения

11.1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}.$

11.2. $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{x}.$

11.3. $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}.$

11.4. $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}.$

11.5. $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}.$

11.6. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^{x}.$

11.7. $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^{x}.$

11.8. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}.$

11.9. $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^{x}.$

11.10. $y''' - 3y' - 2y = -4xe^x$.

11.11. $y''' - 3y' + 2y = (4x+9)e^{2x}$.

11.12. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x+16)e^x$.

11.13. $y''' - y'' - 2y' = (6x-11)e^{-x}$.

11.14. $y''' + y'' - 2y' = (6x+5)e^x$.

11.15. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x+15)e^x$.

11.16. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4-8x)e^x$.

11.17. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7-6x)e^x$.

11.18. $y''' + 3y'' + 2y' = (1-2x)e^{-x}$.

11.19. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20-16x)e^{-x}$.

11.20. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x$.

11.21. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x-32)e^{-x}$.

11.22. $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^x$.

11.23. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x-12)e^x$.

11.24. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x+4)e^x$.

11.25. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x+20)e^x$.

11.26. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x-14)e^{-x}$.

11.27. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x+6)e^x$.

11.28. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x+24)e^x$.

11.29. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12-16x)e^x$.

11.30. $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1-x)e^{-x}$.

11.31. $y''' + y'' - 6y' = (20x+14)e^{2x}$.

Задача 12. Найти общее решение дифференциального уравнения

12.1. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.

12.2. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 6x$.

12.3. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$.

12.4. $y'' + y = 3\sin 7x + 2\cos 7x$.

12.5. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.

12.6. $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x)$.

12.7. $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x)$.

12.8. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x$.

12.9. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 4x$.

12.10. $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x$.

12.11. $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x$.

12.12. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x)$.

12.13. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$.

12.14. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 5x$.

12.15. $y'' + y = 3\sin 5x + 2\cos 5x$.

12.16. $y'' + 2y' + 5y = -17\sin 2x$.

12.17. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos x$.

12.18. $y'' - 4y' + 8y = e^x(3\sin x + 5\cos x)$.

12.19. $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$.

12.20. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x}\sin 4x$.

12.21. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 5x$.

12.22. $y'' + y = 2\cos 7x - 3\sin 7x$.

12.23. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.

12.24. $y'' - 4y' + 8y = e^x(2\sin x - \cos x)$.

12.25. $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$.

12.26. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 4x$.

12.27. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 8x$.

12.28. $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x$.

12.29. $y'' + y = 3\sin 4x + 2\cos 4x$.

12.30. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2\cos x)$.

12.31. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 6x$.

