Гл.1. Степенные ряды

Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$ (1) называется степенным, где a_0, a_1, $a_2,...,a_n,...$ – постоянные, называемые коэффициентами ряда. Иногда рассматривают степенной ряд более общего вида: $a_0 + a_1(x-a) + a_x(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ...$ (2), где a – некоторое постоянное число. Поскольку ряд (2) подстановкой $x - a = x'$ приводится к виду (1), то в дальнейшем мы будем, в основном, изучать степенные ряды вида (1).

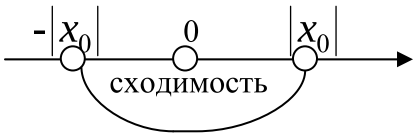
Часто для удобства n-м членом степенного ряда называют член $a_n x^n$ несмотря на то, что он стоит на $(n+1)$-м месте. Свободный член ряда a_0 считают нулевым членом ряда.

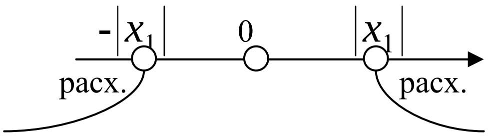
1. Сходимость и свойства степенных рядов

Степенной ряд (1) всегда сходится при $x = 0$.

Теорема (Абель). Если степенной ряд (1) сходится при некотором $x_0 \neq 0$, то он сходится, причем абсолютно, при любом x, удовлетворяющем условию $|x| < |x_0|$, т.е. в интервале ($-|x_0|, |x_0|$).

Если ряд (1) расходится при некотором x_1, то он расходится при любом $|x| > |x_1|$, т.е. вне интервала ($-|x_1|, |x_1|$).





Следствия из теоремы Абеля.

1. Если x_0 – точка сходимости и $x_0 \neq 0$, то интервал ($-|x_0|, |x_0|$) состоит из точек абсолютной сходимости ряда (1).
2. Для всякого степенного ряда существует такое число R $(0 \leq R \leq \infty)$, называемое радиусом сходимости, что при $|x| < R$ ряд сходится, а при $|x| > R$ ряд расходится.

Радиус сходимости может быть определен или по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{|a_n|}$ (3) или по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{|a_n + 1|}$ (4), если эти пределы существуют. После нахождения радиуса сходимости, а следовательно, и интервала сходимости следует для полного определения области сходимости степенного ряда исследовать поведение этого ряда на границе нитервала сходимости в точках $x = \pm R$.

Замечание 1. При исследовании ряда в точках $x = \pm R$ не имеет смысла применять признаки Коши или Даламбера, ибо соответствующие пределы, что следует из фомул для радиуса сходимости, или не существуют, или равны единице. Аналогично, применяя признак Коши сходимости положительного ряда, получаем, что $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Замечание 2. Для степенных рядов вида $a_0 + a_1(x-a) + {}$ $+ a_2(x-a)^2 + ... + +a_n(x-a)^n + ...$ все сказанное выше остается в силе с той только разницей, что теперь центр интервала сходимости будет лежать не в точке $x = 0$, а с точке $x = a$, следовательно, интервалом сходимости будет интервал $(a - R, a + R)$, или $|x - a| < R$.

Перечислим основные свойства степенных рядов.

Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке $[-r, r]$, где $r < R$, R – его радиус сходимости. Отсюда вытекает непрерывность степенного ряда на $[-r, r]$ и возможность почленного интегрирования ряда на любом отрезке $[0, x]$, $-R < x < R$, а так же почленного дифференцирования ряда для всех $x \in (-R, R)$.

Ряды, получаемые почленным дифференцированием и интегрированием степенного ряда, имеют тот же интервал сходимости и их сумма внутри интервала сходимости равна, соответственно, производной и интегралу от суммы первоначального ряда.

Если $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то $\left.\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\ \int_0^x S(x)dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}\right\} -R < x < R.$

Операцию почленного дифференцирования и интегрирования можно производить над стеаенным рядом сколько угодно раз. Таким образом, сумма степенного ряда внутри его интервала сходимости является бесконечно дифференцируемой функцией.

Примеры.

