КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра математики

Т.И. ПРУЦАКОВА

ОСНОВЫ
ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие
для студентов гуманитарного, международного
и медицинского факультетов
(компиляция)

Бишкек – 2000

П 85

Пруцакова Т.И.

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ. Учебно-методическое пособие /Кыргызско-Российский Славянский университет. – Бишкек, 2000. – 31 с.

Пособие по основам высшей математики содержит программу курса, краткий конспект лекций по запланированным темам курса, список докладов и рефератов. В нем приведены вопросы для контроля знаний и обширная библиография (22 наименования).

Рекомендуется для студентов гуманитарного, международного и медицинского факультетов очной формы обучения.

Печатается по решению кафедры математики
и РИСО КРСУ.

Рецензент: д.ф.-м.н. С.Н. Алексеенко

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Цель и объем курса

Пособие предназначено для подготовки специалистов в области экономических и гуманитарных дисциплин: «Мировая экономика», «Психология», «Архитектура», «Лечебное дело». Цель курса – ознакомить студентов с основными понятиями современной математики. В результате изучения дисциплины они должны научиться быть корректными в употреблении математических символов и понятий для выражения количественных и качественных соотношений. Пособие содержит методические разработки по 9 темам курса, составленные с ориентацией на самостоятельную работу студентов.

1.2.Обязательный минимум содержания по Госстандарту

Роль математики. Становление математики. Основные математические понятия. Математические модели и методы. Элементы теории вероятностей и математической статистики.

1.3. Тематический план

Тема 1. Математика как элемент общечеловеческой культуры.
Тема 2. Особенность математики.
Тема 3. Алгебраические уравнения и системы уравнений.
Тема 4. Операции с матрицами. Матричные уравнения.
Тема 5. Множества. Функциональные зависимости.
Тема 6. Предел функции. Производная функции.
Тема 7. Дифференциал, интеграл, дифференциальные уравнения.
Тема 8. Математика случайных явлений.
Тема 9. Использование математических методов.

2. КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ КУРСА ПО ТЕМАМ

2.1.Математика как элемент общечеловеческой культуры

Краткий конспект лекции [6,8,17]

Математика (греч. mathematike – знание, наука), по определению Ф. Энгельса, – наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира. Однако в математике играют основную роль не только понятия числа и формы фигуры, но и многие другие понятия: множество, дедукция, матрица и др. Математика, зародившаяся из практических вопросов человечества, в настоящее время приобрела абстрактный характер, проникая во многие другие науки.

Этапы развития математики:

1. *Зарождение* (накопление фактического материала). Этап начинается около 2,5 тыс. лет до н.э. и заканчивается в 7-5 в. до н.э. Введены основные понятия: число, величина, геометрическая фигура. Применяли арифметические действия, решали уравнения первой степени, вычисляли прогрессии. Центры математической мысли: Древний Египет, Вавилон.

2. *Математика постоянной величины*. Этап начинается около 7-5 в. до н.э. и заканчивается в 17 в. н.э.. Математика как логический вывод и средство познания природы – творение древних греков. Предложен аксиоматический метод изложения материала. Введено понятие доказательств. Центры математической мысли: Древняя Греция, Египет, Древний Рим, Малая Азия, Индия, Италия, Франция.

3. *Математика переменной величины*. Этап начинается около 17 в. и заканчивается в 19 в. Введены понятия: дифференциал, интеграл, системы дифференциальных и интегральных уравнений. Предложены методы решения экстремальных задач. Развит математический аппарат для обработки случайных процессов. Большой вклад в развитие математики внесли немецкие, французские, английские и русские ученые.

4. *Современный период*. Расширение и углубление математических исследований. Формируется культура математической мысли. Предпринимаются попытки изложения разделов математики на единой теоретической основе. Разрабатываются методы решения сложных математических задач с применением компьютера.

Бегло обозревая исторический фон, на котором развивалась математика, можно отметить, что математика – интеллектуальный продукт народов всего мира. Математику можно рассматривать как элемент общечеловеческой культуры.

Практические задания: запись чисел в различных системах счисления.

Темы докладов и рефератов:
1. Зарождение математики.
2. Математика Древнего Востока.
3. Обозначение чисел у разных народов.
4. Современные системы записи чисел.

5. Математика пифагорийцев.
6. Понятие натурального числа.
7. История открытия комплексных чисел.
8. Развитие математики в России и Кыргызстане.
9. Математика и философия.

2.2. Особенность математики

Краткий конспект лекции[4,9,11,14]

Существенные особенности математического метода:

1. Вводятся понятия, подсказанные материальным миром (число, точка, линия), интеллектуальные понятия (отрицательное число, буквенные обозначения, функции, кривые), интуитивные понятия (производная, дифференциал, интеграл). Математические понятия представляют собой абстракции, например, понятия числа.

2. Проводится идеализация понятий (отвлечение от толщины линии, массы шара).

3. Вводятся специальные обозначения, без которых математика не была бы математикой.

4. Используется метод рассуждения, основу которого составляет набор аксиом. Аксиома (гр. axioma) – положение, принимаемое без логического доказательства в силу непосредственной убедительности; истинное исходное положение теории.

Аксиоматический метод заключается в следующем: выделяются основные понятия, формулируются аксиомы, а все остальные утверждения выводятся логическим путем, опираясь на них. Аксиоматический метод появился в Древней Греции, сейчас применяется во всех теоретических науках, прежде всего в математике.

Дедуктивным называют рассуждение, которое устанавливает какое- либо свойство, опираясь на аксиомы, а также на ранее доказанные свойства. Дедуктивные рассуждения позволяют получать новые утверждения, которые также достоверны, как и исходные аксиомы. Принципы дедуктивного рассуждения сформулированы Аристотелем.

