КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Т.А. Давидюк, И.В. Гончарова

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Бишкек 2010

УДК 517
Д 13

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. *Т.М. Иманалиев,*
ст. преподаватель *Н.М. Комарцов*

Рекомендовано к изданию решением кафедры
высшей математики КРСУ

Давидюк Т.А., Гончарова И.В.

Д 13 ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ: Учебно-методическое пособие. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2010. – с.

Пособие содержит краткие теоретические основы одного из разделов математического анализа «Определенный интеграл». Решены и разобраны все типичные задачи данного раздела, они снабжены подробнейшими методическими указаниями.

С целью активизации самостоятельной работы студентов приведено 25 вариантов заданий для самостоятельного решения. Каждый вариант содержит 10 примеров с четырьмя формами ответов, одна из которых является правильной, остальные – учитывают наиболее часто допускаемые ошибки. Задачи охватывают основной материал данного раздела и проверяют уровень подготовленности студентов.

Структура методического пособия направлена на развитие у студентов навыков самостоятельного решения задач и позволяет до начала экзаменационной сессии проверить уровень усвоения материала путем прохождения компьютерного тестирования.

Предназначено для студентов естественно-технического, экономического и архитектурно-строительного факультетов дневной и заочной форм обучения.

1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Задача о пройденном пути. Требуется найти путь, пройденный движущейся по прямой точкой за отрезок времени $\left[t_0;\ T\right]$, если известен закон изменения мгновенной скорости $v = v(t)$.

Разобьем отрезок времени $\left[t_0;\ T\right]$ моментами времени (точками) $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$ на n частичных отрезков времени и положим $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda = \max \Delta t_i$. Если эти отрезки достаточно малы, то без большой ошибки на каждом из них движение можно считать равномерным, что дает приближенное выражение для пути

$$s \approx v(\tau_1)\Delta t_1 + v(\tau_2)\Delta t_2 + \ldots + v(\tau_n)\Delta t_n = \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i ,$$

где τ_i – одна из точек сегмента $\left[t_{i-1}; t_i\right]$.

Эта сумма будет тем точнее выражать искомый путь s, чем меньше будет каждый из временных отрезков $\left[t_{i-1};\ t_i\right]$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Поэтому за путь s, пройденный точкой за время $T - t_0$ со скоростью $v = v(t)$ принимают предел

$$s = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i .$$

Задача о количестве вещества, вступившего в реакцию. Пусть скорость химического превращения некоторого вещества, участвующего в химической реакции, есть функция времени $v = v(t)$. Требуется найти количество m вступившего в реакцию вещества за промежуток времени от t_0 до T.

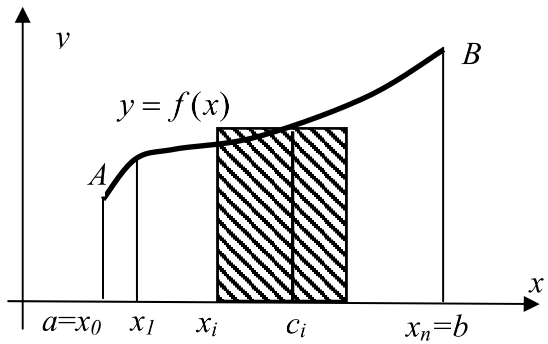
Проделаем последовательно те же операции, что и при решении предыдущей задачи. В результате получим

$$m = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} v(\tau_i)\Delta t_i .$$

Работа переменной силы. Пусть материальная точка движется по оси Ox от точки $A(a)$ до точки $B(b)$ $\left(b > a\right)$ под действием переменной силы $F = f(x)$, направленной вдоль Ox. В этом случае, как и при решении двух предыдущих задач, найдем, что работа переменной силы

$$A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta x_i .$$

Задача о площади криволинейной трапеции. Пусть требуется найти площадь плоской фигуры $aABb$, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, непрерывной и неотрицательной для всех $x \in [a;b]$, и отрезками прямых $y = 0$, $x = a$ и $x = b$. Эта фигура называется криволинейной трапецией.



Разобьем отрезок $\left[a;b\right]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ на n частичных отрезков и положим $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$. Наибольшую из этих разностей обозначим через $\lambda = \max \Delta x_i$. На каждом частичном сегменте $\left[x_{i-1}; x_i\right]$, $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, выберем произвольную точку c_i. Произведение $f(c_i)\Delta x_i$ дает площадь прямоугольника, имеющего основание Δx_i и высоту $f(c_i)$. Тогда площадь криволинейной трапеции приближенно равна

$$S \approx f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

За точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел

$$S = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\lambda\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

1.2. Понятие определенного интеграла

Из решения приведенных выше задач видно, что, хотя они и имеют различный смысл, математический аппарат для их решения один и тот же. Поэтому, абстрагируясь от конкретного смысла задачи, введем понятие определенного интеграла.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$. Разобьем отрезок $[a;b]$ произвольными точками $a = x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots x_n = b$ на n элементарных отрезков. На каждом отрезке $[x_{i-1};x_i]$ разбиения выберем произвольно некоторую точку ξ_i, $i = \overline{1,n}$. Вычислим значения рассматриваемой функции $f(x)$ в каждой из выбранных точек, т.е. вычислим $f(\xi_i)$, $i = \overline{1,n}$. Умножим каждое полученное значение функции на длину соответствующего отрезка $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, $i = \overline{1,n}$, т.е. найдем $f(\xi_i)\Delta x_i$, $i = \overline{1,n}$. Найдем сумму:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i . \quad (1)$$

Сумма (1) носит название интегральной (n-й интегральной) суммы функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Обозначим через $\max\limits_i \Delta x_i$ максимальную из длин отрезков $[x_{i-1};x_i]$, $i = 1, 2, \ldots n$.

Определение: Если при стремлении $\max\limits_i \Delta x_i \to 0$ существует предел n-й интегральной суммы функции $f(x)$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a;b]$ на элементарные отрезки $[x_{i-1};x_i]$, ни от способа выбора точек ξ_i, $i = \overline{1,n}$, то его называют определенным интегралом функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначают

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx , \quad (2)$$

где x – переменная интегрирования, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, a, b – пределы интегрирования (a – нижний предел, b – верхний предел).

Следует помнить, что $\int_a^b f(x)dx$ есть определенное число.

Физический смысл определенного интеграла

Путь, пройденный движущейся по прямой материальной точкой за отрезок времени $[t_0;T]$, равен определенному интегралу скорости от $v = v(t)$:

$$s = \int_{t_0}^{T} v(t)dt .$$

Количество m вступившего в реакцию вещества за промежуток времени от t_0 до T равно определенному интегралу от скорости химического превращения:

$$m = \int_{t_0}^{T} v(t)dt .$$

Работа переменной силы $\overline{F}$, величина которой есть непрерывная функция $F = f(x)$, действующая на отрезке $[a;b]$, равна определенному интегралу

$$A = \int_a^b f(x)dx .$$

Геометрический смысл определенного интеграла

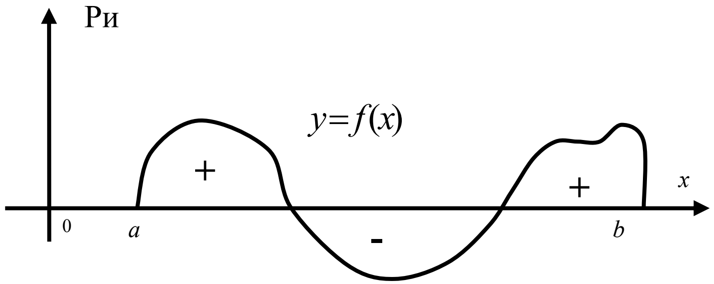
Пусть непрерывная функция $y = f(x)$ неотрицательна для всех $x \in [a;b]$. Определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ численно равен площади S под кривой $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$, т.е. площади криволинейной трапеции

$$S = \int_a^b f(x)dx .$$

Если $f(x) \le 0$ для $x \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le 0$ и тогда

$$S = -\int_a^b f(x)dx .$$

Если $f(x)$ конечное число раз меняет знак на отрезке $[a;b]$, то интеграл разбивают на сумму интегралов по частичным отрезкам. Интеграл по всему отрезку $[a;b]$ дает соответствующую алгебраическую сумму площадей, лежащих выше и ниже оси *Ox*.



1.3. Свойства определенного интеграла

Для определенного интеграла справедливы следующие свойства:

1. Величина определенного интеграла не зависит от обозначения переменной интегрирования
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(z)dz = \ldots$$
2. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

3. $\int_a^a f(x)dx = 0$.
4. $\int_a^b dx = b - a$.
5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:
$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx .$$
6. Определенный интеграл от суммы двух функций равен сумме определенных интегралов от этих функций:
$$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x) \right) dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx .$$

Это свойство распространяется и на случай алгебраической суммы любого конечного числа функций.

7. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$,

где точка $x = c$ может лежать как внутри, так и вне отрезка $[a;b]$.

8. Если подынтегральная функция $f(x)$ на всем отрезке интегрирования $[a;b]$ принимает значения одного знака, то определенный интеграл есть число того же знака:

   а) $f(x) \ge 0,\ x \in [a;b]$, тогда $\int_a^b f(x)dx \ge 0$;

   б) $f(x) \le 0,\ x \in [a;b]$, тогда $\int_a^b f(x)dx \le 0$.

9. Неравенства можно почленно интегрировать:

а) $f(x) \geq \phi(x),\ x \in [a;b]$, тогда $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b \phi(x)dx$;

б) $f(x) \leq \phi(x),\ x \in [a;b]$, тогда $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \phi(x)dx$.

10. Если наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ обозначить через m, а наибольшее через M, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

11. Теорема о среднем. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то существует хотя бы одно значение $x = c$, для которого

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Значение функции $f(c)$ носит название среднего значения функции $f(x)$ на $[a;b]$.

12. Производная определенного интеграла по переменному верхнему пределу равна подынтегральной функции, в которой переменная интегрирования заменена этим пределом, т.е.

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x).$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

2.1. Формула Ньютона–Лейбница

Величина определенного интеграла зависит от вида подынтегральной функции и от пределов интегрирования a, b. Если подынтегральную функцию $f(x)$ оставлять неизменной, то величина определенного интеграла будет зависеть только от верхнего и нижнего пределов, т.е. будет функцией двух переменных. Если один предел менять, а другой не менять, то величина определенного интеграла будет функцией одного переменного. В частности, если зафиксировать нижний предел a, а верхний предел менять $b = x$, то

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x). \tag{3}$$

Согласно теореме Барроу

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x). \tag{4}$$

Из равенства (2) следует, что $\Phi(x)$ является первообразной для подынтегральной функции $f(x)$, следовательно,

$$\Phi(x) = F(x) + C, \tag{5}$$

где $F'(x) = f(x)$.

Из (3) при $x = a$ получаем

$$\Phi(a) = F(a) + C. \tag{6}$$

Из (1) при $x = a$ получаем

$$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = \int_a^a f(x)dx = 0. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует

$$F(a) + C = 0 \Rightarrow \quad C = -F(a). \tag{8}$$

При $x = b$ из (5) получаем

$$\Phi(b) = F(b) + C = F(b) - F(a). \tag{9}$$

Из (3) получаем

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(x)dx. \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{11}$$

Формулу (11) принято записывать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{12}$$

Формула (12) носит название формулы Ньютона–Лейбница. Если учесть, что $F(x)=\int f(x)dx$, то (10) принимает вид

$$\int_a^b f(x)dx=\left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b. \qquad (13)$$

Для вычисления определенного интеграла следует найти неопределенный интеграл (найти первообразную функцию), а потом вычислить приращение первообразной функции на отрезке интегрирования $[a;b]$.

Пример 1. Вычислить $\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

$$\int_0^8\left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx=\int_0^8\sqrt{2x}dx+\int_0^8\sqrt[3]{x}dx=\sqrt{2}\int_0^8 x^{\frac12}dx+\int_0^8 x^{\frac13}dx=$$

$$=\sqrt{2}\,\frac{x^{\frac32}}{\frac32}\Bigg|_0^8+\frac{x^{\frac43}}{\frac43}\Bigg|_0^8=\frac{2\sqrt2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^8+\frac34\sqrt[3]{x^4}\Big|_0^8=\frac{2\sqrt2}{3}\left(\sqrt{8^3}-\sqrt{0}\right)+$$

$$+\frac34\left(\sqrt[3]{8^4}-\sqrt[3]{0}\right)=\frac{2\sqrt2}{3}\cdot16\cdot\sqrt2+\frac34\cdot16=\frac{64}{3}+12=\frac{100}{3}$$

Пример 2. Вычислить $\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$.

$$\int_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}=\int_e^{e^2}\frac{d(\ln x)}{\ln x}=\ln\left|\ln x\right|\Big|_e^{e^2}=\ln\left|\ln e^2\right|-\ln\left|\ln e\right|=$$

$=\ln\left|2\ln e\right|-\ln 1=\ln 2$ (т.к. $\ln e=1$, $\ln 1=0$).

Пример 3. Вычислить $\int_0^1\frac{xdx}{x^2+3x+2}$.