1. Исследовать сходимость степенного ряда

$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+...+\frac{1}{n}x^n+...$

Здесь $a_n=\frac{1}{n}$, $a_{n+1}=\frac{1}{n+1}$ и радиус сходимости ряда $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}==\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$. Таким образом, ряд сходится для значний x, удовлетворяющих неравенству $-1<x<1$ $(|x|<1)$. Исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости, т.е. при $x=\pm 1$. Если $x=1$, то получаем гармонический ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+...$

Он сходится. При $x=-1$ получается ряд $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-...+(-1)^n\frac{1}{n}+...$ Он сходится по признаку Лейбница.

Итак, область сходимости степенного ряда есть промежуток $[-1,1)$ $(-1\le x<1)$.

2. Исследовать сходимость ряда $(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^3}(x-2)^3+...$

Имеем: $a_n=\frac{1}{n^2}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}$ и $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=1$.

Следовательно, ряд сходится, если $-1<x-2<1$, т.е. $1<x<3$.

Если $x=3$, то получаем ряд $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{n^2}+...$ Этот ряд сходится, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится при $P=2>1$. При $x=1$ получаем ряд $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-...+(-1)^n\frac{1}{n^2}+...$ Этот ряд сходится, притом абсолютно, так как сходится ряд из абсолютных величин его членов. Итак, область сходимости степенного ряда есть промежуток $[1,3]$ $(1\le x\le 3)$.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^P}$.

$R=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^P=1$ – радиус сходимости; $|x|<1$ – интервал сходимости.

Если $x=1$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^P}$ сходится при $P>1$ и расходится при $P\le 1$.

При $x=-1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^P}$ сходится при $P>0$ (причем абсолютно) и расходится при $P\le 0$.

4. Исследовать сходимость ряда $1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+\ldots$

Так как $a_n=n!$, $a_{n+1}=(n+1)!$,

то $R=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$.

Ряд сходится только при $x-5=0$, т.е. в точке $x=5$.

5. Для ряда $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$

$a_n=\frac{1}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$ и $R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty$.

Следовательно, ряд сходится при любом значении x. Отсюда, между прочим, следует, что при любом x предел общего члена равен нулю, т.е. $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$.

6. Исследовать сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k(x-2)^k$.

Имеем: $a_n=0$ при $n=2k-1$ и $a_n=\left(\frac{k+1}{2k+1}\right)^k$ при $n=2k$.

Воспользуемся формулой $R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Тогда $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[2k]{\left(\dfrac{k+1}{2k+1}\right)^k}}=\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt{\dfrac{2k+1}{k+1}}=\sqrt{2}$.

Исследуем ряд на концах интервала сходимости. Полагая $x-2=\sqrt{2}$, получим числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{k+1}{2k+1}\right)^k\cdot 2^k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{k+1}{k+\dfrac{1}{2}}\right)^k=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{1}{2k+1}\right)^k$.

Но $\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2k+1}\right)^k=\lim\limits_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{t}{2}}=\sqrt{e}\neq 0$.

Таким образом, при $x-2=\sqrt{2}$ ряд расходится. При $x-2=-\sqrt{2}$ ряд также расходится. Итак, область сходимости данного ряда $2-\sqrt{2}<x<2+\sqrt{2}$.

Замечание 3. При решении примера 6 мы воспользовались следующим способом: сли среди коэффициентов ряда есть равные нулю и последовательность оставшихся в ряде показателей степеней разности $x-a$ (переменного x) любая, то радиус сходимости можно находить по формуле $R=\dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$, в которой используются только значения a_n, отличные от нуля. Впрочем, эта формула пригодна и в других случаях, лишь бы существовал этот предел.

7. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4+(-1)^n}{n^2}x^n$.

$\dfrac{1}{R}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{4+(-1)^n}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{4+(-1)^n}}{\sqrt[n]{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[n]{4+(-1)^n}}{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}=1$ (см. 2.2, пример 10); $R=1$. При $x=\pm1$ ряд абсолютно сходится, так как $\left|\dfrac{4+(-1)^n}{n^2}\cdot(\pm1)^n\right|<\dfrac{5}{n^2}$; $-1\le x\le 1$ – область сходимости.

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot e^{\sqrt{n}} \cdot x^n$.

$\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1$; $R = 1$.

При $x = \pm 1$ ряд расходится, так как его члены неограниченно возрастают. Область сходимости: $-1 < x < 1$.

Иногда рассматривают и обобщенные степенные ряды вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n [\varphi(x)]^n$. В этом случае области сходимости принадлежат все точки, удовлетворяющие неравенству $|\varphi(x)| < R$.