Индуктивными называют рассуждения, в которых осуществляется переход от частных заключений к общим. Многие факты в математике были открыты индуктивным путем.

Группа французских математиков, известная под именем Бурбаки (1933), ставила перед собой задачу полной аксиоматизации основных математических дисциплин. Эта группа хотела показать, что грандиозное здание математики может быть построено на аксиоматической основе без какой бы то ни было интуиции. В настоящее время этой группы не существует. Среди математиков возникла довольно сильная оппозиция точке зрения группы Бурбаки. Оппозиция обратила внимание на то, что получение новых результатов и установление связи математики с ее возможными приложениями требует усилий иного рода, не укладывающихся в схему аксиоматического метода. Подчеркнута ранее приниженная и даже полностью отрицаемая роль неформальных, интуитивных рассуждений. Однако известно, что развитие идет по спирали.

Математика учит логически мыслить, т.е. мыслить последовательно, судить доказательно, опровергать неправильные выводы. Логика (греч. logos – слово, понятие, рассуждение, разум) исследует структуру мышления, раскрывает лежащие в его основе закономерности. Современная формальная логика, которую называют математической или символьной, приобретает в наше время все возрастающее значение. Основу математической логики составляют высказывания. Под высказыванием понимают такое предложение, которое имеет смысл считать истинным или ложным. Высказывания могут быть простыми и составными, причем последние образуются из простых при помощи логических союзов «и», «или», «не», «если, то». Логические союзы соответственно называются конъюнкция (произведение логики), дизъюнкция (сложение логики), отрицание и импликация (условие). Математическая логика представляет в аксиоматической форме теорию наиболее общих и типических отношений, наблюдаемых среди объектов различного рода.

Алгоритм поиска решения логической задачи:

1. Пытайтесь упорядочить информацию (составьте таблицу или набросайте схему).
2. Внимательно читайте каждое утверждение.
3. Старайтесь отыскать ключевое утверждение.
4. Просмотрев все утверждения, исключите из них те, которые не подтверждаются другими утверждениями.
5. Сравните оставшиеся утверждения между собой.
6. Если нашли противоречие, то проявите настойчивость в поиске решения.

Практические задания: решение логических задач.

Темы докладов и рефератов:
1. Аксиоматический метод.
2. Методы индукции и дедукции.
3. Правила поиска решения логических задач.

2.3. Алгебраические уравнения и системы уравнений

Краткий конспект лекции

Уравнение – одно из важнейших понятий в математике. В большинстве практических и научных задач, где какую-то величину нельзя измерить или вычислить по готовой формуле, удается составить соотношение (или несколько соотношений), которым она удовлетворяет. Так получают уравнение (или систему уравнений) для определения неизвестной величины.

Уравнение – это равенство, связывающее данные (известные) задачи с искомыми (неизвестными) величинами. Искомые величины обозначаются буквами (чаще всего последними буквами латинского алфавита: *x, y, z, u, v, w*). Решить уравнение – это значит найти все те значения неизвестных (корни уравнения), при которых уравнение обращается в верное равенство, либо установить, что таких значений нет. Если в уравнении неизвестные значения содержатся в первой степени, то уравнения называются уравнением первого порядка. Несколько уравнений образуют систему, если в них одноименные неизвестные обозначают одни и те же числа. В общем виде систему *m* алгебраических уравнений с *n* неизвестными первого порядка можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{1j} = b_1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{2j} = b_2 \\ \ldots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj} = b_m \end{cases} \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b_i, \;\; i = \overline{1,m},$$

где Σ – знак суммы, в которой *j* меняется от 1 до *n*, а *i* меняется от 1 до *m*

Способы записи уравнений, которые для нас кажутся удобными и простыми, окончательно выработались лишь в 17 в., в результате работы таких математиков как Виет и Декарт. Знак равенство и скобки были введены только в 18 в.. Скобки предложены Эйлером.

Способы решения уравнений первой степени постоянно развивались. В сочинениях Ньютона в 1707 г. приводится обзор этих методов (способ подстановок, способ сложения и вычитания и др.).

Кроме линейных, в математике используются квадратные уравнения. Их умели решать еще в Древнем Вавилоне за 2000 лет до н.э. Однако такие знания не оказали влияние на европейскую науку, поэтому долго оставались неизвестными другим народам. В Древней Греции уравнения второй степени решали геометрическим способом. Решали квадратные уравнения в Древней Индии и Китае. В исследовании способов решения квадратных уравнений большая заслуга принадлежит арабскому математику Аль-Хорезми. Именно он дал вывод отыскания корней квадратного уравнения в том виде, в каком он применяется в наше время.

Практические задачи привели к необходимости решения уравнений, степень которых превышала вторую. К кубическим уравнениям пришли в своих исследованиях греческие математики Гиппократ, Архимед и др. Задачи решались геометрическими способами. В 12 в. знаменитый поэт и математик Омар Хайям рассмотрел все возможные случаи решения кубических уравнений геометрическим способом. Алгебраическая формула нахождения корней кубического уравнения носит имя Кардано, однако метод решения был найден в 16 в. итальянскими математиками Ферро, Тартальей и Кардано. Имя последнего закрепилось за названием метода. Алгебраическое решение уравнения четвертой степени было получено учеником Кардано Феррари. Существует особый способ решения уравнения четвертой степени, разработанный в 1732 г. Эйлером.