Найдем производную $\left(x^2+3x+2\right)'=2x+3$ и получим ее в числителе

$$\int_0^1\frac{xdx}{x^2+3x+2}=\frac12\int_0^1\frac{2x+3-3}{x^2+3x+2}dx=\frac12\int_0^1\frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx-$$

$$-\frac32\int_0^1\frac{dx}{x^2+3x+\frac94-\frac94+2}=\frac12\int_0^1\frac{d(x^2+3x+2)}{x^2+3x+2}-\frac32\int_0^1\frac{d\left(x+\frac32\right)}{\left(x+\frac32\right)^2-\frac14}=$$

$$=\frac12\ln\left|x^2+3x+2\right|\Big|_0^1-\frac32\frac{1}{2\cdot\frac12}\ln\left|\frac{x+\frac32-\frac12}{x+\frac32+\frac12}\right|\Bigg|_0^1=\frac12\left(\ln6-\ln2\right)-$$

$$-\frac32\left(\ln\frac23-\ln\frac12\right)=\frac12\ln3-\frac32\ln\frac43=\frac12\left(\ln3-\ln\left(\frac43\right)^3\right)=$$

$$=\frac12\left(\ln3-\ln\frac{64}{27}\right)=\frac12\ln\frac{3\cdot27}{64}=\ln\sqrt{\frac{81}{64}}=\ln\frac98.$$

Пример 4. Вычислить $\int_0^\pi 2^3\sin^2x\cos^4xdx$.

$$\int_0^\pi 2^3\sin^2x\cos^4xdx=2^3\int_0^\pi\frac{1-\cos2x}{2}\left(\frac{1+\cos2x}{2}\right)^2dx=$$

$$=\int_0^\pi(1-\cos^2 2x)(1+\cos2x)dx=\int_0^\pi\sin^2 2x(1+\cos2x)dx=$$

$$=\int_0^\pi\sin^2 2xdx+\int_0^\pi\sin^2 2x\cos2xdx=\int_0^\pi\frac{1-\cos4x}{2}dx+$$

$$+\frac12\int_0^\pi\sin^2 2xd(\sin2x)=\frac12\int_0^\pi dx-\frac12\int_0^\pi\cos4xdx+\frac12\frac{\sin^3 2x}{3}\Bigg|_0^\pi=$$

$$= \frac{x}{2}\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{8}\sin 4x\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{6}\left(\sin^3 2\pi - \sin^3 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

(т.к. $\sin k\pi = 0$, $k \in Z$).

2.2. Определенное интегрирование по частям

Пусть u и v непрерывно дифференцируемые функции, зависящие от *x*. Тогда

$$d(u \cdot v) = vdu + udv. \qquad (14)$$

Проинтегрируем обе части (14) в пределах от *a* до *b*:

$$\int_a^b d(u \cdot v) = \int_a^b vdu + \int_a^b udv,$$

или

$$u \cdot v\Big|_a^b = \int_a^b vdu + \int_a^b udv. \qquad (15)$$

Из равенства (15) следует

$$\int_a^b udv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b vdu. \qquad (16)$$

Формула (16) носит название формулы определенного интегрирования по частям.

Пример 5. Вычислить $\int_1^2 x^2 \ln x dx$.

Разобьем подынтегральное выражение на части: $u = \ln x$, $dv = x^2 dx$, тогда $du = \frac{dx}{x}$, $v = \int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$. Согласно формуле (16) получим:

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3}\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{x^3}{3}\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}\left(2^3 \ln 2 - \ln 1\right) - \frac{1}{3}\int_1^2 x^2 dx =$$

$$= \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{3}\frac{x^3}{3}\Big|_1^2 = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{1}{9}\left(2^3 - 1^3\right) = \frac{8}{3}\ln 2 - \frac{7}{9} = \frac{24\ln 2 - 7}{9}.$$

2.3. Замена переменной в определенном интеграле

Пусть требуется вычислить $\int_a^b f(x)dx$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Введем новую переменную t по формуле $x = \varphi(t)$, тогда $dx = \varphi'(t)dt$.

Теорема. Если функции $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $f(\varphi(t))$ непрерывны на отрезке $[\alpha;\beta]$, где

$$\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b, \qquad (17)$$

то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \qquad (18)$$

Формула (18) носит название формулы замены переменной в определенном интеграле. При вычислении определенного интеграла по формуле (18) не требуется возвращения к старой переменной *x*. Достаточно из формул (17) найти пределы изменения новой переменной t.

В случае введения подстановки $\varphi(x) = t$, пределы новой переменой определяются просто $\varphi(a) = t_1$, $\varphi(b) = t_2$, но функция $\varphi(x)$ должна быть строго монотонной на интервале $(a;b)$ и иметь производную, не равную нулю ни в одной точке этого интервала.

Пример 6. Вычислить $\int_1^{64} \frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.

Первообразную найдем, введя подстановку $\sqrt[6]{x} = t$, тогда $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$. При $x = 1$, $t_1 = \sqrt[6]{1} = 1$; при $x = 64$, $t = \sqrt[6]{64} = 2$ (функция $\sqrt[6]{x}$ для всех $x \in [1;64]$ возрастает и $\left(\sqrt[6]{x}\right)' = \frac{1}{6\sqrt[6]{x^5}}$ не обращается в нуль для $x \in [1;64]$).

Согласно формуле (18) имеем:

$$\int_1^{64}\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}=\int_1^2\frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=6\int_1^2\frac{t^2dt}{1+t^2}=6\int_1^2\frac{t^2+1-1}{1+t^2}dt=$$

$$=6\int_1^2\frac{t^2+1}{1+t^2}dt-6\int_1^2\frac{1}{1+t^2}dt=6t\Big|_1^2-6arctg\,t\Big|_1^2=6(2-1)-$$

$$-6(arctg2-arctg1)=6-6\left(arctg2-\frac{\pi}{4}\right)=6+\frac{3\pi}{2}-6arctg2.$$

Пример 7. Вычислить $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

Для отыскания первообразной, введем подстановку $x=\sin t$, тогда $dx=\cos t dt$, $t=\arcsin x$. При $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $t_1=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; при $x=1$, $t_2=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t dt=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt=$$

$$=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{dt}{\sin^2 t}-\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}dt=-ctgt\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}-t\Big|_{\pi/4}^{\pi/2}=-\left(ctg\frac{\pi}{2}-ctg\frac{\pi}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=$$

$$=-(0-1)-\frac{\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4}.$$

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

3.1. Площадь плоской фигуры

Площадь криволинейной трапеции (рис. 1) вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx. \qquad (19)$$

Площадь плоской фигуры, ограниченной кривыми $y=f_1(x)$ и $y=f_2(x)$ (рис. 2), вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b\big(f_2(x)-f_1(x)\big)dx. \qquad (20)$$

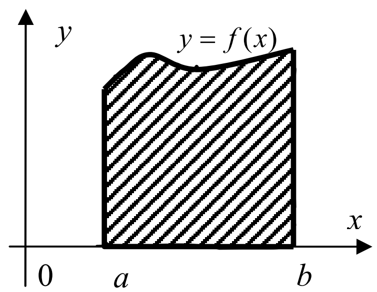


Рис. 1

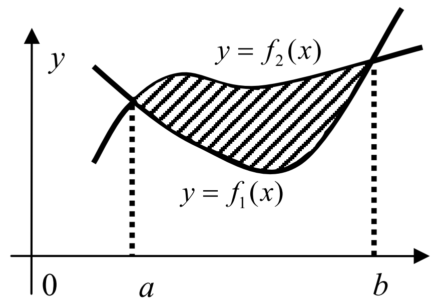


Рис. 2

Более сложные фигуры (рис. 3) следует разбивать на части, к каждой из которых применима либо формула (19), либо формула (20):

$$S=\int_a^c\big(f_3(x)-f_1(x)\big)dx+\int_c^b\big(f_3(x)-f_2(x)\big)dx.$$

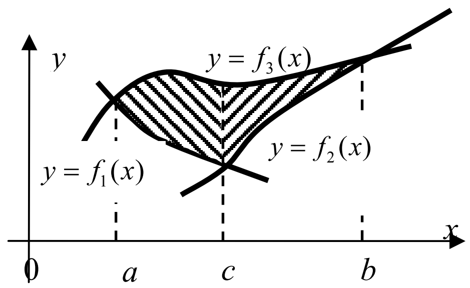


Рис. 3

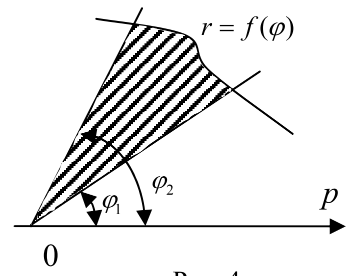


Рис. 4

При задании кривой параметрически $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$ площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле

$$S=\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\varphi'(t)dt, \tag{21}$$

где t_1, t_2 определяются из уравнений $a=\varphi(t_1)$, $b=\varphi(t_2)$ ($\psi(t)\geq 0$ для $t\in[t_1;\ t_2]$).

Если кривая задается в полярных координатах уравнением $r=f(\varphi)$, то площадь сектора (рис. 4) вычисляется по формуле

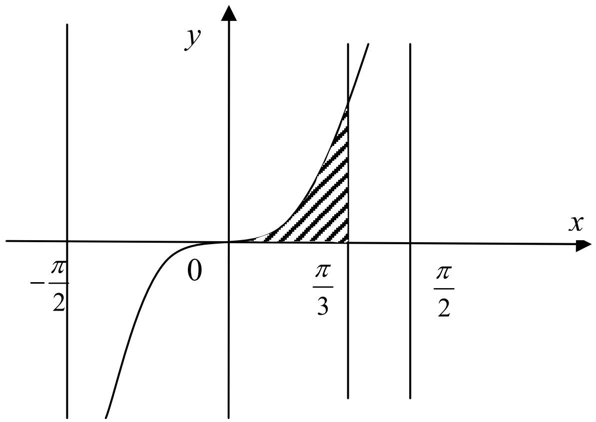
$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f^2(\varphi)d\varphi. \tag{22}$$

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=tgx$, $y=0$, $x=\dfrac{\pi}{3}$.

Решение:

Сделаем чертеж. Плоская фигура есть криволинейная трапеция.

Следовательно,



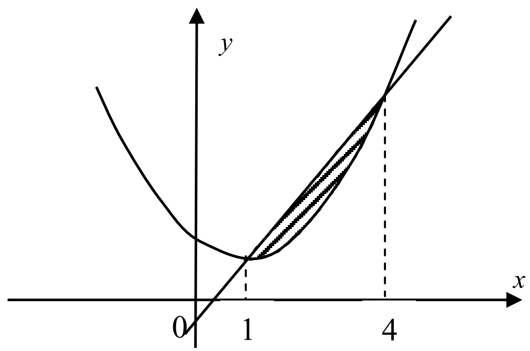
$$S=\int_0^{\pi/3} tgxdx=-l\,n\left|\cos x\right|\Big|_0^{\pi/3}==-(\ln\cos\frac{\pi}{3}-\ln\cos 0)=$$

$$=-(\ln\frac{1}{2}-\ln 1)=-\ln\frac{1}{2}=\ln 2 \text{ (кв.ед.)}.$$

Пример 9. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$.

Решение:

Сделаем чертеж. Уравнению $y=x^2-2x+3$ соответствует парабола с вершиной в точке $x=1$, $y=2$, т. к. $y=x^2-2x+3$



$\Rightarrow y-2=(x-1)^2$. Уравнению $y=3x-1$ соответствует прямая.

Найдем точки пересечения заданных линий $\begin{cases} y=x^2-2x+3, \\ y=3x-1. \end{cases}$

$x^2-2x+3=3x-1$, $x^2-5x+4=0$,

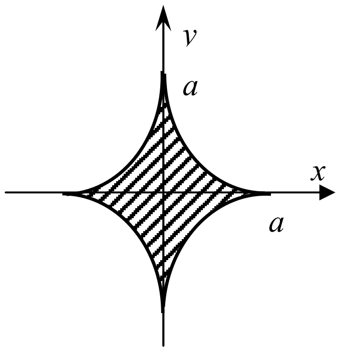
$x_1=1$, $x_2=4$.

Согласно формуле (20)

$$\int_1^4(3x-1-(x^2-2x+3))dx=\int_1^4(3x-1-x^2+2x-3)dx=$$

$$= \int_1^4 (5x - 4 - x^2)dx = \frac{5x^2}{2}\Bigg|_1^4 - 4x\Big|_1^4 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_1^4 = \frac{9}{2} \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 10. Вычислить площадь ограниченную астроидой $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases}$



Решение:

Сделаем чертеж.

При $x = 0$, $a\cos^3 t = 0$, $t = \dfrac{\pi}{2}$.

При $y = 0$, $a\sin^3 t = 0$, $t = 0$.

$x' = -3a\cos^2 t\sin t$.

Аргумент t для одной четвертой части всей площади изменяется $\dfrac{\pi}{2} \ge t \ge 0$.

Имеем:

$$\frac{S}{4} = -\int_{\pi/2}^{0} a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t\sin t dt = -3a^2 \int_{\pi/2}^{0} \sin^4 t\cos^2 t dt =$$

$$= -3a^2 \int_{\pi/2}^{0} \left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)^2 \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= -3a^2 \frac{1}{8} \int_{\pi/2}^{0} (1-\cos^2 2t)(1-\cos 2t)dt = -\frac{3}{8}a^2 \int_{\pi/2}^{0} \sin^2 2t(1-\cos 2t)dt =$$

$$= -\frac{3}{8}a^2 \int_{\pi/2}^{0} \sin^2 2t dt + \frac{3}{8}a^2 \int_{\pi/2}^{0} \sin^2 2t\cos 2t dt =$$

$$= -\frac{3}{8}a^2 \int_{\pi/2}^{0} \frac{1-\cos 4t}{2} dt + \frac{3}{16}a^2 \int_{\pi/2}^{0} \sin^2 2t d(\sin 2t) =$$

$$= -\frac{3}{16}a^2 \int_{\pi/2}^{0} dt + \frac{3}{16}a^2 \int_{\pi/2}^{0} \cos 4t dt + \frac{3}{16}a^2 \frac{\sin^3 2t}{3}\Bigg|_{\pi/2}^{0} =$$

$$= -\frac{3}{16}a^2 t\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{0} + \frac{3}{16}a^2 \frac{\sin 4t}{4}\Bigg|_{\pi/2}^{0} + \frac{1}{16}a^2(\sin^3 0 - \sin^3 \pi) =$$

$$= -\frac{3}{16}a^2\left(0 - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{3}{64}a^2(\sin 0 - \sin 2\pi) = \frac{3}{16}a^2\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi a^2}{32} \text{ (кв.ед.).}$$

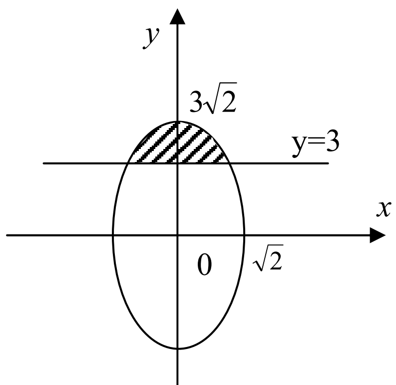
(т.к. $\sin 0 = 0$, $\sin \pi = 0$, $\sin 2\pi = 0$).