Задача 13. Найти общее решение дифференциального уравнения

13.1. $y'' - 2y' = 2ch2x.$

13.2. $y'' + y = 2\sin x - 6\cos x + 2e^{x}.$

13.3. $y''' - y' = 2e^{x} + \cos x.$

13.4. $y'' - 3y' = 2ch3x.$

13.5. $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}.$

13.6. $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^{x}.$

13.7. $y'' - 4y' = 16ch4x.$

13.8. $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}.$

13.9. $y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x.$

13.10. $y'' - 5y' = 50ch5x.$

13.11. $y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}.$

13.12. $y''' - 9y' = 18\sin 3x - 9\cos 3x - 9e^{3x}.$

13.13. $y'' - y' = 2chx.$

13.14. $y'' + 25y = -10\sin 5x + 20\cos 5x + 50e^{5x}.$

13.15. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x.$

13.16. $y'' + 2y' = 2sh2x.$

13.17. $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}.$

13.18. $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}.$

13.19. $y'' + 3y' = 2sh3x.$

13.20. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}.$

13.21. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x).$

13.22. $y'' + 4y' = 16sh4x.$

13.23. $y'' + 64y = 16\sin 8x - 16\cos 8x - 64e^{8x}.$

13.24. $y''' - 49y' = -49(\sin 7x + \cos 7x) + 14e^{7x}.$

13.25. $y'' + 5y' = 50sh5x.$

13.26. $y'' + 81y = 9\sin 9x + 3\cos 9x + 162e^{9x}.$

13.27. $y''' - 64y' = 128\cos 8x - 64e^{8x}.$

13.28. $y'' + y = 2shx.$

13.29. $y'' + 100y = 20\sin 10x - 30\cos 10x - 200e^{10x}.$

13.30. $y''' - 81y' = 81\sin 9x + 162e^{9x}.$

13.31. $y''' - 100y' = 20e^{10x} + 100\cos 10x.$

Задача 14. Найти решение задачи Коши

14.1. $y'' + \pi^2 y = \pi^2/\cos\pi x,\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = 0.$

14.2. $y'' + 3y' = 9e^{3x}/(1 + e^{3x}),\quad y(0) = \ln 4,\quad y'(0) = 3(1 - \ln 2).$

14.3. $y'' + 4y = 8ctg2x,\quad y(\frac{\pi}{4}) = 3,\quad y'(\frac{\pi}{4}) = 4.$

14.4. $y'' - 6y' + 8y = 4/(1 + e^{-2x}),\quad y(0) = 1 + 2\ln 2,\quad y'(0) = 6\ln 2.$

14.5. $y'' - 9y' + 18y = 9e^{3x}/(1 + e^{-3x}),\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0.$

14.6. $y'' + \pi^2 y = \pi^2/\sin\pi x,\quad y(\frac{1}{2}) = 1,\quad y'(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{2}.$

14.7. $y'' + \frac{1}{\pi^2}y = 1\Big/\left(\pi^2\cos\left(x/\pi\right)\right),\quad y(0) = 2,\quad y'(0) = 0.$

14.8. $y'' - 3y' = 9e^{-3x}/(3 + e^{-3x}),\quad y(0) = 4\ln 4,\quad y'(0) = 3(3\ln 4 - 1).$

14.9. $y'' + y = 4ctgx,\quad y(\frac{\pi}{2}) = 3,\quad y'(\frac{\pi}{2}) = 4.$

14.10. $y'' - 6y' + 8y = 4/(2 + e^{-2x}),\quad y(0) = 1 + 3\ln 3,\quad y'(0) = 10\ln 3.$

14.11. $y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x}/(2 + e^{2x}),\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0.$

14.12. $y'' + 9y = 9/\sin 3x,\quad y(\pi/6) = 4,\quad y'(\pi/6) = 3\pi/2.$

14.13. $y'' + 9y = 9/\cos 3x,\quad y(0) = 1,\quad y'(0) = 0.$

14.14. $y'' - y' = e^{-x}/(2 + e^{-x}),\quad y(0) = \ln 27,\quad y'(0) = \ln 9 - 1.$

14.15. $y'' + 4y = 4ctg2x,\quad y(\pi/4) = 3,\quad y'(\pi/4) = 2.$

14.16. $y'' - 3y' + 2y = 1/(3 + e^{-x}),\quad y(0) = 1 + 8\ln 2,\quad y'(0) = 14\ln 2.$

14.17. $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1 + e^{-2x}),\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 0.$

14.18. $y'' + 16y = 16/\sin 4x,\quad y(\pi/8) = 3,\quad y'(\pi/8) = 2\pi.$

14.19. $y'' + 16y = 16/\cos 4x,\quad y(0) = 3,\quad y'(0) = 0.$

14.20. $y'' - 2y' = 4e^{-2x}/(1 + e^{-2x}),\quad y(0) = \ln 4,\quad y'(0) = \ln 4 - 2.$

14.21. $y'' + y/4 = ctg(x/2)/4,\quad y(\pi) = 2.\quad y'(\pi) = 1/2.$

14.22. $y'' - 3y' + 2y = 1/(2+e^{-x}), \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 5\ln 3.$

14.23. $y'' + 3y' + 2y = e^{-x}/(2+e^{x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