Многие математики, в том числе крупнейшие, предпринимали упорные попытки найти решение алгебраических уравнений пятой степени в общем случае, т.е. пытались найти формулу, аналогичную формулам для нахождения решений квадратного, кубического и уравнения четвертой степени. Однако все усилия оказались тщетными. Такие исследователи, как Лейбниц, Эйлер, Гаусс высказывали мысль, что для уравнений пятой и более высоких степеней не существует алгебраической формулы для выражения корней через коэффициенты, однако доказал это положение лишь норвежский математик Абель. Чуть позже французский исследователь Галуа указал метод, при помощи которого по виду уравнения можно установить, решается ли оно в алгебраическом виде.

Голландский ученый Жирар в 1629 г. высказал предположение о том, что уравнение *n*-ой степени имеет *n* корней в том случае, если корнями считаются отрицательные и мнимые выражения. Эту идею поддерживали Декарт и Ньютон. В 1742 г. Эйлер заявил, что всякое алгебраическое выражение может быть разложено на сомножители с действительными коэффициентами первой и второй степени. Эта мысль означала, что всякому алгебраическому уравнению соответствует корень, который может быть числом действительным или мнимым. Предположение Эйлера строго доказал Гаусс.

В наше время для решения уравнений высших степеней широко используются численные методы, реализованные в виде программ для компьютера.

Практические задания: составление и решение систем алгебраических уравнений

Темы докладов и рефератов:

1. Классификация алгебраических уравнений.
2. Аналитический и геометрический способ решения систем алгебраических уравнений

2.4. Операции с матрицами. Матричные уравнения

Краткий конспект лекции [3,5,7]

Решение сложных систем алгебраических уравнений значительно упрощают матрицы. Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из чисел или каких-либо других объектов. Рассмотрим матрицы, составленные из вещественных чисел. Такая матрица может иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1{,}3 & 0 \\ 1 & 11 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Здесь круглые скобки по бокам – знак матрицы. У матриц различают элементы, строки и столбцы. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij}, из которых первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Для краткости матрицы обозначают одной буквой, например, A, B и тому подобное. В общем виде матрицу можно записать:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Иногда коротко пишут $A = (a_{ij})_{mn}$, т.е. i меняется от 1 до m, а j – от 1 до n.

Каждая матрица имеет определенные размеры, т.е. число строк и число столбцов. Если число строк равно числу столбцов, то матрица называется квадратной, тогда говорят о ее порядке. Матрица, у которой всего один столбец, называется столбцевой, у которой всего одна строка – строковой, у которой все элементы равны нулю – нулевой. Квадратная матрица, у которой равны нулю все элементы, кроме стоящих на главной диагонали (диагонали, идущей из левого верхнего в правый нижний угол), называется диагональной. Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется единичной и обычно обозначается буквой E. Например, единичная матрица третьего порядка
имеет вид:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = diag(1,1,1)$$

Иногда применяется транспонирование матриц A, т.е. перемена ролями ее строк и столбцов. Полученную матрицу мы обозначим A^*. Например:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} * = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Матрицы одинакового размера можно складывать по формуле

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+в_{11} & a_{12}+в_{12} & a_{13}+в_{13} \\ a_{21}+в_{21} & a_{22}+в_{22} & a_{23}+в_{23} \end{pmatrix}$$

Аналогично определяется умножение матрицы на число:

$$k\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}$$

Умножение матриц друг на друга осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего размеры матриц-сомножителей должны быть согласованы: ширина первого множителя должна равняться высоте второго, в другом случае умножение невозможно. Если же это условие выполнено, то произведение находится по следующему правилу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} в_{11} & в_{12} & в_{13} \\ в_{21} & в_{22} & в_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}в_{11}+a_{12}в_{21} & a_{11}в_{12}+a_{12}в_{22} & a_{13}в_{13}+a_{12}в_{23} \\ a_{21}в_{11}+a_{22}в_{21} & a_{21}в_{12}+a_{22}в_{22} & a_{21}в_{13}+a_{22}в_{23} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица A имеет определитель (детерминант), который мы будем обозначать $det\ A$ или записывать как ограниченные вертикальными прямыми элементы матрицы A. Под определителем понимается число, полученное в результате выполнения по определенному правилу арифметических действий над элементами матрицы.

Например,

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = ab_1c_2 + bc_1a_2 + ca_1b_2 - cb_1a_2 - ac_1b_2 - ba_1c_2$$

Если обозначить $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, , то систему n алгебраических уравнений с n неизвестными первого порядка можно записать как матричное уравнение :

$$AX=B$$

Решение (X) матричного уравнения определяется из соотношения

$$X = A^{-}B\ ,$$

где A^{-} именуется обратной матрицей и определяется из матрицы A по определенному правилу. В современных компьютерах имеются приложения, например EXCEL, реализующие операции с матрицами.

Общие формулы, выражающие неизвестные через определители, были разработаны швейцарским математиком Г. Крамером в 1750 г. Эти формулы имеют вид :

$$x_i = \frac{\det A_i}{\det A}\ ,$$

где A_i – матрица, полученная из матрицы A путем замены i-го столбца матрицы A столбцом матрицы B. Из приведенного соотношения следует, что решение существует при условии $\det A \neq 0$.

Матрицы впервые появились в работах английских математиков У. Гамильтона (1805-1865) и А. Кэли (1821-1895). В настоящее время матрицы весьма широко используются в прикладной математике.

Практические задания:

1.Выполнить действия над матрицами.

2. Вычислить определители матриц.

3. Решить систему двух уравнений с двумя неизвестными.

4. Решить систему трех уравнений с тремя неизвестными.

Темы докладов и рефератов:

1.История появления матриц.

2.Области использования матриц.