9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n \cdot 2^n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

$\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\ln n}{n \cdot 2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}e\frac{(\ln n)^{\frac{1}{n}}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln(\ln n)}{n}}}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2}$; $R = 2$. Ряд сходится при $\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 2$. Решим это неравенство.

$$(1-x)^2 < 4(1+x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 10x + 3 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3, \\ x > -\frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

При $x = -3$ ряд сходится условно, при $x = -\frac{1}{3}$?? Область сходимости – $x \le -3$ или $x > -\frac{1}{3}$, т.е. $(-\infty, -3] \cup \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$.

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n + 3^n}e^{-nx}$.

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n}{2^n+3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{\ln n}{n}}}{3\cdot\sqrt[n]{(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}}=\frac{1}{3};$$ $R=3$. Ряд сходится, когда $e^{-x}<3$, или $x>-\ln 3$. При $e^{-x}=3$ ряд расходится, так как его члены не стремятся к нулю. Итак, $x>-\ln 3$ – область сходимости.

11. Найти суммуряда $1+2x+3x^2+4x^3+...\ (|x|<1)$,
продифференцировав почленно ряд $1+x+x^2+x^3+...\ (|x|<1)$.
Из формулы суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $(S=\dfrac{a}{1-q})$ следует, что $1+x+x^2+x^3+...=\dfrac{1}{1-x}$ $(a=1)$.
Теперь, продифференцировав это равенство, имеем:
$$1+2x+3x^2+4x^3+...=\frac{1}{1-x}.$$

12. Найти сумму ряда $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+...\ (|x|<1)$.
Интегрируя равенство $1+x+x^2+x^3+...=\dfrac{1}{1-x}$ в пределах от 0 до x, получаем: $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+...=-\ln(1-x)$.
Этот ряд сходится в промежутке $[-1,1)$.

Гл.2. Разложение функций в степенные ряды

Нам теперь известно, что сумма степенного ряда в интервале сходимости этого ряда является непрерывной и бесконечно дифференцируемой функцией.

Рассмотрим обратную задачу: какие функции и в каких областях представимы в виде суммы степенного ряда.

Всякую функцию, у которой в окрестности точки $x=a$ существует n производных, можно разложить по формуле Тейлора:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+R_n$$

(1), где $R_n=\dfrac{f^{(n)}\left[a+\theta(x-a)\right]}{n!}(x-a)^n$, $0<\theta<1$ $(*)$. R_n называется остаточным членом.

Если функция $f(x)$ имеет в окрестности точки $x=a$ производные всех порядков (т.е. является бесконечно дифференцируемой) и, кроме того, в этой окрестности $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ (2), то функция $f(x)$ представляется рядом Тейлора:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+...+$$

$+\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+...$ (3), т.е. будет суммой этого ряда (иными словами, ряд Тейлора сходится к этой функции $f(x)$).

Условие (2) является необходимым и достаточным условием выполнения разложения (3).

При $a=0$ получаем разложение функции $f(x)$ в так называемый ряд Маклорена:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...\text{ (4).}$$

Таким образом, ряд $f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+...+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+...$ (5) называется рядом Маклорена функции $f(x)$.

В связи с трудностями проверки условия (2) часто пользуются следующим предложением: если в некоторой окресности точки $x=a$ при любом n выполняется неравенство (A) $\left|f^{(n)}(x)\right|<M$, где M – некоторая положительная постоянная, то $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$ и функция $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора.

Справедливо также для всех x из данной окрестности следующее утверждение: если функция в некотором интервале представляется сходящимся степенным рядом, то этот ряд будет для нее рядом Тейлора. Иными словами, если мы каким-либо способом разложим функцию в степенной ряд, то этот ряд обязательно будет рядом

Тейлора для нашей функции (единственность разложения функции в степенной ряд).

Для многих функций, употребляемых в практических применениях, каждая точка x сходимости ряда Маклорена является и точкой сходимости этого ряда к породившей его функции. Поэтому при разложении многих функций в ряд Маклорена можно вместо проверки выполнения условия (2), что во многих случаях весьма затруднительно, исследовать сходимость самого ряда Маклорена как обычного степенного ряда и доказать, что при любом x он сходится именно к данной функции.