Тогда $S = 4 \cdot \dfrac{3\pi a^2}{32} = \dfrac{3\pi a^2}{8}$ (кв. ед.).

Пример 11. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y = 3$ ($y \ge 3$).

Решение:

Уравнениями $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ задается эллипс с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$ (параметрические уравнения эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, $0 \le t \le 2\pi$).



Уравнению $y = 3$ соответствует прямая, параллельная оси *Ох*. Сделаем чертеж. Получаем фигуру, площадь которой будем вычислять по формуле

$$S=\int_a^b\left(f_2(x)-f_1(x)\right)dx.$$

Найдем пределы изменения параметра t. Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} y=3\sqrt{2}\sin t \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow \quad 3=3\sqrt{2}\sin t,$$

$$\sin t=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ t=(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+k\pi, \qquad k\in Z$$

При $k=0$, $t_1=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$; при $k=1$, $t_2=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$.

Значит $\frac{3\pi}{4}\ge t\ge\frac{\pi}{4}$, $dx=-\sqrt{2}\sin tdt$.

Искомая площадь равна

$$S=\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\left(3\sqrt{2}\sin t-3\right)\left(-\sqrt{2}\right)\sin tdt=-6\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\sin^2 tdt+3\sqrt{2}\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\sin tdt=$$

$$=-6\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\frac{1-\cos 2t}{2}dt-3\sqrt{2}\cos t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4}=-3\int_{3\pi/4}^{\pi/4}dt+3\int_{3\pi/4}^{\pi/4}\cos 2tdt-$$

$$-3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{3\pi}{4}\right)=-3t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4}+\frac{3}{2}\sin 2t\Big|_{3\pi/4}^{\pi/4}-3\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

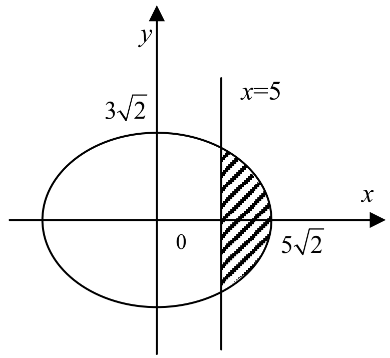
$$=-3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3\pi}{4}\right)+\frac{3}{2}\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{3\pi}{2}\right)-6=\frac{3\pi}{2}-3\ \text{(кв. ед.)}.$$

Пример 12. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=5\sqrt{2}\cos t \\ y=3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $x=5$ ($x\ge 5$).

Решение:

Сделаем чертеж. Уравнениям $\begin{cases} x=5\sqrt{2}\cos t \\ y=3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$ соответствует эллипс с полуосями $a=5\sqrt{2}$, $b=3\sqrt{2}$. Уравнению $x=5$ соответствует прямая, параллельная оси Oy.

Найдем точки пересечения линий:



$$\begin{cases} x=5\sqrt{2}\cos t \\ x=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad 5=5\sqrt{2}\cos t$$

$$\cos t=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$t=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2k\pi, \qquad k\in Z. \quad t_1=-\frac{\pi}{4}; \quad t_2=\frac{\pi}{4}.$$

Вычислим:

$$\frac{S}{2}=\int_{\pi/4}^{0}3\sqrt{2}\sin t\cdot 5\sqrt{2}(-\sin t)dt=-30\int_{\pi/4}^{0}\sin^2 tdt=$$

$$=-15\int_{\pi/4}^{0}(1-\cos 2t)dt=-15\left(t-\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_{\pi/4}^{0}=\frac{15\pi}{4}-\frac{15}{2}.$$

Тогда площадь всей фигуры

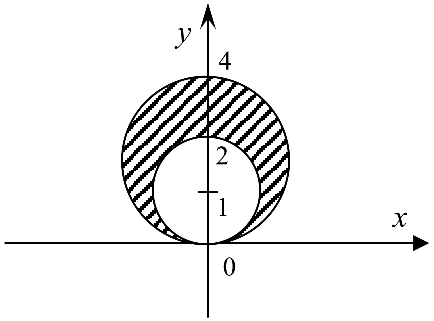
$$S=2\cdot\left(\frac{15\pi}{4}-\frac{15}{2}\right)=\frac{15\pi}{2}-15\ \text{(кв. ед.)}.$$

Пример 13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=2\sin\varphi$, $r=4\sin\varphi$.

Решение:

Уравнения линий заданы в полярной системе координат. Выясним, какая линия задается уравнением $r = 2\sin\varphi$.

Зная, что $r^2 = x^2 + y^2$, а $r\sin\varphi = y$, и умножая обе части равенства $r = 2\sin\varphi$ на r, получим



$r^2 = 2r\sin\varphi$,

$x^2 + y^2 = 2y$,

$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 = 0$,

$x^2 + (y-1)^2 = 1$ –

это окружность с центром в точке $(0;\ 1)$ и радиусом равным 1. Аналогично, уравнению $r = 4\sin\varphi$ соответствует окружность с центром в точке $(0;\ 2)$ и радиусом равным 2. Угол φ меняется в пределах $0 \le \varphi \le \pi$.

Площадь будет равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(\left(4\sin\varphi\right)^2 - \left(2\sin\varphi\right)^2\right)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}12\sin^2\varphi d\varphi =$$

$$= 6\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 3\int_0^{\pi}d\varphi - 3\int_0^{\pi}\cos 2\varphi d\varphi = 3\varphi\Big|_0^{\pi} - \frac{3}{2}\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi} =$$

$$= 3(\pi - 0) - \frac{3}{2}\left(\sin 2\pi - \sin 0\right) = 3\pi \text{ (кв. ед.).}$$

Пример 14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = \sin 5\varphi$ (пятилепестковая роза).

Решение:

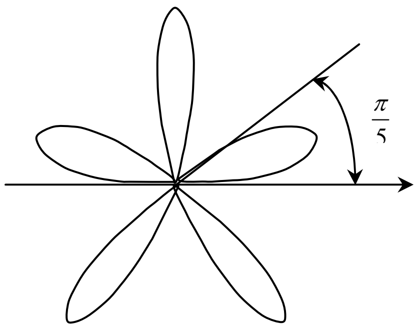


График функции $r = \sin 5\varphi$ в полярной системе координат имеет вид, указанный на рисунке. Пределы изменения угла φ можно найти из условия

$r = 0 \Rightarrow \quad \sin 5\varphi = 0,\ 5\varphi = k\pi, \quad k \in Z$;

$\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = \frac{\pi}{5}$.

Для одного лепестка φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{5}$, а всего имеется пять лепестков. Площадь всей фигуры, ограниченной этой линией, будет равна

$$S = 5\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/5}\sin^2 5\varphi d\varphi = \frac{5}{2}\int_0^{\pi/5}\frac{1-\cos 10\varphi}{2}d\varphi = \frac{5}{4}\int_0^{\pi/5}(1-\cos 10\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{5}{4}\left(\varphi - \frac{\sin 10\varphi}{10}\right)\Bigg|_0^{\pi/5} = \frac{5}{4}\left(\frac{\pi}{5} - \frac{\sin 10\frac{\pi}{5}}{10}\right) = \frac{\pi}{4} \text{ (кв. ед.).}$$

3.2. Длина дуги плоской линии

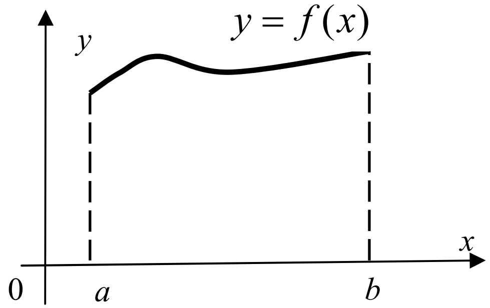


Рис. 5

Длина дуги кривой $y = f(x)$, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$ (рис. 5), вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx = \int_a^b\sqrt{1+\left(y'\right)^2}dx. \qquad (23)$$

Если кривая задается уравнениями в параметрической форме $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, то

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(x_t'\right)^2 + \left(y_t'\right)^2}\, dt, \qquad (24)$$

где t_1, t_2 – значения параметра, соответствующие концам дуги.

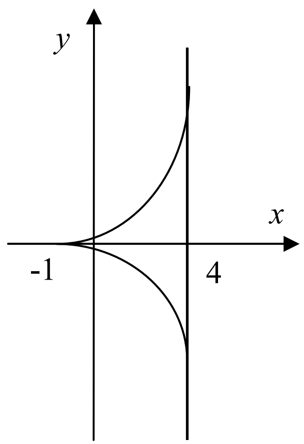
В случае задания кривой в полярных координатах $r = f(\varphi)$ длина дуги вычисляется по формуле

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + \left(r'\right)^2}\, d\varphi, \qquad (25)$$

где φ_1, φ_2 – значения полярного угла в крайних точках дуги.

Пример 15. Вычислить длину дуги линии $y^2 = (x+1)^3$, отсеченной прямой $x = 4$.

Решение:



Уравнению $y^2 = (x+1)^3$, или $y = \pm\sqrt{(x+1)^3} = \pm(x+1)^{\frac{3}{2}}$, соответствует полукубическая парабола.

Вычислим половину длины дуги

$$\frac{L}{2} = \int_{-1}^{4} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Возьмем $y = (x+1)^{\frac{3}{2}}$, $y' = \frac{3}{2}(x+1)^{1/2}$.

Тогда

$$\frac{L}{2} = \int_{-1}^{4} \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}(x+1)^{\frac{1}{2}}\right)^2}\, dx = \int_{-1}^{4} \sqrt{1 + \frac{9}{4}(x+1)}\, dx = \int_{-1}^{4} \sqrt{1 + \frac{9}{4}x + \frac{9}{4}}\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{4} \sqrt{\frac{9}{4}x + \frac{13}{4}}\, dx = \frac{1}{2\cdot 9}\int_{-1}^{4} (9x+13)^{\frac{1}{2}}\, d(9x+13) = \frac{2}{18}\frac{(9x+13)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-1}^{4} =$$

$$= \frac{1}{27}\left(\sqrt{49^3} - \sqrt{4^3}\right) = \frac{1}{27}(343-8) = \frac{1}{27}\cdot 335 = \frac{335}{27}.$$

Следовательно, вся длина дуги равна

$L = 2\cdot\frac{335}{27} = \frac{670}{27}$ (лин. ед.).

Пример 16. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = \dfrac{t^6}{6} \\ y = 2 - \dfrac{t^4}{4} \end{cases}$ между точками пересечения с осями координат.

Решение:

Кривая задана в параметрической форме. Найдем, при каких значениях параметра t кривая будет пересекать координатные оси.

Уравнение оси O_y имеет вид $x = 0$. Следовательно, $\frac{t^6}{6} = 0 \Rightarrow t = 0$. В это время $y = 2$.

Уравнение оси O_x задается уравнением $y = 0$, следовательно, $2 - \frac{t^4}{4} = 0 \Rightarrow t^4 = 8 \Rightarrow t = \pm\sqrt[4]{8}$. В это время $x = \frac{\left(\pm\sqrt[4]{8}\right)^6}{6} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$ (положительным и отрицательным значениям параметра t соответствуют одинаковые значения переменных x, y).

Согласно формуле (24) длина дуги равна $L=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left(x_t'\right)^2+\left(y_t'\right)^2}\,dt$.

Найдем $x_t'=\left(\dfrac{t^6}{6}\right)'=t^5$, $y_t'=\left(2-\dfrac{t^4}{4}\right)'=-t^3$. Тогда

$$L=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{\left(t^5\right)^2+\left(-t^3\right)^2}\,dt=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\sqrt{t^{10}+t^6}\,dt=\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}t^3\sqrt{t^4+1}\,dt=$$

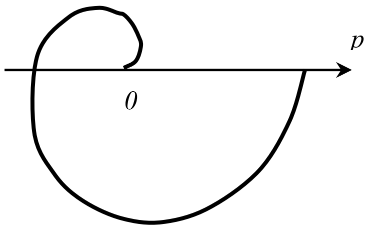
$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^{\sqrt[4]{8}}\left(t^4+1\right)^{\frac{1}{2}}d(t^4+1)=\frac{1\cdot 2}{4}\frac{(t^4+1)^{3/2}}{3}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}}=\frac{1}{6}\sqrt{\left(t^4+1\right)^3}\Bigg|_0^{\sqrt[4]{8}}=$$

$$=\frac{1}{6}\left(\sqrt{\left(8+1\right)^3}-1\right)=\frac{1}{6}\left(27-1\right)=\frac{26}{6}=\frac{13}{3}\ \text{(лин. ед.)}$$

Пример 17. Вычислить длину дуги первого витка спирали Архимеда $r=a\varphi$.

Решение:

Кривая задана в полярной системе координат. Первому витку спирали соответствуют значения полярного угла $0\le\varphi\le 2\pi$.



Согласно формуле (25) $L=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(r'\right)^2}\,d\varphi$.