2.5. Множества. Функциональные зависимости

Краткий конспект лекции [3,5,7]

Множество – фундаментальное понятие математики. Вводится аксиоматически и не может быть определено через какие-либо элементарные понятия. Под множеством понимается совокупность каких-либо объектов произвольной природы, называемых его элементами, обладающими общими для всех них свойствами. Эти общие свойства содержатся, как правило, в самом названии множества (множество целых чисел, множество арабских цифр, множество точек на плоскости, множество звезд во вселенной)

Если x – общий (произвольный или текущий) элемент множества M, то множество M может быть обозначено $\{x\}$. Для обозначения принадлежности элемента к данному множеству используется знак включения $\in$. Если a – элемент множества M, то пишут $a \in M$.

Конечное множество – множество, состоящие из конечного числа элементов. Множество M счетно, когда его можно записать в виде: $M = =\{m_1,m_2,m_3,...\}$, т.е. если оно содержит бесконечно много элементов, и их все можно расположить в виде последовательности, перенумерованной натуральными числами. Никакое конечное множество не является счетным.

Если множество конечно и содержит небольшое число элементов, то его удобно определить, перечислив все элементы. Для этого используют фигурные скобки. Например, F – множество всех арабских цифр.

$F=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

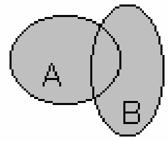
Множество может состоять и из одного элемента. Пустое множество – такое, в котором нет ни одного элемента. Его обозначают символом $\varnothing$.

Бывает так, что одно множество входит в другое множество. Множество A называют подмножеством множества B, если каждый элемент множества A одновременно является элементом множества B. Это выражают записью $A \subset B$.

Если множества A и B состоят из одних и тех же элементов, то они называются равными и записываются как $A=B$. Равенство двух множеств также следует из одновременного выполнения условий: $A \subset B$ и $B \subset A$.

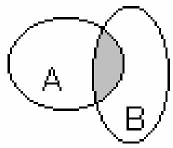
В математике используется несколько способов задания множеств. Множество может быть задано перечислением всех его элементов. Каждый элемент задаваемого множества может определятся по некоторому элементу уже известного множества. Множество может быть задано описанием ограничительного свойства, по которому выделяются элементы множества A из элементов универсального множества I. Новые множества могут быть заданы при помощи некоторых операций над уже известными множествами.

Объединение $A \cup B$ двух множеств A и B определим как множество, в которое входят все те объекты, которые входят в множество A или в множество B. Под собъединение двух множеств A и B можно понимать фигуру, получаемую объединением фигур, изображающих множества A и B.



Такие диаграммы принято называть диаграммами Эйлера и диаграммами Венна.

Определим пересечение $A \cap B$ двух множеств A и B как множество, которому принадлежат те элементы, которые входят в множество A и в множество B.



Выясним, существует ли в «алгебре множеств» такой элемент 0 («нуль»), что прибавление его к любому множеству A не меняет этого множества. Ясно, что это возможно в том случае, если «множество 0» совсем не содержит элементов, т.е. является «пустым». Например, пустым является множество обучающихся в нашей группе студентов, рост которых превышает 2,5 м.

Пустое множество обозначим знаком O, таким образом для каждого множества A имеем:

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{O} = \mathrm{A}$$

$$A \cap O = O$$

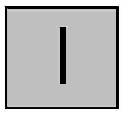
В самом деле, множество $A \cap O$ по определению состоит из всех элементов, принадлежащих и множеству A, и множеству O. Но множество O вовсе не содержит элементов, поэтому не содержит элементов также и множество $A \cap O$.

«Множество 1» обладает таким свойством, что произведение его на любое множество A дает A. Это означает, что пересечение или общая часть «множества 1» и множества A для любого множества A совпадает с самим этим множеством. Но это возможно лишь в том случае, если «множество 1» содержит вообще все существующие элементы.

Множество, состоящее из всех элементов всех рассматриваемых множеств, называется полным, универсальным или единичным. Обозначим его знаком I. Таким образом, для любого множества A:

$$A \cap I=A$$

Универсальное множество I графически изображается квадратом, внутри которого рисуются фигуры, изображающие различные множества:



Алгебра множеств с ее своеобразными законами действий, одновременно напоминающими правила действий над числами, и отличными от этих правил, была впервые указана замечательным английским математиком Дж. Булем. Поэтому алгебру множеств часто называют булевой алгеброй.

Правила действий булевой алгебры множеств записываются:

$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$ (коммутативные законы);

$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$, $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ (ассоциативные законы);

$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cup(B\cup C)$ (дистрибутивные законы);

$A\cup O=A$, $A\cap O=O$;

$A\cup I=I$, $A\cap I=A$;

$A\cup A=A$, $A\cap A=A$.

Роль булевой алгебры возрастает в процессе широкого использования вычислительной техники.

Функциональные зависимости

Пусть заданы два множества $X = \{x\}$ и $Y = \{y\}$. Если дано правило, ставящее в соответствие каждому элементу множества X один и только один элемент множества Y, то говорят, что задана функция. Функции подразделяются на однозначные и многозначные, функции одного аргумента и функции многих аргументов. Функция обозначается буквой f (лат. functio – функция) и записывается, например, $y = f(x)$. Для функции одного аргумента $y = f(x)$ переменная x называется независимой переменной или аргументом, переменная y – зависимой переменной; область определения функции – это все значения, которые принимает независимая переменная x, а область значений функции – это все значения, которые принимает функция. Функция многих аргументов записывается $y = f(x_1, \dots x_n)$. Если рассматриваются несколько функций, которые различны между собой, то для них используются и другие обозначения: $F, g, G, \varphi, \Phi, \psi$. Сложная функция записывается $z = f(g(x))$. Функция, определенная на некотором множестве функций, называется функционалом.