При разложении функции $f(x)$ в ряд Тейлора, разложенный по степеням $(x-a)$, можно рекомендовать следующий порядок действий.

1. Найти производные $f'(x)$, $f''(x),\ldots,$ $f^{(n)}(x),\ldots$
2. Вычислить $f'(0)$, $f''(0),\ldots,$ $f^{(n)}(0),\ldots$
3. Составить формально ряд Тейлора.
4. Найти область сходимости полученного ряда.
5. Доказать, что в области сходимости остаточный член стремится к нулю, т.е. выполняется условие (2).

Примеры.

1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=e^x$.

Имеем.

1) $f'(x)=f''(x)=f'''(x)=...=f^{(n)}(x)=e^x$, откуда, при $x=0$ получаем:

2) $f'(x0)=f''(0)=f'''(0)=...=f^{(n)}(0)=1$.

3) По формуле (5) находим ряд Маклорена для функции e^x:

$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+...+\frac{1}{n!}x^n+...$ (6).

4) Найдем интервал сходимости этого ряда:

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{n!}=\infty$. Следовательно, ряд абсолютно сходится на всей числовой прямой $(-\infty,\infty)$.

5) Докажем теперь, что функция e^x сумма ряда (6).

В силу необходимого условия сходимости ряда для любого x справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|^n}{n!}=0$ (7). Так как $f^{n}(\xi)=e^{\xi}$, то

$(**)$ $R_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n=\dfrac{e^{\xi}}{n!}x^n$, где $\xi=\theta\, x$, $0<\xi<1$.

Учитывая, что $e^{\xi}<e^{|x|}$, имеем: $|R_n(x)|=\dfrac{e^{\xi}}{n!}|x|^n<\dfrac{e^{|x|}}{n!}|x|^n$.

Отсюда в силу (7) $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$ при любых x и, следовательно, функция e^x является суммой ряда (6).

Таким образом, при любом x имеет место разложение:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \quad (8).$$

2. Разложение функции $f(x)=\sin x$.

1) $f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$, $f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\dfrac{\pi}{2}\right),\ldots,$

$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2) $f(0)=0$, $f'(0)=1$, $f''(0)=0$, $f'''0)=1$, $f^{(4)}(0)=0,\ldots$

3) По формуле (5) составим ряд Маклорена:

$$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots \quad (9).$$

4) $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)!}{(2n-1)!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n(2n+1)(2n-1)!}{(2n-1)!}=\infty$, т.е. полученный ряд (9) сходится абсолютно на всей числовой прямой.

5) Исследуем остаточный член.

$R_n(x)=\dfrac{f^{(n)}(\xi)}{n!}x^n=\dfrac{\sin\left(\xi+n\cdot\dfrac{\pi}{2}\right)}{n!}x^n$, где $\xi=\theta\, x$, $0<\xi<1$. Теперь в силу (7) при любом x получаем $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. А это означает, что функция $\sin x$ является суммой ряда (9), т.е. имеет место разложение:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots \text{ (10).}$$

3. Разложение функции $f(x) = \cos x$.

Аналогично предыдущему, можно получить разложение функции $\cos x$ в ряд Маклорена. Однако еще проще разложение $\cos x$ получается почленным дифференцированием ряда для $\sin x$:

$$(\sin x)' = (x)' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^5}{5!}\right)' - \left(\frac{x^7}{7!}\right)' + \ldots + \left[\frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]' + \ldots, \text{ откуда}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \text{ (11).}$$

Замечание 1. Вместо ряда Маклорена можно было бы рассмотреть более общий ряд Тейлора по степеням $(x-a)$, где $a \neq 0$, т.е. ряд вида

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

Все изложенное полностью переносится и на эти ряды.

Замечание 2. При разложении функций e^x, $\sin x$, $\cos x$ можно было воспользоваться условием (А). Например, пусть $f(x) = e^x$ и рассмотрим интервал $(-N, N)$, где N – любое фиксированное число. Для любого $x \in (-N, N)$ имеем: $e^x < e^N = M$. Из этого следует, что все производные функции e^x ограничены одним и тем же числом $M = e^x$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Аналогично, любая производная функций $\sin x$ и $\cos x$ (т.е. $\pm\sin x$ и $\pm\cos x$) по абсолютному значению не превосходит единицы. Следовательно, ряды Маклорена для функций $\sin x$ и $\cos x$ сходятся к ним соответственно на всей числовой оси.