Найдем $r'=\left(a\varphi\right)'=a$. Следовательно,

$$L=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{a^2\varphi^2+a^2}\,d\varphi=a\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\varphi^2+1}\,d\varphi=$$

$$=a\left(\frac{1}{2}\varphi\sqrt{1+\varphi^2}+\frac{1}{2}\ln\left|\varphi+\sqrt{1+\varphi^2}\right|\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln\left|2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right|\ \text{(лин. ед.).}$$

Покажем нахождение неопределенного интеграла:

$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\left|\begin{matrix}u=\sqrt{1+x^2} & du=\dfrac{xdx}{\sqrt{1+x^2}}\\ dv=dx & v=\int dx=x\end{matrix}\right|=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+x^2}}=$$

$$=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{(x^2+1)-1}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\frac{x^2+1}{\sqrt{1+x^2}}dx+$$

$$+\int\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=x\sqrt{1+x^2}-\int\sqrt{1+x^2}\,dx+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|;$$

Имеем $\int\sqrt{1+x^2}\,dx=x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|-\int\sqrt{1+x^2}\,dx$;

$$2\int\sqrt{1+x^2}\,dx=x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|;$$

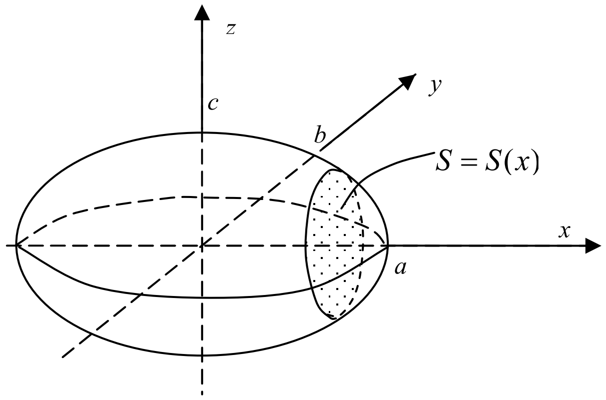
$$\int\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x\sqrt{1+x^2}+\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|\right)+C.$$

3.3. Вычисление объема тела

Вычисление объема тела по известным площадям параллельных сечений. Объем V тела, если известны площади S сечений этого тела плоскостями, перпендикулярными некоторой оси, например оси Ox – $S=S(x)$, $a\le x\le b$, вычисляется по формуле

$$V=\int\limits_a^b S(x)dx. \qquad (26)$$

Пример 18. Найти объем эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.



Решение:

Рассекая эллипсоид плоскостью, параллельной плоскости Oyz и на расстоянии x от нее $-a \le x \le a$, получим эллипс:

$$\frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)^2}+\frac{z^2}{\left(c\sqrt{1-\frac{x^2}{a}}\right)^2}=1.$$

Площадь этого эллипса равна $S(x)=\pi\cdot b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\cdot c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$.

Поэтому по формуле (26) имеем

$$V=\pi bc\int_{-a}^{a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\frac{4}{3}\pi abc \text{ (куб. ед.).}$$

Объем тела вращения. Объем тела, полученного вращением вокруг оси O_x криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=f(x)$ ($f(x)\ge 0$, $x\in[a,b]$), $y=0$, $x=a$, $x=b$ (рис. 6), вычисляется по формуле

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_a^b y^2dx. \qquad (27)$$

При вращении этой трапеции вокруг оси O_y

$$V_y=2\pi\int_a^b xydx. \qquad (28)$$

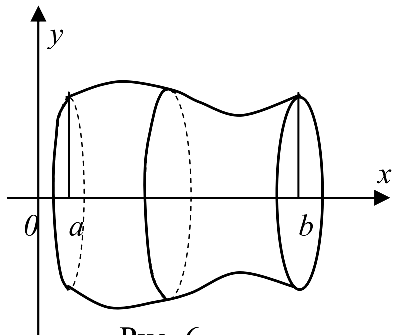


Рис. 6.

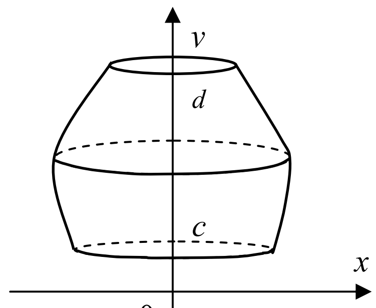


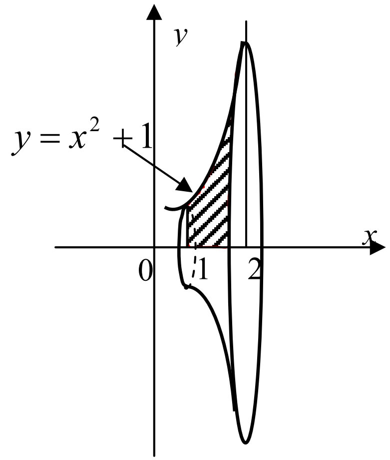
Рис. 7.

Если криволинейная трапеция вращается вокруг оси O_y (трапеция прилежит оси O_y) (рис. 7), то объем тела можно вычислить по формуле

$$V=\pi\int_c^d \psi^2(y)dy=\pi\int_a^b x^2dy. \qquad (29)$$

Пример 19. Вычислить объем тел, полученных вращением вокруг осей O_x и O_y фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Решение:



Сделаем чертеж.

При вращении фигуры вокруг оси O_x объем тела вращения равен $V_x = \pi\int_1^2 (x^2+1)^2\,dx = \pi\int_1^2 x^4dx + 2\pi\int_1^2 x^2dx + \pi\int_1^2 dx = \pi\left.\frac{x^5}{5}\right|_1^2 + 2\pi\left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 +$

$$+\pi\left. x\right|_1^2 = \frac{\pi}{5}\left(2^5-1\right) + \frac{2\pi}{3}\left(2^3-1\right) + \pi(2-1) = \frac{178}{15}\pi \text{ (куб. ед.)}$$

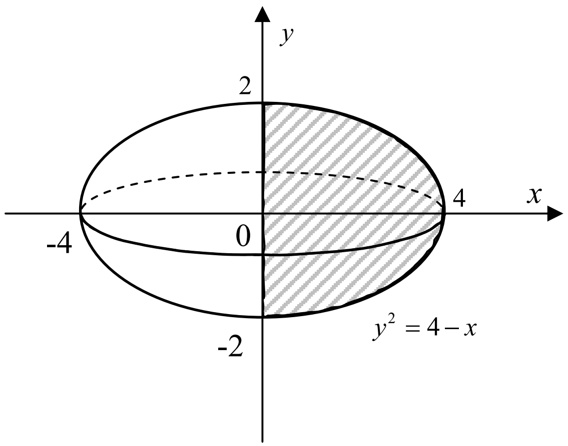
При вращении заштрихованной фигуры вокруг оси Oy объем тела вращения равен

$$V_y = 2\pi\int_1^2 x(x^2+1)dx = 2\pi\int_1^2 x^3dx + 2\pi\int_1^2 xdx = 2\pi\left.\frac{x^4}{4}\right|_1^2 + 2\pi\left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 =$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(2^4-1\right) + \pi(4-1) = \frac{15\pi}{2} + 3\pi = \frac{15\pi+6\pi}{2} = \frac{21\pi}{2} \text{ (куб.ед.).}$$

Пример 20. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4 - x$, $x = 0$.

Решение:



Сделаем чертеж, зная что уравнению $y^2 = 4 - x$ соответствует парабола, с вершиной $(4;\ 0)$, симметричная относительно оси Ox, и с ветвями, направленными влево.

Объем тела вращения согласно формуле (29) равен

$$V_y = \pi\int_{-2}^{2} (4-y^2)^2\,dy = \pi\int_{-2}^{2} (16-8y^2+y^4)dy =$$

$$=\pi\left.\left(16y - \frac{8y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right)\right|_{-2}^{2} = \pi\left(16(2+2) - \frac{8}{3}(8+8) + \frac{1}{5}(32+32)\right) =$$

$$=\frac{512}{15}\pi \text{ (куб. ед.).}$$

4. МЕХАНИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

4.1. Работа переменной силы

Пусть материальная точка M перемещается вдоль оси Ox под действием переменной силы $F = f(x)$, направленной параллельно этой оси. Работа, произведенная силой при перемещении точки М из положения $x = a$ в положение $x = a$ ($a < b$), находится по формуле

$$A = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{30}$$

Пример 21. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,05 м, если сила 100 Н растягивает пружину на 0,01 м?

Решение:

По закону Гука упругая сила, растягивающая пружину, пропорциональна этому растяжению x, т.е. $F = kx$, где k – коэффициент пропорциональности. Согласно условию задачи, сила $F = 100$ Н растягивает пружину на $x = 0{,}01$ м; следовательно, $100 = k\cdot 0{,}01$, откуда $k = 10000$; $F(x) = 10000x$.

Искомая работа на основании формулы (30) равна

$$A = \int_0^{0,05} 10000x\,dx = 5000x^2\Big|_0^{0,05} = 12{,}5 \text{ (Дж).}$$

4.2. Путь, пройденный телом

Пусть материальная точка перемещается по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$. Путь, пройденный ею за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt. \qquad (31)$$

Пример 22. Найти путь, пройденный телом за 4 секунды от начала движения, если скорость тела $v(t) = 10t + 2$ ($м/с$).

Решение:

Если $v(t) = 10t + 2$, то путь, пройденный телом от начала движения ($t = 0$) до конца 4-й секунды, равен

$$s = \int_0^4 (10t + 2)dt = \left(5t^2 + 2t\right)\Big|_0^4 = 80 + 8 = 88 \text{ (м)}.$$

4.3. Масса, статические моменты и координаты центра тяжести плоской кривой

Пусть на плоскости *Oxy* задана система материальных точек $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, …, $M_n(x_n, y_n)$ соответственно с массами m_1, m_2, …, m_n.

Статическим моментом S_x системы материальных точек относительно оси *Ox* называется сумма произведений масс этих точек на расстояние этих точек от оси *Ox*: $S_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i$.

Аналогично определяется *статический момент* S_y этой системы относительно оси *Oy*: $S_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i$.

Пусть $y = f(x)$ ($x \in [a, b]$) – это уравнение материальной кривой *AB*. Будем считать ее неоднородной с линейной плотностью $\rho = \rho(x)$. Тогда ее *масса* вычисляется по формуле

$$m = \int_a^b \rho(x)\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx. \qquad (32)$$

Статические моменты материальной плоской кривой $y = f(x)$ ($x \in [a; b]$) относительно осей *Ox* и *Oy* соответственно равны

$$S_x = \int_a^b \rho(x) y\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx, \quad S_y = \int_a^b \rho(x) x\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx \qquad (33)$$

Центром тяжести материальной плоской кривой $y = f(x)$ ($x \in [a; b]$) называется точка плоскости, обладающая следующим свойством: если в этой точке сосредоточить всю массу m заданной кривой, то статический момент этой точки относительно любой координатной оси будет равен статическому моменту всей кривой $y = f(x)$ относительно той же оси.

Из определения центра тяжести следует $m \cdot x_c = S_y$, $m \cdot y_c = S_x$.

Координаты центра тяжести материальной плоской кривой находятся по формулам

$$x_c = \frac{S_y}{m} = \frac{\int_a^b \rho(x) x\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx}{\int_a^b \rho(x)\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx}, \qquad (34),$$

$$y_c = \frac{S_x}{m} = \frac{\int_a^b \rho(x) y\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx}{\int_a^b \rho(x)\sqrt{1 + \left(y'\right)^2}\,dx}$$

Пример 23. Найти центр тяжести однородной дуги окружности $x^2 + y^2 = R^2$, расположенной в первой координатной четверти.

Решение:

Очевидно, длина указанной дуги окружности равна $l = \frac{\pi R}{2}$, ее масса равна $m = \rho l$ ($\rho = Const$). Найдем статический момент этой кривой относительно оси Ox. Поскольку уравнение дуги есть $y=\sqrt{R^2-x^2}$ и $y'=\dfrac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}$, то

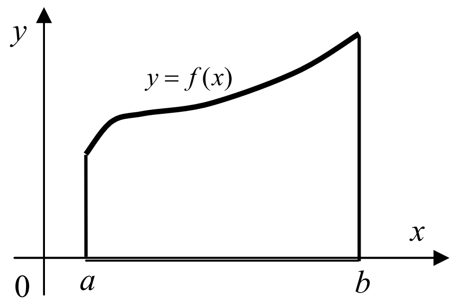
$$S_x=\rho\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2}dx=$$

$$=\rho\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}dx=\rho R\int_0^R dx=\rho R\,x\Big|_0^R=\rho R^2$$

Тогда $y_c=\dfrac{S_x}{m}=\dfrac{\rho R^2}{\rho\cdot\dfrac{\pi R}{2}}=\dfrac{2R}{\pi}$.

Так как данная дуга симметрична относительно биссектрисы первого координатного угла, $x_c=y_c=\dfrac{2R}{\pi}$.

4.4. Статические моменты и координаты центра тяжести плоской фигуры



Пусть дана материальная плоская фигура (пластинка), ограниченная кривой $y=f(x)\geq 0$ и прямыми $y=0$, $x=a$, $x=b$.
Будем считать, что поверхностная плотность пластинки постоянна ($\rho=Const$).

Тогда *масса* всей пластинки равна

$$m=\rho\int_a^b f(x)dx\,. \qquad (35)$$

Статические моменты материальной плоской фигуры относительно осей Ox и Oy соответственно равны

$$S_x=\frac{1}{2}\rho\int_a^b y^2dx\,,\qquad S_y=\rho\int_a^b xydx\,. \qquad (36)$$

Координаты центра тяжести материальной плоской фигуры ($\rho=Const$) находятся по формулам

$$x_c=\frac{S_y}{m}=\frac{\int_a^b xydx}{\int_a^b ydx},\qquad y_c=\frac{S_x}{m}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2dx}{\int_a^b ydx} \qquad (37)$$

Пример 24. Найти координаты центра тяжести полукруга $x^2+y^2\leq R^2$, $y\geq 0$ ($\rho=Const$).