На практике часто используются простейшие функции: постоянная, прямая пропорциональность, обратная пропорциональность, квадратичная, степенная.

Способы задания функций:

1. Аналитический способ состоит в задании функции одной или несколькими формулами.
2. Табличный способ дает сразу числовое значение функции.
3. Графический способ состоит в построении графика.

График функции $y = f(x)$ – это такая кривая, для которой координаты точки, лежащей на этой кривой, удовлетворяют заданному уравнению, а координаты точки, не лежащей на этой кривой, не удовлетворяют уравнению. В высшей математике используются системы координат: декартова (прямоугольная, косоугольная), аффинная, полярная.

Для анализа данных на компьютере используются не только графики, но и диаграммы (круговая, столбиковая, с областями и т.п.).

Практические задания: примеры функциональных зависимостей.

Темы докладов и рефератов:

1. Свойства и графики простых функций.
2. Некоторые замечательные кривые (Архимедова спираль, улитка Паскаля, верзьера Аньези, Декартов лист).
3. Декартово произведение множеств.

2.6. Предел функции. Производная функции.

Краткий конспект лекции [1,3,16]

Функция $f(x)$ имеет предел b, когда x стремится к a, если значения $f(x)$ сколь угодно близко приближаются к числу b, когда значения переменной x сколь угодно близко приближаются к числу a. Обозначается это так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

Следует отметить, что в этом определении рассматриваются значения x, сколь угодно близкие к числу a, но не совпадающие с a. Если же функция $f(x)$ определена в точке a и выполняется равенство

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

то $f(x)$ называется непрерывной функцией в точке a. Функция непрерывная в каждой точке своей области определения называется непрерывной.

Все простые функции – линейная, квадратичная, показательная и логарифмическая – являются непрерывными функциями. В случае непрерывных функций очень просто находятся пределы в любой точке области определения: для этого достаточно вычислить значение функции в этой точке.

Понятие предела функции полезно обобщить на тот случай, когда значения x могут становиться сколь угодно большими, а именно: функция $f(x)$ имеет предел, равный числу b, при x, стремящемся к бесконечности, если значения функции сколь угодно близко приближаются к числу b, когда значения x становятся сколь угодно большими. Символически это обозначается так:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$$

Символ ∞ обозначает «бесконечно большую величину». Прямые линии, к которым графики функции могут неограниченно приближаться, не пересекая и не касаясь их, называются асимптотами.

Бесконечные пределы, а именно неограниченное возрастание функции, когда независимая переменная x сколь угодно близко приближается к числу a. В этом случае используются обозначения

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty ,$$

или, если значения функции неограниченно убывают,

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty .$$

Свойства, которыми обладают пределы функций

1. Если c – постоянная величина, то

$$\lim_{x \to a} c = c.$$

2. Если c – постоянная и существует предел функции $f(x)$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a} \left[cf(x) \right] = c \lim_{x \to a} f(x).$$

3. Если в одной и той же области определения существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, имеет место следующее равенство:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x).$$

4. Если в одной и той же области определения существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, имеет место следующее равенство:

$$\lim_{x \to a} \left[f(x) g(x) \right] = \lim_{x \to a} f(x) \lim_{x \to a} g(x);$$

$$\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

Последнее равенство выполняется только в случае, если

$$\lim_{x \to a} g(x) \neq 0.$$

Производная функции

Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$. Свойство функции быть непрерывной в точке $x = a$ равносильно тому, что разность $f(x)$ – – $f(a) = \omega(x)$ является бесконечно малой при $x \to a$. Таким образом, для всякой непрерывной функции в точке $x = a$ имеет смысл рассматривать формулу $\omega(x) = f(x) - f(a)$. Это выражение называется приращением функции $f(x)$ в точке $x = a$. Приращение функции обозначим $\Delta f(x)$, а приращение аргумента – Δx.

Производной от функции $f(x)$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к 0. Производная обозначается $f'(x)$.

$$f'(x) = \lim \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \quad \Delta x \to 0$$

Производная рассматривается как мгновенная скорость изменения функции относительно аргумента. Производная имеет физический смысл (скорость при произвольном законе движения), экономический смысл (производительность).

Производная функция также является функцией от x. Пусть $f'(x)$ есть производная от функции $f(x)$, тогда производная от функции $f'(x)$ называется второй производной от функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Рассмотрим функцию двух переменных $y = (x_1, x_2)$, тогда частные производные первого порядка записываются $f'_{x_1}(x_1, x_2)$ $f'_{x2}(x_1, x_2)$.

Число M назовем максимумом функции $y = f(x_1, x_2)$ на множестве X, если существует такая пара (a_1, a_2) значений аргументов x_1, x_2, для которой

$$f(a_1, a_2) = M \geq f(x_1, x_2)$$

для всех (x_1, x_2) области определения X. Точка (a_1, a_2) называется точкой максимума. Аналогично определяется минимум функции, с той только разницей, что берется наименьшее значение функции. Максимум и минимум обозначаются соответственно символами

$$M = \max f(x_1, x_2); \; m = \min f(x_1, x_2)$$

и объединяются термином «экстремум». Точки, в которых существует экстремум, называются стационарными (критическими).

Метод нахождения экстремумов функций

Если задана функция одной переменной $y = f(x)$, то прежде всего необходимо найти стационарные точки. Для этого необходимо решить уравнение $f'(x) = 0$. Если в стационарной точке a выполняется условие $f''(a) > 0$ то в этой точке имеет место минимум, если $f''(x) < 0$, то функция имеет максимум.