Замечание 3. Может случиться (если не выполняется условие (2)), что ряд Тейлора, составленный для функции $f(x)$, сходится, а сумма его вовсе не равна $f(x)$. Например, функция $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ – бесконечно дифференцируема на всей числовой оси $(-\infty,\infty)$, причем все ее производные в точке $x=0$ равны нулю.

В самом деле, $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ при $x\neq 0$ и $f'(0)=0$, так как

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h)-f(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{z}{e^{z^2}}=0$, где $z=\dfrac{1}{h}$. Далее, $f''(0)=0$, так как $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f'(h)-f'(0)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{2}{h^3}e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}=\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{2z^4}{e^{z^2}}=0$, и т.д. Следовательно, все коэффициенты Тейлора функции $f(x)$ ($f(0)$, $\dfrac{f'(0)}{1!}$, $\dfrac{f''(0)}{2!},\ldots$) при $x=0$ равны нулю. Соответствующий ряд Тейлора состоит из членов, равных нулю, и, значит, сходится не к функции $f(x)$, а к функции, тождественно равной нулю.

4. Биноминальный ряд. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x)=(1+x)^m$, где m – любое действительное число. Имеем:
$f'(x)=m(1+x)^{m-1}$, $f''(x)=m(m-1)(1+x)^{m-2},\ldots,$
$f^{(n)}(x)=m(m-1)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}\ldots$
Поэтому $f(0)=1$, $f'(0)=m$, $f''(0)=m(m-1),\ldots,$
$f^{(n)}(0)=m(m-1)...(m-n+1),\ldots$ и ряд запишется в виде:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+...$$

Определим радиус сходимости $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Так как $a_n=\dfrac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}$, $a_{n+1}=\dfrac{m(m-1)...(m-n)}{(n+1)!}$, то $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{n+1}{m-n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{1+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{m}{n}-1}\right|=1.$

Таким образом, биноминальный ряд сходится при $x\in(-1,1)$, т.е. $|x|<1$, и расходится при $x<-1$ и $x>1$ (при $|x|>1$).

Исследуем остаточный член в случае, когда $0<x<1$.

В этом случае для всех $x>m$ имеет место $(1+x)^{m-n}=\dfrac{1}{(1+x)^{n-m}}<1$, и поэтому $\left|f^{(n)}(x)\right|=\left|m(m-1)...(m-n+1)(1+x)^{m-n}\right|<m(m-1)...(m-n+1)$.

Из условия (А) получаем: $|R_n(x)|<\left|\dfrac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n\right|$.

Правая часть неравенства есть абсолютная величина n-го члена степенного ряда, сходящегося при $|x|<1$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$.

Соответствующее доказательство для интервала $(-1,0)$ более сложное и мы его не приводим.

Таким образом, биноминальный ряд представляет функцию $(1+x)^m$ в интервале $(-1,1)$ в следующем виде:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+... \quad (12).$$

На концах интервала $(-1,1)$, т.е. при $x=\pm1$, ряд может сходиться или расходиться в зависимости от показателя степени m. Так, при $m>0$ и $x=\pm1$ ряд сходится абсолютно; при $-1<m<0$ и $x=1$ сходится условно; при $m\le1$ и $x=1$, а также при $m<0$ и $x=-1$ ряд расходится.

Разложение (10) пригодно:
при $m\ge0$, если $-1\le x\le1$;
при $-1<m<0$, если $-1<x\le1$;
при $m\le-1$, если $-1<x<1$.

Приведем часто встречающиеся биноминальные ряды, соответствующие значениям $m=-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$:

1. $\frac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+...+(-1)^n x^n \ (-1<x<1)$;

2. $\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2\cdot 4}x^2+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4+...+$

$+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot ...\cdot 2n}x^n+... \qquad (-1\le x\le 1)$;

3. $\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2-\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4-...+$

$+(-1)^{n}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot ...\cdot 2n}x^n+... \qquad (-1< x\le 1)$.

5. Функции $\ln(1+x)$ и $\text{arctg}x$.

Способ 1.