Решение:

Очевидно (ввиду симметрии фигуры относительно оси Oy), что $x_c=0$. Площадь полукруга равна $\dfrac{\pi R^2}{2}$.

Находим S_x:

$$S_x=\frac{1}{2}\rho\int_{-R}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx=\frac{1}{2}\rho\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\rho\cdot\frac{2}{3}R^3.$$

Тогда $\quad y_c=\dfrac{S_x}{\rho S}=\dfrac{2\rho R^3}{3\rho\dfrac{\pi R^2}{2}}=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{R}{\pi}$.

Таким образом, центр тяжести имеет координаты $\left(0;\ \dfrac{4R}{3\pi}\right)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Вариант №1

1. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_{a}^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{a^2+x^2}$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{a}$; б) $\frac{3\pi}{2a}$; в) $\frac{\pi}{12a}$; г) $\frac{\pi}{12}$.

2. Вычислить $\int\limits_0^1 \ln(x+1)dx$.

Ответы: а) $2\ln 2-1$; б) $2\ln 2$; в) $1-2\ln 2$; г) 1.

3. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} tg^3 x dx$.

Ответы: а) 1; б) $\frac{\ln 2}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1-\ln 2}{2}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2-x^2$.

Ответы: а) $\frac{5}{2}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{8}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
$\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$, $y=0$, $0\le t\le 2\pi$.

Ответы: а) $3\pi a^2$; б) πa^2; в) πa^2; г) $\frac{\pi}{2}a^2$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a(1-\cos\varphi)$.

Ответы: а) $2\pi a^2$; б) $\frac{5}{2}\pi a^2$; в) $3\pi a^2$; г) $\frac{3}{2}\pi a^2$.

7. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2=\left(x+4\right)^3$, $x=0$.

Ответы: а) 32π; б) 64π; в) $\frac{15}{2}\pi$; г) 4π.

8. Вычислить длину дуги линии $y=\ln\sin x$ от точки с абсциссой $x=\frac{\pi}{3}$ до $x=\frac{2\pi}{3}$.

Ответы: а) $\ln 3$; б) $\ln 2$; в) $\frac{1}{2}$; г) 1.

9. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=a(\cos t+t\sin t) \\ y=a(\sin t-t\cos t) \end{cases}$ от $t_1=0$ до $t_2=\frac{\pi}{4}$.

Ответы: а) $\frac{\pi^2 a}{8}$; б) $\frac{\pi\ a}{8}$; в) $\frac{\pi a^2}{32}$; г) $\frac{a\pi^2}{32}$.

10. Вычислить длину дуги линии $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Ответы: а) $3\pi a$; б) $\frac{\pi a}{2}$; в) πa; г) $\frac{3\pi a}{2}$.

Вариант №2

1. Вычислить $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x^2+x}$.

Ответы: а) $\ln\frac{1}{3}$; б) $\ln\frac{3}{2}$; в) $\ln 3$; г) $\ln 2$.

2. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x dx$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{2}-1$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) 1; г) -1.

3. Вычислить $\int\limits_1^4 \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2}dx$.

Ответы: а) -3; б) $2\ln 1,5$; в) 1; г) $2\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{3}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{x}$, $y=-\frac{x}{2}-\frac{5}{2}$.

Ответы: а) $\frac{1}{4}\ln 2$; б) $\frac{16\ln 2}{3}$; в) $\frac{15-16\ln 2}{4}$; г) $\frac{15}{4}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=3\sin\varphi$, $r=5\sin\varphi$.

Ответы: а) 4π; б) 2π; в) 16π; г) 8π.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$\begin{cases} x=a(2\cos t-\cos 2t) \\ y=a(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}.$$

Ответы: а) πa^2; б) $2\pi a^2$; в) $4\pi a^2$; г) $6\pi a^2$.

7. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2=4x$, $x=4$.

Ответы: а) 16π; б) 32π; в) 8π; г) $\frac{\pi}{2}$.

8. Вычислить длину дуги линии $y=2\sqrt{x}$ от точки с абсциссой $x=0$ до $x=1$.

Ответы: а) $\sqrt{3}+\ln\left(1+\sqrt{3}\right)$; б) $\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$;

в) $1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$; г) $\ln 2$.

9. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}$, $0\le t\le\frac{\pi}{4}$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{16}$; б) $\frac{\pi^2}{16}$; в) $\frac{\pi}{32}$; г) $\frac{\pi^2}{32}$.

10. Вычислить длину дуги линии $r=3(1-\sin\varphi)$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Ответы: а) $12\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; б) $\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; в) $2-\sqrt{2}$; г) $3+\sqrt{2}$.

Вариант №3

1. Вычислить $\int\limits_e^{e^2}\frac{dx}{x\ln x}$.

Ответы: а) 2; б) $\ln 2$; в) $\ln 3$; г) 1.

2. Вычислить $\int\limits_0^{\ln 5} xe^{-x}dx$.

Ответы: а) 0; б) $\frac{4-\ln 5}{5}$; в) $\frac{4}{5}$; г) $\frac{1}{5}\ln 5$.

3. Вычислить $\int\limits_0^{\pi}\frac{dx}{3+2\cos x}$.

Ответы: а) π; б) $\sqrt{5}$; в) $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$; г) $\sqrt{\pi}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=1+\frac{3}{4}x^2$.

Ответы: а) $\frac{8}{3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{5}{3}$; г) $\frac{4}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=\cos\varphi$, $r=2\cos\varphi$.

Ответы: а) 2π; б) π; в) $\frac{1}{4}\pi$; г) $\frac{3}{4}\pi$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases} x = 5(t^2+1) \\ y = 2(t^2-3t) \end{cases}$, $y = 0$, $0 \le t \le 3$.

Ответы: а) 280; б) 125; в) 270; г) 135.

7. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ответы: а) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$; б) $\frac{4}{3}\pi ab^2$; в) $\frac{4}{3}\pi a^3 b^3$; г) $\frac{3}{4}\pi ab$.

8. Вычислить длину дуги линии $y = e^x - 2$, содержащейся между точками $\ln\sqrt{24} \le x \le \ln\sqrt{35}$.

Ответы: а) $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$; б) $1 + \frac{1}{2}\ln\frac{9}{10}$; в) $2 - \ln\frac{4}{5}$; г) $1 + \ln\frac{15}{14}$.

9. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t) \\ y = 3(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$.

Ответы: а) $\frac{\pi^2}{3}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi^2}{6}$; г) $\frac{\pi}{6}$.

10. Вычислить длину дуги линии $r = 8\sin\varphi$.

Ответы: а) 8π; б) 16π; в) 4π; г) 4.

Вариант №4

1. Вычислить $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$.

Ответы: а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{5}{2}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{7}{4}$.

2. Вычислить $\int_0^1 \ln(1+\sqrt{x})dx$.

Ответы: а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\frac{3}{2}$; г) 2.

3. Вычислить $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $arctge - \frac{\pi}{4}$; в) $arctge$; г) 1.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 0$.

Ответы: а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{4}{3}$; в) $\frac{32}{3}$; г) $\frac{13}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = \sin\varphi$, $r = 8\sin\varphi$

Ответы: а) $\frac{21}{4}\pi$; б) $\frac{63}{4}\pi$; в) π; г) 10π.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases} x = 2t - t^2 \\ y = 2t^2 - t \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{1}{2}$

Ответы: а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{1}{16}$; г) 1.

7. Вычислить длину дуги линии $y = 1 - \ln\cos x$, $0 \le x \le \frac{\pi}{4}$

Ответы: а) $\ln\frac{3\pi}{4}$; б) $\ln\frac{3\pi}{8}$; в) $\ln tg\frac{3\pi}{4}$; г) $\ln tg\frac{3\pi}{8}$.

8. Вычислить длину дуги линии $r = 5\sqrt{2}e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$.

Ответы: а) $10\left(e^{\frac{\pi}{6}} - 1\right)$; б) $5\left(e^{\frac{\pi}{6}} - 1\right)$; в) $e^{\frac{\pi}{6}} - 1$; г) 10.

9. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = 7(\cos t + t\sin t) \\ y = 7(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

Ответы: а) $\dfrac{7\pi^2}{8}$; б) $\dfrac{7\pi^2}{4}$; в) $\dfrac{3\pi^2}{4}$; г) $\dfrac{3\pi^2}{8}$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$.

Ответы: а) $\pi e^2 - 1$; б) $\dfrac{\pi(e^2-2)}{2}$; в) $\dfrac{\pi(e^2-1)}{4}$; г) $\dfrac{\pi(e^2+1)}{4}$.

Вариант №5

1. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$.

Ответы: а) 1; б) 2; в) 3; г) $\dfrac{1}{2}$.

2. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi/3} x\cos 3x dx$.

Ответы: а) 0; б) $-\dfrac{2}{9}$; в) -1; г) 1.

3. Вычислить $\displaystyle\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$.

Ответы: а) $2 - \ln 2$; б) $\ln 2$; в) 2; г) $1 + \ln 2$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = 1 - x^2$ $x = 0$, $x = 1$.

Ответы: а) $\dfrac{2}{3}$; б) $\dfrac{1}{3}$; в) $\dfrac{5}{3}$; г) $\dfrac{7}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2\sin\varphi$, $r = 4\sin\varphi$.

Ответы: а) 12π; б) 10π; в) 2π; г) 3π.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией

$\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \end{cases}$.

Ответы: а) 2π; б) 16π; в) 8π; г) 4π.

7. Вычислить длину дуги линии $y^2 = 4x$, отсеченной прямой $x = 1$.

Ответы: а) $3 + 2\ln 2$; б) $2\sqrt{2} + \ln 2$; в) $1 - \ln 2\sqrt{2}$; г) $2\sqrt{2} + 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = 2\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

Ответы: а) $3\sqrt{2}$; б) $6\sqrt{2}$; в) $\sqrt{2}$; г) $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

9. Вычислить длину дуги линии $r = \sqrt{8}e^{\varphi}$, $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$.

Ответы: а) $4\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$; б) $8\left(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$; в) $\dfrac{4\left(e^{\pi}-1\right)}{e^{\pi/2}}$; г) $10e^{\frac{\pi}{2}}$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линией $x^2 + y^2 = 4$.

Ответы: а) $\dfrac{35}{3}\pi$; б) $\dfrac{4}{3}\pi$; в) $\dfrac{32}{3}\pi$; г) $\dfrac{10}{3}\pi$.

Вариант №6

1. Вычислить $\displaystyle\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

Ответы: а) $\ln\dfrac{2}{3}$; б) $\ln\dfrac{3}{4}$; в) $\ln\dfrac{1}{2}$; г) $\ln\dfrac{4}{3}$.

2. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x dx$.

Ответы: а) π; б) 2π; в) $-\pi$; г) 0.

3. Вычислить $\int\limits_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}$.

Ответы: а) $-\frac{1}{6}$; б) $\frac{1}{6}$; в) $\frac{17}{6}$; г) $\frac{5}{6}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$ $y=0$.

Ответы: а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{7}{6}$; в) $\frac{5}{6}$; г) $\frac{11}{6}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=5\cos\varphi$, $r=6\cos\varphi$.

Ответы: а) 8π; б) $\frac{11}{4}\pi$; в) $\frac{5}{4}\pi$; г) 5π.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x=7(t^2+1) \\ y=3(t^2-3t) \end{cases}, \quad y=0, \quad 0\le t\le 3.$$

Ответы: а) $\frac{257}{6}$; б) $\frac{137}{3}$; в) $\frac{765}{3}$; г) $\frac{567}{2}$.

7. Вычислить длину дуги линии $y=e^x+2$, содержащейся между точками $\ln\sqrt{24}\le x\le \ln\sqrt{35}$.

Ответы: а) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{10}{9}$; б) $1+\frac{1}{2}\ln\frac{9}{10}$; в) $2-\ln\frac{4}{5}$; г) $1+\ln\frac{15}{14}$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=e^t(\cos t+\sin t) \\ y=e^t(\cos t-\sin t) \end{cases}$, $0\le t\le 1$.

Ответы: а) $2(e-1)$; б) $2e$; в) $2e-3$; г) $2e+2$.

9. Вычислить длину дуги линии $r=10\sin\varphi$.

Ответы: а) 5π; б) 10π; в) 15π; г) 20π.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $x=0$, $y=8$.

Ответы: а) $19{,}2\pi$; б) $23{,}4\pi$; в) $20{,}5\pi$; г) $16{,}4\pi$.

Вариант №7

1. Вычислить $\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

Ответы: а) $1-\sin 1$; б) 1; в) 0; г) $1-\cos 1$.

2. Вычислить $\int\limits_0^2 x\cos xdx$.

Ответы: а) $\sin 2-2\cos 2$; б) $1-2\cos 2$; в) $1+2\cos 2$; г) $\sin 2+\cos 2$.

3. Вычислить $\int\limits_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{\sqrt[3]{(x-2)^2}+3}dx$.

Ответы: а) $8-\frac{9}{2\sqrt{3}}\pi$; б) 1; в) $6+\frac{5}{23}\sqrt{\pi}$; г) $2-\frac{4}{3\sqrt{3}}\pi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{1+x^2}$, $y=\frac{x^2}{2}$.

Ответы: а) $\pi-1$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$; г) $\frac{\pi}{2}+2$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=4\cos\varphi$, $r=6\cos\varphi$.