Теперь приведем алгоритм нахождения максимума и минимума функции двух переменных $z = f(x,y)$. Стационарные точки находятся из решения системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} f_x{}'(x,y)=0 \\ f_y{}'(x,y)=0 \end{cases}$$

Решить эту систему бывает очень трудно и приходится прибегать к численным методам решения на компьютере. После того, как координаты стационарной точки найдены:

$$x = a;\ y = в,$$

необходимо определить вторые частные производные и вычислить их значения в стационарной точке

$$f''_{xy}(a,в);\ f''_{xx}(a,в);\ f''_{yy}(a,в)$$

Далее нужно составить выражение

$$f''_{xx}(a,в)\,f''_{yy}(a,в)-\left[f''_{xy}(a,в)\right]^2$$

и определить его знак. Обозначим это громоздкое выражение через B.

Возможны 3 варианта.

1. Если $B>0$ и $f''_{xx}(a,в)>0, f''_{yy}(a,в)>0$ то в стационарной точке $(a,в)$ имеет место минимум.
2. Если $B > 0$ и $f''_{xx}(a,в)>0, f''_{yy}(a,в)<0$ – имеет место максимум.
3. Если $B < 0$, то в точке (a, $в$) нет ни максимума, ни минимума. В задачах оптимизации этот случай интереса не представляет и позволяет только «отсеивать» стационарные точки. Остальные случаи требуют дополнительного исследования.

Из вышесказанного можно сделать вывод: общий план действий при поиске экстремумов функции двух переменных имеет много общего с задачей отыскания экстремумов функции одной переменной .

Практические задания: вычисление пределов числовых последовательностей и функций

Темы докладов и рефератов:

1. Бесконечно малые и бесконечно большие величины.
2. Число *е*
3. Свойства производной.
4. Правила вычисления производной

2.7. Дифференциал, интеграл, дифференциальные уравнения

Краткий конспект лекции [9,10,18]

Пусть $y = f(x)$ – непрерывная функция. Теперь рассмотрим более подробно приращение $\Delta f(x)$ как функцию от приращения аргумента Δx. Очень важным является случай, когда $\Delta f(x)$ бесконечно мала и при этом еще эквивалентна линейной функции вида $c\Delta x$, где c – некоторая вещественная постоянная: $\Delta f(x)\approx c\Delta x$ при $\Delta x\to 0$. В этом случае говорят, что приращение $\Delta f(x)$ имеет линейную часть, называемую дифференциалом функции $f(x)$ в точке $x = a$. Дифференциал функции обозначается df или dy, а приращения аргумента – dx. Тогда $dy = f'(x)dx$. Откуда

$$f'(x)=\frac{dy}{dx}.$$

К понятию производной приводят многие задачи математики, физики, астрономии, техники, экономики, медицины.

Рассмотрим такую задачу: дана функция $F(x)$, требуется найти ее производную, т.е. функцию $f(x)=(F(x))'$. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$. Первообразная $F(x)$ для данной $f(x)$ является не единственной. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то выражение $F(x)+c$ (совокупность всех первообразных функции $f(x)$) называется неопределенным интегралом от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению $\int f(x)dx = F(x) + c$, если $(F(x)+c)' = f(x)$. Здесь $f(x)$ – подинтегральная функция, $f(x)dx$ – подинтегральное выражение, $\int$ – знак интеграла.

Мощным средством исследований в естествознании является определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Здесь a и b –пределы интегрирования. К вычислению определенного интеграла сводятся многие задачи геометрии, механики, физики.

Дифференциальные уравнения позволяют описать в математической форме процессы, происходящие в различных областях человеческих знаний. Чтобы разъяснить это понятие, определим, из чего складывается изучение какого-либо процесса. Рассмотрим пример охлаждения нагретого тела (металла, пластины). Пусть тело, нагретое до температуры y_0, в момент времени $t=0$ погружается в очень большой сосуд с воздухом нулевой температуры. Тело начнет охлаждаться и его температура будет функцией времени t. Обозначим ее $y(t)$. Согласно закону охлаждения Ньютона, скорость изменения температуры тела, т.е. производная dy/dt, пропорциональна разности температур тела и окружающей среды, в данном случае пропорциональна $y(t)$. Таким образом, получаем, что в каждый момент времени справедливо соотношение:

$$\frac{dy}{dt} = -ky,$$

где k – положительный коэффициент, зависящий от материала тела, знак «–» поставлен потому, что температура тела убывает. Это соотношение в виде дифференциального уравнения является математической записью охлаждения, которое выражает зависимость между функцией и ее производной в один и тот же момент времени. Его также называют математической моделью рассматриваемого процесса.

Решить дифференциальное уравнение – значит найти все функции $y(t)$, которые обращают уравнение в тождество. Все решения приведенного выше дифференциального уравнения даются формулой

$y = Ce^{-kt}$,

где C – некоторая постоянная. Приведенная формула представляет собой общее решение дифференциального уравнения. Нахождение решения дифференциального уравнения всегда связано с операцией интегрирования, поэтому вместо слова «решить» часто употребляется глагол «проинтегрировать» (дифференциальное уравнение).

В процессе охлаждения тела, который мы рассматриваем, нас интересует лишь то решение, которое в момент времени t=0 имеет температуру y_0. Отсюда следует, что $C=y_0$. Значит, закон охлаждения окончательно можно выразить так $y(t) = y_0 e^{-kt}$. Условие $y(t=0)=y_0$ принято называть начальным, оно позволяет из бесконечного множества решений выбрать единственное.

Рассмотренное дифференциальное уравнение выражает тот факт, что скорость изменения функции пропорциональна (с коэффициентом – k) самой функции. Такая зависимость наблюдается и в других явлениях природы.