Вычислим значение функции, например $f(x)=\ln(1+x)$, и ее производных при $x=0$; имеем:

$f(x)=\ln(1+x)$, $f'(x)=\frac{1}{1+x}$, $f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x)=\frac{2!}{(1+x)^3}$, $f^{(4)}=$

$=-\frac{3!}{(1+x)^4},...;\ f(0)=\ln 1=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=2!,\ f^{(4)}=-3!,...$

Отсюда следует, что $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ ($n=$ $=1,2,3,\ldots$). По формуле (4) находим разложение данной функции в ряд Маклорена (5): $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+...(13)$. Этот ряд называется логарифмическим рядом. Область сходимости найдем по формуле (3) (5.1, (3)): $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|1+\frac{1}{n}\right|=1$, т.е. $-1<x<1$. Исследуем сходимость ряда в точках $x=-1$ и $x=-1$. При $x=-1$ ряд расходится как гармонический. При $x=1$ имеем знакочередующийся ряд: $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...+(-1)^n\frac{1}{n}+...$, который сходится по прихнаку Лейбница. Итак, данный ряд сходистя в промежутке $-1 < x \le 1$. Можно показать, что этот ряд сходится именно к $\ln 2$, т.е. $\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$.

Способ 2.

Известно, что $\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}$; поэтому разложение в ряд найдем почленным интегрированием ряда для доби $\frac{1}{1+x}$ (5.2, пример 4): $\frac{1}{1+x} =$ $= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ $(*)$. Отсюда

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = \int_0^x \left(1 - x + x^2 - x^3 + \dots\right)dx = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \ (-1 < x \le 1).$$

Запишем выражение для функции $f(x) = \mathrm{arctg} x$ в виде интеграла: $\mathrm{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$. Разложим подынтегральную функцию $\frac{dx}{1+x^2}$ в ряд Маклорена. В $(*)$ меняем x на x^2:

$$\frac{dx}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

Интегрируя этот ряд в области сходимости $-1 < x < 1$, находим:

$$\mathrm{arctg} x = \int_0^x \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^n x^{2n} + ..\right)dx,$$

$$\mathrm{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots \ (14).$$

Этот ряд сходится в промежутке $(-1 \le x \le 1)$.

Свойство единственности разложения функции в ряд Тейлора удобно использовать при разложении в степенной ряд элементарных функций, опираясь при этом на пять основнях разложений (см. 5.2, пример 4, 5):

1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, (-\infty, \infty)$ (8);

$$2)\ \sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}(-1)^{n-1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+$$

$$+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots\ (-\infty,\infty)\ (10);$$

$$3)\ \cos x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,$$

$(-\infty,\infty)$ (11);

$$4)\ (1+x)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+$$

$$+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots\ (-1,1)\ (12);$$

$$5)\ \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}(-1)^{n-1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots$$

$(-1,1]$ (13).

Примеры.

6. Разложить в степенной ряд e^{-x^2}.
В формуле (8), заменив x на $-x^2$, получаем:

$$e^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}-\frac{x^6}{6}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n!}+\ldots\ (-\infty,\infty).$$

7. Разложить $\ln x$ в ряд по степеням $x-1$.
В формуле (13), заменяя x на $x-1$, получаем:

$$\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}+\ldots\ (0<x\le 2).$$

8. Разложить $\frac{1}{x}$ в ряд по степеням $x-2$. Данную функцию представим в виде $\frac{1}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-2}{2}}$ и рассмотрим правую часть как сумму бесконечно

убывающей геометрической прогрессии с первым членом $a=\frac{1}{2}$ и знаменателем $q=-\frac{x-2}{2}$. Отсюда получаем:

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x-2}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^3+\ldots+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n,\quad \text{т.е.}\quad \frac{1}{x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{8}(x-2)^2-$$

$-\frac{1}{16}(x-2)^3+\ldots$ Так как $\left|\frac{x-2}{2}\right|<1$, то $0<x<4$.

9. Разложить e^{2x} по степеням $x-1$.
В формуле (8) x заменяем на $2x$: $e^{2x}=e^{2(x-1)}e^2=$

$$=e^2\left[1+\frac{2}{1!}(x-1)+\frac{2^2}{2!}(x-1)^2+\ldots+\frac{2^n}{n!}(x-1)^n+\ldots\right]=e^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{n!}(x-1)^n.$$

10. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=\cos^2 x$.
Известно, что $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$. Заменив x на $2x$ в формуле (11), получим: $\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ или $\cos 2x=1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$ Теперь ясно, что $\cos^2 x=\frac{1}{2}\left[1+\left(1-\frac{2^2x^2}{2!}+\frac{2^4x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)\right]$. Окончательно: $\cos^2 x=1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{8x^4}{4!}-\ldots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\ldots$ Разложение верно при любом x.