Ответы: а) 5π; б) 2π; в) 4π; г) 6π.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x=6(t^2+1) \\ y=4(t^2-3t) \end{cases}, \quad y=0,\ t\in[0;3].$$

Ответы: а) 320; б) 324; в) 128; г) 256.

7. Вычислить длину дуги линии $y=1-\ln(x^2-1)$, содержащейся между точками $9\le x\le 16$.

Ответы: а) $7+\ln\frac{12}{17}$; б) $5+\ln\frac{68}{75}$; в) $5+\ln\frac{75}{68}$; г) $7+\ln\frac{75}{68}$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t-\dfrac{t^3}{3} \end{cases}$, $0\le t\le\frac{3}{2}$.

Ответы: а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{5}{8}$; в) $\frac{16}{8}$; г) $\frac{21}{8}$.

9. Вычислить длину дуги линии $r=4\cos\varphi$.

Ответы: а) 4π; б) 8π; в) 6π; г) 2π.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=-x^2+5x-6$, $y=0$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{30}$; б) $\frac{\pi}{5}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{2\pi}{15}$.

Вариант №8

1. Вычислить $\int\limits_0^{-3}\frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.

Ответы: а) $\frac{5}{3}$; б) 1; в) $-\frac{2}{3}$; г) $-\frac{5}{3}$.

2. Вычислить $\int\limits_0^1 (x-1)e^{-x}dx$.

Ответы: а) $-e^{-1}$; б) $\frac{1}{e}$; в) $\frac{2}{e}$; г) $-\frac{2}{e}$.

3. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/4}\frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Ответы: а) $arctg\sqrt{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) π; г) $\frac{arctg\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=-x$.

Ответы: а) $\frac{7}{2}$; б) $\frac{9}{2}$; в) $\frac{45}{2}$; г) $\frac{3}{2}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=5(1-\cos\varphi)$.

Ответы: а) $\frac{75}{2}\pi$; б) $\frac{5\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{57\pi}{2}$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=8\sin t \end{cases}$, $y\ge 0$.

Ответы: а) 72π; б) 48π; в) 24π; г) 12π.

7. Вычислить длину дуги линии $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$, $1\le x\le 4$.

Ответы: а) $\frac{7}{4}-\ln 2$; б) $\frac{15}{2}+2\ln 2$; в) $\frac{15}{4}+\ln 2$; г) $\frac{15}{4}+\ln 4$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=6\cos^3 t \\ y=6\sin^3 t \end{cases}$, $0\le t\le\frac{\pi}{4}$.

Ответы: а) 36; б) 9; в) 6; г) 4.

9. Вычислить длину дуги линии $r=3e^{3\varphi/4}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Ответы: а) $\frac{15}{4}\left(e^{\frac{\pi}{6}}-1\right)$; б) $\frac{7}{2}\left(e^{\frac{\pi}{8}}-1\right)$; в) $\frac{7}{2}\left(e^{\pi}-1\right)$; г) $\frac{15}{4}\left(e^{\frac{\pi}{8}}-1\right)$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=-4x-x^2$, $y=0$.

Ответы: а) 512π; б) 486π; в) 375π; г) 256π.

Вариант №9

1. Вычислить $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x dx$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{8}$; в) $\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}$; г) $\frac{\pi}{8}$.

2. Вычислить $\int_0^{2} x e^{-\frac{x}{2}} dx$.

Ответы: а) $4-8e^{-1}$; б) $2-4e^{-1}$; в) $-4e^{-1}$; г) $-8e^{-1}$.

3. Вычислить $\int_0^{1} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Ответы: а) π; б) 0; в) 1; г) $\frac{\pi}{2}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 2(x-1)$, $x = 3$.

Ответы: а) $\frac{8}{3}$; б) $\frac{16}{3}$; в) $\frac{3}{2}$; г) $\frac{11}{2}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = 3\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y = 0$ ($y \ge 0$).

Ответы: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $3\sqrt{2}\pi$; в) 6π; г) 3π.

6. Вычислить площадь одного лепестка розы $r = \sqrt{2}\sin 3\varphi$.

Ответы: а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{\pi}{4}$.

7. Вычислить длину дуги линии $y = \ln(1-x^2)$, $0 \le x \le \frac{3}{4}$.

Ответы: а) $1+3\ln 2$; б) $\frac{3}{7}+\ln 2$; в) $\ln 3-\frac{1}{4}$; г) $\ln 7-\frac{3}{4}$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = 10(\cos t + t\sin t) \\ y = 10(\sin t - t\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

Ответы: а) $5\pi^2$; б) $10\pi^2$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{3\pi}{2}$.

9. Вычислить длину дуги линии $r = 5e^{5\varphi/12}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Ответы: а) $\frac{48}{5}e^{\frac{5\pi}{12}}$; б) $\frac{35}{12}\left(e^{5\pi}-1\right)$; в) $\frac{65}{12}\left(e^{5\pi/12}-1\right)$; г) $\frac{75}{12}\left(e^{5\pi/12}-1\right)$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = x$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{12}$; г) $\frac{\pi}{2}$.

Вариант №10

1. Вычислить $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$.

Ответы: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{3}$; в) $\frac{3}{2}$; г) 3.

2. Вычислить $\int_0^{1} \ln(x+1) dx$.

Ответы: а) $2\ln 2$; б) 2; в) $2\ln 2 - 1$; г) $\frac{1}{2}\ln 2 + 1$.

3. Вычислить $\int_0^{3} x\sqrt{1+x} dx$.

Ответы: а) $\frac{131}{15}$; б) $\frac{416}{15}$; в) $\frac{116}{15}$; г) $\frac{2}{3}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = \cos x$, $x = 0$ ($x \ge 0$).

Ответы: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{2} - 1$; в) $2\sqrt{3}$; г) $\sqrt{2} - 2$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r = 4\cos 4\varphi$, $-\frac{\pi}{8} \le x \le \frac{\pi}{8}$.

Ответы: а) π; б) $\frac{\pi}{8}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) 2π.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, $x = 0$ ($x \ge 0$).

Ответы: а) π; б) 8π; в) 2π; г) 4π.

7. Вычислить длину дуги линии $y = 4 + \frac{1}{4}e^{4x}$, $\ln\sqrt[8]{15} \le x \le \ln\sqrt[8]{35}$.

Ответы: а) $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\ln\frac{25}{21}$; б) $\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{7}$; в) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\ln\frac{25}{21}$; г) $\frac{1}{8}\ln\frac{21}{26}$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

Ответы: а) 2; б) 4; в) 3; г) 6.

9. Вычислить длину дуги линии $r = \sqrt{2}\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le 3\pi$.

Ответы: а) $\frac{3\pi}{2}$; б) $3\sqrt{2}\pi$; в) 3π; г) $\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = tgx$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

Ответы: а) $\pi - \frac{\pi^2}{4}$; б) $\frac{3\pi}{4}$; в) $1 - \frac{\pi^2}{4}$; г) $2\pi - \pi^2$.

Вариант №11

1. Вычислить $\int_0^{\pi} \frac{\cos x dx}{2 + \sin x}$.

Ответы: а) 0; б) 1; в) $\ln 2$; г) $2\ln 2$.

2. Вычислить $\int_1^e x \ln x dx$.

Ответы: а) 0; б) $\ln 2$; в) $\frac{1}{4}$; г) $\frac{e^2 + 1}{4}$.

3. Вычислить $\int_1^6 \frac{dx}{1 + \sqrt{3x - 2}}$.

Ответы: а) $\ln\frac{2}{5} - 3$; б) $\frac{1}{3}\ln\frac{2}{5}$; в) $\frac{2}{3}\left(\ln\frac{2}{5} + 3\right)$; г) $\frac{2}{3}\ln 5$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $x = y$, $x = 4$.

Ответы: а) $6 - 4\ln 2$; б) $6 - \ln 2$; в) $2 + \ln 2$; г) $\ln 2$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 2e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Ответы: а) $\frac{e^{2\pi} - 1}{2}$; б) $2e^{2\pi}$; в) $e^{2\pi} - 1$; г) $e^{\pi} + 1$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = t^2 - 3t \end{cases}$, $0 \le t \le 3$.

Ответы: а) $\frac{58}{3}$; б) $\frac{27}{2}$; в) $\frac{54}{5}$; г) $\frac{37}{4}$.

7. Вычислить длину дуги линии $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \le x \le 2$.

Ответы: а) $cth2$; б) $th2$; в) $ch2$; г) $sh2$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = \cos t + \sin t \\ \text{y = cost-sint} \end{cases}$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Ответы: а) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$; б) $\sqrt{2}\pi$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$; г) $\dfrac{\pi}{4}$.

9. Вычислить длину дуги всей линии $r = 3\cos\varphi$.

Ответы: а) 2π; б) π; в) 4π; г) 3π.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг Оx фигуры, ограниченной линиями $y = 3x - x^2$, $y = 0$.

Ответы: а) $\dfrac{71}{10}\pi$; б) $\dfrac{81}{10}\pi$; в) $\dfrac{81}{5}\pi$; г) $\dfrac{771}{10}\pi$.

Вариант №12

1. Вычислить $\displaystyle\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

Ответы: а) -1; б) 0; в) 1; г) 2.

2. Вычислить $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}dx$.

Ответы: а) $e-1$; б) $1-\dfrac{2}{e}$; в) $\dfrac{2}{e}$; г) $1+\dfrac{2}{e}$.

3. Вычислить $\displaystyle\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

Ответы: а) $7+2\ln 2$; б) $5-2\ln 2$; в) $3\ln 2$; г) $\ln 2$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3\sqrt{x}$, $y = \dfrac{3}{x}$, $x = 9$.

Ответы: а) $10\ln 3$; б) $3-\ln 2$; в) $52-6\ln 3$; г) $42+6\ln 3$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 6(t^2+1) \\ y = 4(t^2 - 3t) \end{cases}$, $y = 0, t \in [0;\, 3]$.

Ответы: а) 342; б) 324; в) 100; г) 200.

© КРСУ Давидюк Т.А., Гончарова И.В. Кафедра высшей математики

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной одним лепестком линии $r = 2\sin 5\varphi$.

Ответы: а) $\dfrac{1}{3}\pi$; б) $\dfrac{\pi}{2}$; в) $\dfrac{\pi}{5}$; г) $\dfrac{\pi}{6}$.

7. Вычислить длину дуги линии $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, заключенной между прямыми $x = \pm 1$.

Ответы: а) $\dfrac{1}{e}$; б) e^{-2}; в) $2\left(e - \dfrac{1}{e}\right)$; г) $\dfrac{e^2-1}{e}$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = 8(t - \sin t) \\ y = 8(1-\cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Ответы: а) 56; б) 64; в) 8; г) 4.

9. Вычислить длину дуги линии $r = 5\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$, $0 \le \varphi \le 3\pi$.

Ответы: а) $\dfrac{15\pi}{2}$; б) $\dfrac{5\pi}{2}$; в) $\dfrac{3\pi}{2}$; г) $\dfrac{\pi}{2}$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $x^2 - y^2 = 9$, $x = 6$.

Ответы: а) 36π; б) $\dfrac{216\pi}{3}$; в) $\dfrac{109\pi}{3}$; г) 54π.

Вариант №13

1. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sin^2 2x dx$.

Ответы: а) $\dfrac{\pi}{8}$; б) $\dfrac{\pi}{2}$; в) π; г) $\dfrac{\pi}{4}$.

2. Вычислить $\int_0^1 xe^{2x}dx$.

Ответы: а) $\frac{2e^2-1}{4}$; б) $\frac{e^2+1}{2}$; в) $\frac{e^2+1}{4}$; г) $\frac{e^2-1}{4}$.

3. Вычислить $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

Ответы: а) π; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\pi+1$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=8x$, $x=8$.

Ответы: а) $\frac{27}{3}$; б) $\frac{56}{3}$; в) $\frac{128}{3}$; г) $\frac{256}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases} x=2(t^2-1) \\ y=4(4t-t^2) \end{cases}$, $y=0$, $t\in[0;\ 4]$.

Ответы: а) $\frac{1024}{3}$; б) $\frac{1025}{3}$; в) $\frac{1031}{3}$; г) $\frac{1034}{3}$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=5\cos\varphi$, $r=6\cos\varphi$.

Ответы: а) $\frac{11\pi}{4}$; б) 11π; в) $\frac{11\pi}{2}$; г) $\frac{11\pi}{3}$.

7. Вычислить длину дуги линии $y^2=x^3$, отсеченной прямой $x=\frac{4}{3}$.

Ответы: а) $\frac{56}{27}$; б) $\frac{32}{27}$; в) $\frac{112}{27}$; г) $\frac{110}{27}$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=t^2 \\ y=\frac{t}{3}(t^2-3) \end{cases}$, между точками пересечения с осью Ox.

© КРСУ Давидюк Т.А., Гончарова И.В. Кафедра высшей математики

Ответы: а) $\sqrt{3}$; б) $4\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{3}$; г) 5.

9. Вычислить длину дуги линии $r=10(1+\cos\varphi)$, $0\le\varphi\le\pi$.

Ответы: а) 40; б) 10; в) 15; г)5.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $x^2-y^2=4$, $y=\pm2$.

Ответы: а) 36π; б) $\frac{64\pi}{3}$; в) $\frac{109\pi}{3}$; г) 54π.

Вариант №14

1. Вычислить $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

Ответы: а) $\frac{7}{72}$; б) $\frac{5}{34}$; в) $\frac{7}{36}$; г) $\frac{3}{34}$.

2. Вычислить $\int_0^1 x\cdot arctgx dx$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{2}+1$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$; г) $\sqrt{3}$.

3. Вычислить $\int_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$.

Ответы: а) $\frac{13}{5}$; б) $\frac{16}{3}$; в) $\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{6}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=2x+4$, $x=0$.

Ответы: а) $\frac{14}{3}$; б) $\frac{16}{3}$; в) $\frac{17}{3}$; г) $\frac{8}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, одного лепестка розы $r=4\sin 5\varphi$.