Дифференциальные уравнения – основной математический аппарат в естествознании. Они применяются в физике и астрономии, экономике, биологии и медицине.

Практические задания: дифференцирование произведения, частного (дроби), показательной функции.

Темы докладов и рефератов

1. История развития дифференциального исчисления
2. Свойства дифференциала
3. Правила дифференцирования
4. Производные и дифференциалы высших порядков
5. Типы дифференциальных уравнений
6. Примеры дифференциальных уравнений в специальности.

2.8. Математика случайных явлений

Краткий конспект лекции [1,3,16]

Практически всегда, когда мы пытаемся объяснить окружающий нас мир, имеем дело со случайными явлениями. Случайные явления условно подразделяются на три типа: события, величины и процессы. Событие – это случайное явление, о котором имеет смысл говорить, что оно произошло или не произошло, происходит или не происходит, произойдет или не произойдет. Случайное событие характеризуется вероятностью появления этого события. Вероятностью события A называется отношение числа m благоприятствующих событию A случаев к общему числу n равновозможных случаев, когда общее число случаев достаточно велико. Вероятность события A символически обозначается $P(A)$. Очевидно, что вероятность находится в интервале $0<P(A)<1$. Событие, вероятность которого равна единице, называется достоверным. Событие, вероятность которого равна нулю, называется невозможным.

Случайная величина – это случайное явление, о котором можно говорить, что оно в зависимости от случая принимает те или иные значения (события). Случайную величину обычно обозначают буквами греческого алфавита, например, $\zeta(x)$. Для того, чтобы охарактеризовать случайную величину $\zeta(x)$, необходимо задать множество значений случайной величины $\{x\}$ – числовые показатели, признаки, реализации. Все множество значений, которое может принимать случайная величина, называется генеральной совокупностью. Выборкой называют множество значений, выбираемых из генеральной совокупности. Выборку можно рассматривать как некоторое подмножество генеральной совокупности.

При анализе случайной величины $\zeta(x)$ используются следующие основные характеристики: математическое ожидание (среднее значение), дисперсия, стандартное отклонение (среднее квадратическое отклонение).

Математическое ожидание (среднее арифметическое) вычисляется по формуле:

$$M = \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n},$$

где x_i – каждое наблюдаемое значение случайной величины;

i – индекс, указывающий на порядковый номер данного значения случайной величины;

n – количество наблюдений (объем выборки);

Σ – знак суммирования.

Дисперсия определяется по формуле:

$$D = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1},$$

где x_i – каждое наблюдаемое значение случайной величины;
$\bar{x}$ – среднее значение;
n – количество наблюдений (объем выборки).

Величина, представляющая собой квадратный корень из дисперсии, называется стандартным отклонением или средним квадратическим отклонением. Для большинства исследователей привычно обозначать эту величину греческой буквой σ (сигма).

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Основные характеристики случайной величины $\zeta(x)$ можно определить с помощью компьютера (статистические функции программы EXCEL). Для анализа случайной величины необходимо вычислить минимальные и максимальные значения ее реализаций (характеризует размах значений), определить среднее значение (характеризует центр распределения), вычислить стандартное отклонение (характеризует рассеяние значений), вычислить доверительную оценку (с ее помощью можно установить границы доверительного интервала), вычислить моду (наиболее часто встречающееся значение) и вычислить вероятности появления каждого события.

Зависимость двух случайных величин $\zeta(x)$ и $\eta(y)$ устанавливается с помощью коэффициента корреляции $\rho(\zeta,,\eta)$, который используется как мера связи двух случайных величин. Если его абсолютное значение близко к нулю, то связь между случайными величинами $\zeta(x)$ и $\eta(y)$ не прослеживается. Если абсолютное значение коэффициента корреляции близко к единице, то связь между случайными величинами $\zeta(x)$ и $\eta(y)$ почти линейная, то есть $y = ax + b$.

Случайной функцией называется функция, аргументом которой является случайная величина. Случайный процесс – это случайная функция $\Psi(t)$ от независимой переменной t. Каждое испытание дает определенную функцию $\varphi(t)$, которая называется реализацией процесса или выборочной функцией. Случайный процесс можно рассматривать либо как совокупность реализаций процесса $\varphi(t)$, либо как совокупность случайных величин, зависящих от параметра t.

Возникает вопрос: подчиняются ли каким-то законам явления, носящие случайный характер? Да, но эти законы отличны от привычных нам физических законов. Наиболее важными законами распределения вероятностей являются: нормальное (Гауссово) распределение, биномиальное распределение и распределение Пуассона.

Нормальное распределение – одно из самых распространенных, служит вероятностной моделью многих явлений. Классическим примером, связанным с нормальным распределением, является задача о броуновском движении. Распределение роста и веса студентов университета описывается также нормальным законом. По нормальному закону распределены жители земли в зависимости от климатических условий.

Биномиальное распределение возникает в тех случаях, когда нас интересует, сколько раз происходит событие в серии из определенного числа известных наблюдений (опытов), выполненных в одинаковых условиях. Предположим, что скрестили белую и серую мышь. С помощью биномиального закона можно определить вероятность рождения двух мышей альбиносов из шести во втором поколении. Распределение Пуассона является важным частным случаем биномиального распределения, когда число событий велико.

Зная закон распределения случайной величины, можно определить с помощью компьютера те значения, которые удовлетворяют заданной вероятности, а можно найти вероятность конкретных значений. Чем лучше мы знаем законы изменчивости данных, их распределений вероятности, тем точнее и надежнее могут быть наши выводы.

Практические задания: вычисление характеристик случайной величины.