Операцию разложения функций в степенные ряды позволяет значительно упростить применение следующих свойств степенных рядов.

1) Два степенные ряда можно почленно складывать, умножать и делить (по правилу умножения и деления многочленов). При этом областью сходимости полученного нового степенного ряда будет совокупность всех точек, в которых одновременно сходятся оба ряда.

2) Степенной ряд в области его сходимости можно почленно интегрировать, а внутри области сходимости можно почленно дифференцировать. При этом его радиус сходимости не меняется (5.1, примеры 11 и 12, 5.2, примеры 3 и 5).

Часто бывает удобно предварительно разложить в ряд производную функции, а затем путем почленного дифференцирования получить ряд для самой функции.

Примеры.

11. $\operatorname{sh}x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!} - \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1-(-1)^n}{2n!}x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Сходится при всех x.

12. $\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} = x\left[1+\left(-x^2\right)\right]^{-\frac{1}{2}} =$ (5.2, формула (12), замена x на $-x$, $m = -\dfrac{1}{2}$)$=$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}x\left(-x^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_{2n}^n}{4^n}x^{2n+1},$$

$C_m^n = \dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ – число сочетаний из m по n. Сходится при $|x| < 1$.

$$13.\ (1+x)e^{-x} = (1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n = (5.2,\text{ формула } (8), \text{ замена } x \text{ на } -x) =$$

$$=(1+x)\left(1-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n!}+\ldots\right)=$$

$$1+\left(-\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n!}+\ldots\right)+$$

$$+\left(x-\frac{x^2}{1!}+\frac{x^3}{2!}-\frac{x^4}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}+\ldots\right)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{(n-1)!}=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right]x^n=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(-1)+(-1)^{n-1}n}{n!}x^n=$$

$$=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)(-1)^{n-1}}{n!}x^n.$$ Ряд сходится при любом x.

$$14.\ e^x\ln(x+1)=\left(1+\frac{x}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots\right)=$$

$$=x+\left(\frac{1}{1!}-\frac{1}{2}\right)x^2+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{2\cdot 1!}+\frac{1}{3}\right)x^3+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{2\cdot 2!}+\frac{1}{3\cdot 1!}-\frac{1}{4}\right)x^4+$$

$$+\left(\frac{1}{4!}-\frac{1}{2\cdot 3!}+\frac{1}{3\cdot 2!}-\frac{1}{4\cdot 1!}+\frac{1}{5}\right)x^5+\ldots=x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{6}x^4+\frac{3}{40}x^5+\ldots$$

Заметим, что здесь можно подсчитать столько коэффициентов, сколько понадобится. У первого ряда $R=\infty$, у второго $R=1$, т.е. полученный результат справедлив при $-1<x<1$, где абсолютно сходятся оба ряда.

$$15.\ \mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots}{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots}=\frac{\frac{x}{1}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\ldots}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\ldots};$$

$$
\begin{array}{l|l}
\;x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}-\frac{x^7}{5040}+\ldots & 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}+\ldots \\
+\;-\left(x-\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{24}-\frac{x^7}{720}+\ldots\right) & \overline{x+\frac{x^2}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots} \\
\hline
\;\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30}+\frac{x^7}{840}+\ldots & \\
+\;-\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6}+\frac{x^7}{72}+\ldots\right) & \\
\hline
\;\frac{2x^5}{15}-\frac{4x^7}{315}+\ldots & \\
+\;-\left(\frac{2x^5}{15}-\frac{x^7}{15}+\ldots\right) & \\
\hline
\;\frac{17x^7}{315}+\ldots & \\
+\;-\left(\frac{17x^5}{315}+\ldots\right) & \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Таким образом, разложение тангенса в степенной ряд начинается с членов $\mathrm{tg}x = x+\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\ldots \quad (*)$. Для вычисления дальнейших членов надо было продолжить разложение $\sin x$ и $\cos x$. Можно доказать, что это разложение справедливо при $|x|<\frac{\pi}{2}$.