14.24. $y'' + 4y = 4/\sin 2x, \quad y(\pi/4) = 2, \quad y'(\pi/4) = \pi.$

14.25. $y'' + 4y = 4/\cos 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

14.26. $y'' + y' = e^{x}/(2+e^{x}), \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = 1 - \ln 9.$

14.27. $y'' + y = 2ctgx, \quad y(\pi/2) = 1, \quad y'(\pi/2) = 2.$

14.28. $y'' - 3y' + 2y = 1/(1+e^{-x}), \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 3\ln 2.$

14.29. $y'' - 3y' + 2y = e^{x}/(1+e^{-x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

14.30. $y'' + y = 1/\sin x, \quad y(\pi/2) = 1, \quad y'(\pi/2) = \pi/2.$

14.31. $y'' + y = 1/\cos x, \quad y(0) = 1., \quad y'(0) = 0.$

4.3. Типовой расчет по теме: «Системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка»

Задача 15. Найти частное решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющих заданным начальным условиям:

15.1. $\begin{cases} dx/dt = 3x + 2y + e^{t} & x(0) = 0 \\ dy/dt = x + 2y & y(0) = 2 \end{cases}$

15.2. $\begin{cases} dx/dt = 4x + y & x(0) = 1 \\ dy/dt = -2x + y + t & y(0) = 0 \end{cases}$

15.3. $\begin{cases} dx/dt = x - 2y + e^{-t} & x(0) = 1 \\ dy/dt = -x + 2y & y(0) = 2 \end{cases}$

15.4. $\begin{cases} dx/dt = x + 2y - 1 & x(0) = 1 \\ dy/dt = 2x + y + e^{t} & y(0) = 0 \end{cases}$

15.5. $\begin{cases} dx/dt = 2x - 4y - 2t & x(0) = 0 \\ dy/dt = -3x + 6y & y(0) = 2 \end{cases}$

15.6. $\begin{cases} dx/dt = x - y + 1 & x(0) = 1 \\ dy/dt = 5x - y & y(0) = 0 \end{cases}$

15.7. $\begin{cases} dx/dt = -2x + y - e^{-t} & x(0) = 0 \\ dy/dt = x - 2y & y(0) = 1 \end{cases}$

15.8. $\begin{cases} dx/dt = y + 1 & x(0) = 2 \\ dy/dt = 5x + 4y & y(0) = 0 \end{cases}$

15.9. $\begin{cases} dx/dt = 2x - 3y + e^{t} & x(0) = 1 \\ dy/dt = x - 2y & y(0) = 0 \end{cases}$

15.10. $\begin{cases} dx/dt = 6x - 3y & x(0) = 2 \\ dy/dt = 2x - y + 1 & y(0) = 0 \end{cases}$

15.11. $\begin{cases} dx/dt = 2x + y - 1 & x(0) = 1 \\ dy/dt = 3x + 4y + e^{t} & y(0) = 0 \end{cases}$

15.12. $\begin{cases} dx/dt = x + y - e^{-t} & x(0) = 0 \\ dy/dt = -2x + 3y & y(0) = 1 \end{cases}$

15.13. $\begin{cases} dx/dt = 3x - y + e^{2t} & x(0) = 0 \\ dy/dt = 4x - y & y(0) = 2 \end{cases}$

15.14. $\begin{cases} dx/dt = -3x + 2y + e^{-2t} & x(0) = 0 \\ dy/dt = -2x + y & y(0) = 1 \end{cases}$

15.15. $\begin{cases} dx/dt = x - y + t & x(0) = 0 \\ dy/dt = -4x + y & y(0) = 2 \end{cases}$

15. 16. $\begin{cases} dx/dt = x - y & x(0) = 1 \\ dy/dt = -4x + y + e^{-2t} & y(0) = 0 \end{cases}$

15.17. $\begin{cases} dx/dt = x - 2y + t & x(0) = 2 \\ dy/dt = -x + 2y & y(0) = 0 \end{cases}$