Темы докладов и рефератов:
1. Примеры исследования случайных величин в специальности.
2. Законы распределения случайных величин.
3. Статистические функции приложения EXCEL.

2.9. Использование математических методов

Краткий конспект лекции [2,12,13,15]

Математические методы позволяют индуктивным и дедуктивным путем получать новые знания об объекте. Язык математики позволяет точно и компактно излагать положения теории, формулировать ее понятия и выводы.

Процесс принятия решений в любой предметной области проходит в несколько этапов: постановка задачи, решение задачи, анализ полученного решения и реализация решения. Поставить задачу – означает прежде всего понять условия задачи (т.е. удалить неполноту, избыточность и неоднозначность). В наиболее общем виде условия задачи математически могут быть записаны следующим образом: найти в заданном множестве X

точки x, удовлетворяющие множеству заданных ограничений $K(x)$. Для того, чтобы понять задачу, необходимо ответить на следующие вопросы. Что является известным? Каковы исходные данные? Каковы условия задачи? Можно ли удовлетворить условия? Достаточно ли заданных условий для отыскания неизвестных?

Использование математических моделей позволяет выделить и формально описать наиболее важные связи переменных. Основные типы математических моделей: детерминированные и стахостические, статические и динамические, с непрерывным и дискретным временем, имитационные и оптимизационные. Изучение модели дает возможность определить наилучшее решение в той или иной ситуации.

Существует четыре основных способа решения какой-либо задачи:

1. Применения явной формулы.
2. Использование рекурсивного определения.
3. Использование алгоритма.
4. Метод перебора, метод проб и ошибок и др.

Применяются также специальные математические методы: системный анализ, методы прогноза, методы оптимизации и др.

Математика – это созданное человеком орудие познания, которое позволяет нам осуществлять надежный контакт с внешней объективной реальностью, в огромной степени расширяя пределы информационных каналов, непосредственно связанных с нашими органами чувств.

Практические задания: постановка задач.

Темы докладов и рефератов:

1. Системный подход к решению проблемы выбора места работы.
2. Основные типы математических моделей.
3. Математические методы в специальности.
4. Непостижимая эффективность математики.

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Этапы развития математики.
2. Определение матрицы. Примеры матриц.
3. Области применения матриц.
4. Метод Крамера для решения линейных систем алгебраических уравнений.
5. Определение множества. Примеры записи множеств.
6. Определение функции. Типы функций.
7. Способы задания функций.
8. Свойства и графики простых функций.
9. Предел числовых последовательностей и функций. Примеры.
10. Определение производной. Геометрический смысл производной.
11. Правила вычисления производной функции одной переменной.
12. Правила вычисления производной функции двух переменных.
13. Примеры вычисления производной первого и второго порядка.
14. Максимум и минимум функции.
15. Правила нахождения экстремумов функции.
16. Понятие дифференциала.
17. Понятие определенного и неопределенного интеграла.
18. Порядок дифференциальных уравнений. Примеры.
19. Основные характеристики случайной величины (математическое ожидание, дисперсия, стандартное отклонение).
20. Смысл коэффициента корреляции.
21. Основные законы распределения вероятностей.
22. Способы решения задач.
23. Этапы принятия решений.
24. Типы математических моделей.
25. Использование математических методов в специальности.

4. ЛИТЕРАТУРА

4.1. Основная литература

1. Архипов Г.И. и др. Лекции по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1999.
2. Биркгофф Г. Математика и психология. – М.: Сов. радио, 1977.
3. Высшая математика для экономистов /Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 1997.
4. Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире. – М.: Просвещение, 1985.
5. Замков О.О. Математические методы для экономистов. – М.: Наука, 1994.
6. Клайн М. Математика. Поиск истины /Пер. с англ. – М.: Мир, 1988.
7. Колесников А.Н. Краткий курс математики для экономистов. – М.: Наука, 1997.
8. Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. – М.: Наука, 1991.
9. Кудрявцев Л.Д. Современная математика и ее преподавание. – М.: Наука, 1980.
10. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 1990.
11. Математика в современном мире. – М.: Мир, 1967.
12. Моисеев Н.Н. Математика ставит эксперимент. – М.: Наука, 1979.
13. Новые области применения математики /Пер. с англ. /Под ред. Дж. Лейткилла. – Минск.: Вышэйшая школа, 1981.
14. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Наука, 1975.
15. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1970.
16. Солодовников А.С. и др. Математика в экономике. – М.: Финансы и статистика, 1998.
17. Стройк Д.Я. Краткий очерк истории математики /Пер. с нем. – М.: Наука, 1990.
18. Франсис Дж. Книжка с картинками по топологии. Как рисовать математические картинки. – М.: Мир, 1991.

4.2. Дополнительная литература (энциклопедии, справочники)

1. Математика в понятиях, определениях и терминах /Под ред. Л.В. Сабинина. – Т. 1, 2. –М.: Просвещение, 1978, 1982.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. –М.: Джангар, 1999.
3. Гусак А.А. и др. Справочник по высшей математике. – Минск: ТС, 1999.
4. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М.: Наука, 1974.

СОДЕРЖАНИЕ

Т.И. Пруцакова

ОСНОВЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Учебно-методическое пособие
для студентов гуманитарного, международного
и медицинского факультетов

Редактор Л.М. Стрельникова
Технический редактор Э.К. Гаврина
Корректор О.А. Матвеева
Компьютерная верстка Д.Р. Зайнулиной

Подписано к печати 8.11.99. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Офсетная печать. Объем 1,75 п.л.
Тираж 100 экз. Заказ 349.

Издательство Славянского университета

Отпечатано в типографии КРСУ. г. Бишкек, ул. Шопокова, 68.