Ответы: а) $\frac{20\pi}{7}$; б) $\frac{4\pi}{5}$; в) $\frac{2\pi}{5}$; г) $\frac{2\pi}{7}$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 5(t^2+1) \\ y = 3(t^2 - 3t) \end{cases}$, $y = 0, t \in [0;\, 3]$.

Ответы: а) $\dfrac{353}{2}$; б) $\dfrac{425}{2}$; в) $\dfrac{395}{2}$; г) $\dfrac{405}{2}$.

7. Вычислить длину дуги линии $y^2 = \dfrac{4}{9}(2-x)^3$, отсеченной прямой $x = -1$.

Ответы: а) $\dfrac{5}{3}$; б) $\dfrac{10}{3}$; в) $\dfrac{28}{3}$; г) $\dfrac{14}{3}$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

Ответы: а) $\dfrac{\pi^3}{2}$; б) $\dfrac{\pi^2}{2}$; в) $\dfrac{\pi}{3}$; г) $\dfrac{\pi^3}{3}$.

9. Вычислить длину дуги линии $r = 4e^{4\varphi/3}$, $0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4}$.

Ответы: а) $5\left(e^{\pi/3}-1\right)$; б) $3\left(e^{\pi/3}-1\right)$; в) $4\left(e^{\pi/4}-1\right)$; г) $4e^{\pi/4}$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2 = (x+4)^3$, $x = 0$.

Ответы: а) 36,5; б) 58,5; в) 56,5; г) 52,5.

Вариант №15

1. Вычислить $\displaystyle\int_1^2 \left(5x\sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$.

Ответы: а) $4\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$; б) $4 - \sqrt{2}$; в) $\dfrac{1}{2} + \sqrt[3]{2}$; г) $8\sqrt{2} + \sqrt[3]{2} - 3$.

2. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\ln 2} xe^{-x}dx$.

Ответы: а) $\dfrac{1}{4}(1+\ln 2)$; б) $\dfrac{1}{2}(1-\ln 2)$; в) $2\ln 2$; г) $\dfrac{1}{5}(2+\ln 2)$.

3. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$.

Ответы: а) $\dfrac{2}{\sqrt{5}} arctg\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} arctg\sqrt{5}$; в) $arctg\dfrac{1}{\sqrt{5}}$; г) 0.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2x$, $y = x + 2$.

Ответы: а) $\dfrac{7}{2}$; б) $\dfrac{5}{2}$; в) $\dfrac{9}{2}$; г) 3.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 3\cos\varphi$, $r = 6\cos\varphi$.

Ответы: а) $\dfrac{25}{4}$; б) $\dfrac{27\pi}{4}$; в) $\dfrac{27}{4}$; г) $\dfrac{25\pi}{4}$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = 4(t^2-1) \\ y = 5(4t - t^2) \end{cases}$, $y = 0, t \in [0;\, 4]$.

Ответы: а) $\dfrac{1874}{3}$; б) $\dfrac{2560}{3}$; в) $\dfrac{1154}{4}$; г) $\dfrac{2081}{2}$.

7. Вычислить длину дуги линии $y = \ln(\sin x)$ от $x_1 = \dfrac{\pi}{3}$ до $x_2 = \dfrac{2\pi}{3}$.

Ответы: а) $2\ln 3$; б) $3\ln 2$; в) $\ln 2$; г) $\ln 3$.

8. Вычислить длину дуги линии $r = \sqrt{8}e^{\varphi}$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Ответы: а) $2(e^{\pi}-1)$; б) $4(e^{\pi}-1)$; в) $6(e^{\pi}-1)$; г) $8(e^{\pi}-1)$.

9. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=4\left(\cos t+t\sin t\right) \\ y=4\left(\sin t-t\cos t\right) \end{cases}$, $0\le t\le \pi$.

Ответы: а) $2\pi^2$; б) $3\pi^2$; в) $4\pi^2$; г) $5\pi^2$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y=\sin x$ и осью Ox.

Ответы: а) $\frac{\pi^3}{2}$; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi^2}{2}$; г) $\frac{\pi}{3}$.

Вариант №16

1. Вычислить $\int\limits_{-\pi}^{2\pi}\sin^2 xdx$.

Ответы: а) $\frac{5\pi}{2}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; в) 2π; г) π.

2. Вычислить $\int\limits_{0}^{e-1}\ln(x+1)dx$.

Ответы: а) e; б) $\ln 2$; в) 1; г) 0.

3. Вычислить $\int\limits_{0}^{3}x\sqrt{9-x^2}dx$.

Ответы: а) 9; б) 6; в) 3; г) 1.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=1-x$, $x=-3$.

Ответы: а) $\frac{1}{6}$; б) $\frac{13}{6}$; в) $\frac{28}{3}$; г) $\frac{32}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=4\sin\varphi$, $r=5\sin\varphi$

Ответы: а) $\frac{1}{4}\pi$; б) $\frac{9}{4}\pi$; в) 9π; г) $\frac{\pi}{2}$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases} x=2(t^2+1) \\ y=3(t^2-3t) \end{cases}$, $y=0$, $0\le t\le 3$.

Ответы: а) 78; б) 80; в) 81; г) 63.

7. Вычислить длину дуги линии $y=4+\ln\sin x$ от $x_1=\frac{\pi}{4}$ до $x_2=\frac{\pi}{3}$.

Ответы: а) $\ln\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\ln 3$; в) $\ln\sqrt{3}$; г) $\ln\frac{6}{\sqrt{3}}$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=4(2\cos t-\cos 2t) \\ y=4(2\sin t-\sin 2t) \end{cases}$, $t\in\left[0;\ 2\pi\right]$.

Ответы: а) 100; б) 48; в) 64; г) 32

9. Вычислить длину дуги линии $r=\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0\le\varphi\le 3\pi$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{3\pi}{2}$; в) π; г) 2π.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Ответы: а) $\frac{4}{3}\pi ab^2$; б) $\frac{4}{3}\pi a^2b$; в) $4\pi ab^2$; г) $4\pi a^2b$.

Вариант №17

1. Вычислить $\int\limits_{1}^{4}\frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$.

Ответы: а) $\frac{1}{4}$; б) 2; в) $\frac{11}{4}$; г) $\frac{7}{4}$.

2. Вычислить $\int\limits_{0}^{2\pi}x^2\cos xdx$.

Ответы: а) 2π; б) 4π; в) -4π; г) 3π.

3. Вычислить $\int\limits_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}-1}dx$.

Ответы: а) $2+2\ln 2$; б) $1-2\ln 2$; в) $3-2\ln 2$; г) $3+2\ln 2$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = x^3$, $x=3$.

Ответы: а) $\frac{4}{5}\sqrt{3}$; б) $\frac{9\sqrt{3}}{5}$; в) $\frac{36\sqrt{3}}{5}$; г) $\frac{18\sqrt{3}}{5}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=5\cos\varphi$, $r=10\cos\varphi$.

Ответы: а) 75π; б) 25π; в) $\frac{25}{4}\pi$; г) $\frac{75\pi}{4}$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
$\begin{cases} x=3(t^2+1) \\ y=2(t^2-3t) \end{cases}$, $y=0$, $0\le t\le 3$.

Ответы: а) 81; б) 80; в) 78; г) 65.

7. Вычислить длину дуги линии $y=2-\frac{1}{3}e^{3x}$ от $x=\ln\sqrt[6]{3}$ до $x=\ln\sqrt[6]{8}$.

Ответы: а) $1+\ln\frac{3}{2}$; б) $\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\ln\frac{3}{2}$; в) $\frac{1}{3}+\ln\frac{3}{2}$; г) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\ln\frac{3}{2}$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos^3 t \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}$, $0\le t\le\frac{\pi}{4}$.

Ответы: а) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{3}{4}$; г) $\frac{3}{8}$.

9. Вычислить длину дуги линии $r=4\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0\le\varphi\le 3\pi$.

Ответы: а) $\frac{5\pi}{2}$; б) 4π; в) $\frac{3\pi}{2}$; г) 6π.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2=4ax$, $x=a$.

Ответы: а) $\frac{8}{5}\pi a^3$; б) $\frac{13}{5}\pi a^3$; в) $\frac{16}{5}\pi a^3$; г) $16\pi a^3$.

Вариант №18

1. Вычислить $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x^5}{x+2}dx$.

Ответы: а) $\frac{520}{15}-32\ln 3$; б) $10+3\ln 3$; в) $30\frac{2}{15}+20\ln 3$; г) $35\frac{1}{15}-32\ln 3$.

2. Вычислить $\int\limits_2^e \ln x dx$.

Ответы: а) $2-2\ln 2$; б) $e-2\ln 2$; в) $3+2\ln 2$; г) $1+2\ln 2$.

3. Вычислить $\int\limits_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$.

Ответы: а) $2+3\ln 3$; б) $2\ln 3$; в) $4-2\ln 3$; г) $1-2\ln 3$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4x-x^2$, $y=x$.

Ответы: а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{5}{2}$; в) $\frac{7}{2}$; г) $\frac{9}{2}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
$\begin{cases} x=8(t^2-1) \\ y=7(4t-t^2) \end{cases}$, $y=0$, $0\le t\le 4$.

Ответы: а) $\frac{5312}{3}$; б) $\frac{7168}{3}$; в) $\frac{2236}{5}$; г) $\frac{1138}{7}$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r=4\cos\varphi$, $r=8\cos\varphi$.

Ответы: а) 48π; б) 24π; в) 12π; г) 4π.

7. Вычислить длину дуги линии $y=\ln x$ от $x_1=\dfrac{3}{4}$ до $x_2=\dfrac{12}{5}$.

Ответы: а) $1-\ln 3$; б) $2+3\ln 2$; в) $\dfrac{27}{20}+\ln 2$; г) $\dfrac{1}{3}+\ln 2$.

8. Вычислить длину дуги линии $r=\sqrt{32}e^{\varphi}$, $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$.

Ответы: а) $8e^{\frac{\pi}{2}}$; б) $32e^{\frac{\pi}{2}}-1$; в) $16e^{\frac{\pi}{2}}$; г) $8\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)$.

9. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases}x=e^t(\cos t+\sin t)\\ y=e^t(\cos t-\sin t)\end{cases}$, $0\le t\le\dfrac{\pi}{4}$.

Ответы: а) $e^{\frac{\pi}{4}}-2$; б) $\dfrac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{4}}-1\right)$; в) $2\left(e^{\frac{\pi}{4}}-1\right)$; г) $e^{\frac{\pi}{4}}-1$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$.

Ответы: а) $\dfrac{169}{15}\pi$; б) $\dfrac{178}{15}\pi$; в) $\dfrac{\pi}{15}$; г) $\dfrac{2\pi}{3}$.

Вариант №19

1. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi/4}\frac{arctgx}{1+x^2}dx$.

Ответы: а) 1; б) $\dfrac{1}{3}$; в) $\dfrac{1}{2}$; г) $\dfrac{\pi}{4}$.

2. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi}x\sin 2x dx$.

Ответы: а) $-\dfrac{\pi}{2}$; б) $\dfrac{\pi}{2}$; в) -1; г) 1.

3. Вычислить $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+4\sin^2 x}$.

Ответы: а) $\dfrac{\pi}{2}$; б) $\dfrac{3\pi}{\sqrt5}$; в) $\dfrac{\pi}{\sqrt5}$; г) $\dfrac{\pi}{2\sqrt5}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2-x^2$.

Ответы: а) 2; б) $\dfrac{5}{3}$; в) $\dfrac{8}{3}$; г) $\dfrac{7}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases}x=5(t^2-1)\\ y=6(4\mathrm{t}-\mathrm{t}^2)\end{cases}$,

$y=0, t\in[0;\,4]$.

Ответы: а) 1178; б) 1280; в) $\dfrac{255}{4}$; г) $\dfrac{1133}{3}$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=a\cos 3\varphi$ (рассмотреть один лепесток).

Ответы: а) $\dfrac{a^2\pi}{3}$; б) $\dfrac{a^2\pi}{12}$; в) $\dfrac{a^2\pi}{2}$; г) $a^2\pi$.

7. Вычислить длину дуги линии $y=e^x+8$, $\ln\sqrt8\le x\le\ln\sqrt{24}$.

Ответы: а) $2+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$; б) $1+\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$; в) $2+\ln\dfrac{4}{3}$; г) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{4}{3}$.

8. Вычислить длину дуги линии $r=\sqrt{18}e^{\varphi}$, $0\le\varphi\le\pi$.

Ответы: а) $18(e^{\pi}-1)$; б) $6(e^{\pi}-1)$; в) $18(e^{\pi}+1)$; г) $3(e^{\pi}+1)$.

9. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases}x=\cos t-\dfrac{1}{2}\cos 2t\\ y=\sin t-\dfrac{1}{2}\sin 2t\end{cases}$, $0\le t\le\pi$.

Ответы: а) 1; б) 2; в) 4; г) $\dfrac{15}{2}$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=0$, $x=0$, $x\ge 0$.

Ответы: а) 2π; б) 4π; в) 6π; г) 8π.

Вариант №20

1. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}dx$.

Ответы: а) $\ln\frac{1+\sqrt5}{2}$; б) $\frac13\ln\frac{1+\sqrt5}{2}$; в) $\frac12\ln\frac{1-\sqrt5}{2}$; г) $\frac13\ln(2+\sqrt5)$.

2. Вычислить $\int\limits_1^e x^3\ln x dx$.

Ответы: а) $\frac{3e^4+1}{16}$; б) $\frac{3e^4+2}{16}$; в) $\frac{3e^4+1}{8}$; г) $\frac{3e^4-1}{8}$.

3. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2\cos x+3}$.