15.18. $\begin{cases} dx/dt = 2x - y + \sin t & x(0) = 0 \\ dy/dt = -x + 2y & y(0) = 0 \end{cases}$

15.19. $\begin{cases} dx/dt = -x + y + \cos t & x(0) = 0 \\ dy/dt = x - 2y & y(0) = 0 \end{cases}$

15.20. $\begin{cases} dx/dt = 3x - y + te^{t} & x(0) = 0 \\ dy/dt = -x + 3y & y(0) = 0 \end{cases}$

15.21. $\begin{cases} dx/dt = x - 2y + e^{-t} & x(0) = 0 \\ dy/dt = x + 3y & y(0) = 3 \end{cases}$

15.22. $\begin{cases} dx/dt = x - 3y + 2e^t & x(0)=0 \\ dy/dt = 3x + y & y(0)=2 \end{cases}$

15.23. $\begin{cases} dx/dt = x + y - 2t & x(0)=0 \\ dy/dt = 2x + 2y & y(0)=2 \end{cases}$

15.24. $\begin{cases} dx/dt = 2x + 3y + 2t & x(0)=0 \\ dy/dt = 2x - 3y + 2t & y(0)=1 \end{cases}$

15.25. $\begin{cases} dx/dt = 3x - y + \sin t & x(0)=0 \\ dy/dt = -x + 3y & y(0)=0 \end{cases}$

15.26. $\begin{cases} dx/dt = x + 2y + 2 & x(0)=1 \\ dy/dt = 3x + 2y & y(0)=-1 \end{cases}$

15.27. $\begin{cases} dx/dt = 3x + y & x(0)=0 \\ dy/dt = -2x + y + 1 & y(0)=2 \end{cases}$

15.28. $\begin{cases} dx/dt = x - 4y + e^t & x(0)=1 \\ dy/dt = -x + y & y(0)=1 \end{cases}$

15.29. $\begin{cases} dx/dt = -x + 4y + 1 & x(0)=2 \\ dy/dt = -x + 3y & y(0)=3 \end{cases}$

15.30. $\begin{cases} dx/dt = -x + 5y + e^{2t} & x(0)=0 \\ dy/dt = -x + y & y(0)=2 \end{cases}$

15.31. $\begin{cases} dx/dt = x + 7y + e^{2t} & x(0)=0 \\ dy/dt = x + 8y & y(0)=1 \end{cases}$

Литература

1. *Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г.* Дифференциальные уравнения. Учебн. – М.: Наука, 1985. – 231 с.
2. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Учебн. – М.: Изд-во Москов. ун-та, 1984. – 295 с.
3. *Картошов А.П., Рождественский Б.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. Учеб. пособие. – М.: 1986. – 272 с.
4. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. Учебн. – Т. 4. – М.: Наука, 1981. – 252 с.

5. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления. Учебн. – М.: Наука, 1960. – 424 с.
6. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Наука. – Т. 2, 1972. – 272 с.
7. *Минорский В.П.* Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1987. – 352 с.
8. Сборник задач по математике для втузов. Ч.2. /Под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П. – М.: Наука, 1986. – 368 с.
9. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1972. – 416 с.
10. *Филиппов А.Ф.* Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1973. – 128 с.
11. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (Типовые расчеты): Учебное пособие для втузов. – М.: Высш. школа, 1983. – 175 с.
12. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

Лелевкина Л.Г., Шемякина Т.А.

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Учебное пособие по математическому анализу

Редактор И.С. Волоскова
Технический редактор Э.К. Гаврина
Корректор О.А. Матвеева
Компьютерная верстка Д.Р. Зайнулина

Подписано к печати 12.11.2001. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Офсетная печать. Объем 2,75 п.л.
Тираж 250 экз. Заказ 221.

Издательство Кыргызско-Российского Славянского университета
720000, Бишкек, Киевская, 44

Отпечатано в типографии КРСУ
720000, Бишкек, Шопокова, 68