Ответы: а) $2arctg\sqrt5$; б) $3-arctg\frac{1}{\sqrt5}$; в) $\frac{2}{\sqrt5}arctg\frac{1}{\sqrt5}$; г) $arctg\frac{1}{\sqrt5}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2=3x$, $x^2=3y$.

Ответы: а) 3; б) $\frac{13}{3}$; в) $\frac{10}{3}$; г) $\frac{7}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=3(t^2-1) \\ y=4\mathrm{t}-\mathrm{t}^2 \end{cases}$, $y=0, t\in[0;\ 4]$.

Ответы: а) 112; б) 125; в) 128; г) 132.

6. Вычислить площадь одного лепестка розы $r=4\sin3\varphi$.

Ответы: а) $\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{4\pi}{3}$; в) $\frac{8\pi}{3}$; г) 4π.

7. Вычислить длину дуги линии $y=1+e^x$ от $x_1=\ln\sqrt8$ до $x_2=\ln\sqrt{15}$.

Ответы: а) $1-\frac12\ln\frac{3}{10}$; б) $1+\frac12\ln\frac{3}{10}$; в) $1+\ln\frac65$; г) $1+\frac12\ln\frac65$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=\cos^3 t \\ y=\sin^3 t \end{cases}$, $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Ответы: а) $\frac32$; б)6; в)3; г) $\frac34$.

9. Вычислить длину дуги линии $r=2(1-\cos\varphi)$.

Ответы: а) 2; б) 4; в) 8; г) 16.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y^2=x^3$, $y=0$, $x=1$.

Ответы: а) $\frac37\pi$; б) $\frac47\pi$; в) $\frac17\pi$; г) $\frac73\pi$.

Вариант №21

1. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\cos3xdx$.

Ответы: а) $\frac12$; б) 1; в) 0; г) $-\frac12$.

2. Вычислить $\int\limits_0^{\frac12}\arcsin xdx$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{\pi}{12}-\sqrt3$; в) $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt3}{2}-1$; г) $\frac{\pi}{12}-1$.

3. Вычислить $\int\limits_3^8\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

Ответы: а) $4-9\ln 2$; б) $9-4\ln 2$; в) $2+3\ln 2$; г) $8\ln 2$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-4$, $y=x+8$.

Ответы: а) $\frac{125}{3}$; б) $\frac{321}{3}$; в) $\frac{243}{6}$; г) $\frac{343}{6}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x=3\cos t \\ y=8\sin t \end{cases}$.

Ответы: а) 48π; б) 8π; в) 24π; г) 12π.

6. Вычислить площадь одного лепестка розы $r=7\sin 2\varphi$.

Ответы: а) $\frac{49\pi}{8}$; б) $\frac{7\pi}{8}$; в) $\frac{49\pi}{2}$; г) $\frac{7\pi}{49}$.

7. Вычислить длину дуги линии $y=\ln\sin x+1$, $\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3}$.

Ответы: а) $\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-tg\frac{\pi}{12}\right)$; б) $\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}ctg\frac{\pi}{12}\right)$;

в) $\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{3}tg\frac{\pi}{12}\right)$; г) $\ln\left(\frac{3}{\sqrt{3}}ctg\frac{\pi}{12}\right)$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=5(t-\sin t) \\ y=5(1-\cos t) \end{cases}$, $0\le t\le\pi$.

Ответы: а) 10; б) 20; в) 30; г) 40.

9. Вычислить длину дуги всей кривой $r=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$, $0\le\varphi\le 3\pi$.

Ответы: а) $3\pi a$; б) $\frac{3\pi a}{2}$; в) πa; г) $\frac{3\pi a}{4}$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$.

Ответы: а) $\frac{3}{5}\pi$; б) $\frac{5}{3}\pi$; в) $\frac{10}{3}\pi$; г) $\frac{3}{10}\pi$.

Вариант №22

1. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$.

Ответы: а) π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{8}$.

2. Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x dx$.

Ответы: а) $\frac{\pi+2}{9}$; б) $\frac{\pi-1}{18}$; в) $\frac{\pi-2}{18}$; г) $\frac{\pi-2}{9}$.

3. Вычислить $\int\limits_0^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}dx$.

Ответы: а) $\frac{243}{10}$; б) $\frac{393}{10}$; в) $\frac{243}{5}$; г) $\frac{393}{5}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=2$, $x+2y-5=0$.

Ответы: а) $\frac{15}{4}-4\ln 2$; б) $\frac{15}{4}-\ln 2$; в) $15-4\ln 2$; г) $\frac{15}{4}-3\ln 2$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\begin{cases} x=t^2+1 \\ y=t^2-3t \end{cases}$, $t\in[0;\ 3]$.

Ответы: а) $\frac{27}{2}$; б) $\frac{27}{4}$; в) $\frac{9}{2}$; г) $\frac{13}{5}$.

6. Вычислить площадь одного лепестка розы $r=a\sin 2\varphi$.

Ответы: а) $\frac{\pi a^2}{2}$; б) $\frac{\pi a^2}{4}$; в) $\frac{\pi a^2}{8}$; г) πa^2.

7. Вычислить длину дуги линии $y=\frac{1}{5}e^{5x}-6$ от $x_1=\ln\sqrt[10]{3}$ до $x_2=\ln\sqrt[10]{8}$.

Ответы: а) $\frac{1}{10}+\frac{1}{5}\ln\frac{2}{3}$; б) $\frac{1}{5}\ln\frac{3}{2}$; в) $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\ln\frac{2}{3}$;
г) $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\ln\frac{3}{2}$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=t^2 \\ y=t-\frac{t^3}{3} \end{cases}$, $0\le t\le 1$.

Ответы: а) $\frac{5}{3}$; б) $\frac{7}{3}$; в) $\frac{8}{3}$; г) $\frac{4}{3}$.

9. Вычислить длину дуги линии $r=5\cos\varphi$.

Ответы: а) 5π; б) 10π; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{\pi}{2}$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=ax-x^2$, $y=0$ ($a>0$).

Ответы: а) $\frac{\pi a^4}{8}$; б) $\frac{\pi a^5}{6}$; в) $\frac{\pi a^5}{30}$; г) $\frac{\pi a^3}{30}$.

Вариант №23

1. Вычислить $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{4}$; в) π; г) 0.

2. Вычислить $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\,arctgx\,dx$.

Ответы: а) $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $2\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}$.

3. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\cos x}$.

Ответы: а) $\frac{2}{9}\pi$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$; в) $\frac{2\sqrt{3}}{9}\pi$; г) $\frac{\sqrt{3}}{9}\pi$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x$, $y=e^{-x}$, $x=1$.

Ответы: а) $\frac{2}{e}-1$; б) $\frac{1}{e}-1$; в) $(e-1)^2$; г) $\frac{(e-1)^2}{e}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x=2(t^2-1) \\ y=3(4\mathrm{t}-\mathrm{t}^2) \end{cases}$, $y=0, t\in[0;\,4]$.

Ответы: а) 132; б) 225; в) 187; г) 256.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной лемнискатой Бернулли $r^2=a^2\cos 2\varphi$.

Ответы: а) $\frac{a^2}{2}$; б) a^2; в) $2a^2$; г) $3a^2$.

7. Вычислить длину дуги линии $y=\ln(1-x^2)$ от $x=-\frac{1}{2}$ до $x=\frac{1}{2}$.

Ответы: а) $8\ln 3$; б) $4\ln 2$; в) $3\ln 2-1$; г) $2\ln 3-1$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=\cos t+\ln tg\frac{t}{2} \\ y=\sin t \end{cases}$, $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{\pi}{2}$.

Ответы: а) $\ln 2$; б) $2\ln 2$; в) $\ln 3$; г) $2\ln 3$.

9. Вычислить длину дуги линии $r=2e^{4\varphi/3}$, $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

Ответы: а) $\frac{3}{2}\left(e^{\frac{\pi}{3}}-1\right)$; б) $5\left(e^{\frac{2\pi}{3}}-1\right)$; в) $\frac{5}{2}\left(e^{\frac{2\pi}{3}}-1\right)$; г) $e^{\frac{\pi}{3}}-1$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = 2 - x^2$, $y = 0$.

Ответы: а) $\frac{3\pi}{2}$; б) π; в) 2π; г) 3π.

Вариант №24

1. Вычислить $\int_0^3 \frac{x+4}{\sqrt{9-x^2}}dx$.

Ответы: а) $\frac{1}{2}+2\pi$; б) $3+2\pi$; в) $3+\pi$; г) $1+\pi$.

2. Вычислить $\int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx$.

Ответы: а) $\frac{7}{5}$; б) $\frac{5}{7}$; в) $\frac{2}{5}$; г) $\frac{2}{7}$.

3. Вычислить $\int_0^{\pi/6} x \sin 3x dx$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{6}$; б) $\frac{\pi}{9}$; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{\pi}{3}$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $4y = x^2$, $x = \pm 2$.

Ответы: а) 2; б) 4; в) 8; г) $\frac{8}{3}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = 2(4\mathrm{t} - \mathrm{t}^2) \end{cases}$, $y = 0, t \in [0;\ 4]$.

Ответы: а) $\frac{200}{3}$; б) $\frac{127}{3}$; в) $\frac{64}{3}$; г) $\frac{256}{3}$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $r = 7\cos\varphi$, $r = 2\cos\phi$.

Ответы: а) 825π; б) 45π; в) $11,25\pi$; г) 10π.

7. Вычислить длину дуги линии $y = \ln(\sin x)$ от точки $x = \frac{\pi}{3}$ до точки $x = \frac{2\pi}{3}$.

Ответы: а) $\ln 3$; б) $\ln 2$; в) $\frac{1}{2}\ln 3$; г) $\frac{3}{2}\ln 2$.

8. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

Ответы: а) 8; б) 4; в) 2; г) 10.

9. Вычислить длину дуги линии $r = 4\sin\varphi$.

Ответы: а) 8π; б) 6π; в) 4π; г) 2π.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y^2 = x$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{8}$; б) $\frac{2\pi}{5}$; в) $\frac{3\pi}{10}$; г) $\frac{7\pi}{10}$.

Вариант №25

1. Вычислить $\int_0^4 \frac{x}{x+4}dx$.

Ответы: а) $1-\ln 2$; б) $2-\ln 2$; в) $4-4\ln 2$; г) $4-2\ln 2$.

2. Вычислить $\int_{-1/2}^{1/2} xe^{-2x}dx$.

Ответы: а) $-\frac{1}{e}$; б) $\frac{1}{2e}$; в) $\frac{1}{e}$; г) $-\frac{1}{2e}$.

3. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/4} tg^3 x dx$.

Ответы: а) $\frac{1-\ln 2}{2}$; б) $1+\ln 2$; в) $\frac{2-\ln 2}{2}$; г) $\frac{1}{2}\ln 2$.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{\sqrt{x}}{2}$, $y=\frac{1}{2x}$, $x=16$.

Ответы: а) $\frac{64}{3}$; б) $\frac{56}{3}-\ln 2$; в) $\frac{64}{3}-2\ln 2$; г) $\frac{56}{3}+\ln 2$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $r=5\sin 3\varphi$.

Ответы: а) $\frac{25}{4}\pi$; б) $\frac{25}{12}\pi$; в) $\frac{5}{4}\pi$; г) $\frac{5}{12}\pi$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$\begin{cases} x=2\sqrt{2}\cos t \\ y=4\sqrt{2}\sin t \end{cases}$, $y=4$ ($y\geq 4$).

Ответы: а) 4π; б) $4\pi-8$; в) $2\pi-8$; г) $2\pi+8$.

7. Вычислить длину дуги линии $y^2=(x+1)^3$, отсеченной прямой $x=3$.

Ответы: а) $\frac{8}{9}\left(10\sqrt{10}-1\right)$; б) $\frac{8}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$; в) $\frac{160}{27}\sqrt{10}$; г) $\frac{16}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$.

8. Вычислить длину дуги линии $r=8\cos\varphi$, $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$.

Ответы: а) 2π; б) 3π; в) 4π; г) 8π.

9. Вычислить длину дуги линии $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$, $0\leq t\leq\pi$.

Ответы: а) 8; б) 4; в) 2π; г) $\frac{\pi}{6}$.

10. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$, $y=0$, $x=\pm 1$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{4}\left(e^2-e^{-2}+4\right)$; б) $\frac{3\pi}{4}\left(e^2-e^{-2}+4\right)$; в) $\frac{3\pi}{4}\left(e^2+e^{-2}-4\right)$; г) $\frac{\pi}{4}\left(e^2+e^{-2}\right)$.

Литература

1. *Баврин И.И.* Высшая математика: Учеб. для студентов естественно-научных специальностей педагогических вузов. 3-е изд., стереотип. М.:Изд. центр «Академия», 2003. 616 с.
2. *Пискунов Н.С.* Дифференциальное и интегральное исчисление: В 2 т. М.: Наука, 1970.
3. *Бермант А.Ф., Араманович Г.А.* Краткий курс математического анализа для втузов. М.: Наука, 1973. 720 с.
4. Задачи и упражнения по математическому анализу / Под ред. Б.П. Демидовича. М., 1969.
5. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука, 2006. 416 с.
6. *Кузнецов Л.А.* Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учеб. пособие для втузов. – СПб.: Лань, 2007. 288 с.
7. *Кадыров Т.К., Могилевский Р.И. Урдинов А.У.* Математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для студентов вузов. Бишкек, 1995. Ч.1.

СОДЕРЖАНИЕ

Т.А. Давидюк, И.В. Гончарова

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

Редактор *И.В. Верченко*
Компьютерная верстка *Г.Н. Кирпа*

Подписано в печать 24.06.10.
Формат $60\times84^{1}/_{16}$. Печать офсетная.
Объем. Тираж. Заказ 267.

Издательство КРСУ
Отпечатано в типографии КРСУ