Равенство $(*)$ можно получить также с помощью метода неопределенных коэффициентов. Для этого заметим, что $\mathrm{tg}x$ как нечетная функция должен разлагаться в ряд по нечетным степеням: $\mathrm{tg}x = a_1x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+\ldots$ Но поскольку $\cos x\cdot\mathrm{tg}x=\sin x$, то

$$\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots\right)\left(a_1x+a_3x^3+a_5x^5+a_7x^7+\ldots\right)=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$a_1=\frac{1}{1!},\; a_3-\frac{a_1}{2!}=-\frac{1}{3!},\; a_5-\frac{a_3}{2!}+\frac{a_1}{4!}=\frac{1}{5!},\; a_7-\frac{a_5}{2!}+\frac{a_3}{4!}-\frac{a_1}{6!}=-\frac{1}{7!},\ldots$$

Отсюда последовательно найдем коэффициенты a_1, a_3, a_5, a_7,...

16. $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

В формуле (13) $\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-x)^n}{n}(-1)^{n-1}$ заменим x на $-x$:

$$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n}(-1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)x]^n}{n}(-1)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}(-1)^{n-1}=$$

$=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\dfrac{x^n}{n}$ $(*)$. Имеем:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}(-1)^{n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}(-1)^{2n-1}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}(-1)^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots\right)\ (**).$$

17. $$\frac{\ln(1-x)}{x-1}=(-1)[\ln(1-x)]\cdot\frac{1}{1-x}=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots\right)x^n;\ |x|<1.$$

Мы перемножили два ряда, приводя подобные члены.

18. $$\ln\left(1+x+x^2+x^4\right)=\ln\frac{1-x^4}{1-x}=\ln\left(1-x^4\right)-\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n}}{n}.$$

19. $y=\mathrm{arctg}x.$

$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$. В формуле $\dfrac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ (5.2, пример 4) заменим x на x^2: $\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. $y=\mathrm{arctg}x=C+\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Чтобы найти постоянную C, положим $x=0$: $\mathrm{arctg}0=0=C$ Теперь окончательно получаем: $\mathrm{arctg}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}(-1)^n$. Ряд сходится при $|x|\le 1$.

20. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x}$.

$y' = -\dfrac{2}{1+4x} = (-2)\dfrac{1}{1+4x^2}$. В формуле $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ заменим x на $4x^2$: $\dfrac{1}{1+4x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(2^2x^2\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2x)^{2n}$, следовательно, $y' =$ $= (-2)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n 2^{2n}x^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n}$;

$y = \operatorname{arctg}\dfrac{2-2x}{1+4x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}2^{2n+1}x^{2n+1}}{2n+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}(2x)^{2n+1}}{2n+1} + C.$

Положим $x = 0$, тогда $C = \operatorname{arctg}2$. Хотя ряд сходится при $|x| \le \dfrac{1}{2}$, это разложение справедливо только при $-\dfrac{1}{4} < x \le \dfrac{1}{2}$, так как данная функция терпит разрыв при $x = -\dfrac{1}{4}$.

21. $y = \arcsin x$.

Имеем: $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. В формуле

$\dfrac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 - \ldots +$ $+(-1)^n\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2n}x^n + \ldots$ $(-1 < x \le 1)$ (5.2, пример 4) заменим x на $-x^2$: $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-x^2\right)}{1!} + \dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-x^2\right)^2}{2!} +$ $+\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-x^2\right)^3}{3!} + \ldots$, $|x| < 1$, или, после упрощения: $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} =$ $= 1 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \ldots + \dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}x^{2n} + \ldots$, $|x| < 1$. Проинтегрируем написанный ряд в пределах от 0 до x ($|x|<1$). Получим: $\int\limits_1^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$ $= \int\limits_0^x dx + \int\limits_0^x \frac{x^2}{2}dx + \int\limits_0^x \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 dx + ...$ Таким образом, $\arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} +$ $+ \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + ... + \frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot ...\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...,\ |x|<1.$

Гл.3. Некоторые применения степенных рядов

Степенные ряды широко используются в приближенных вычислениях значений функций и интералов, при решении дифференциальных уравнений.

1) Вычисление приближенных значений функции

Чтобы найти значение функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, т.е. $f(x_0)$ с заданной точностью, надо:

а) представить функцию степенным рядом $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$;

б) подставить значение аргумента x_0 функции в степенной ряд, при этом получится знакопеременный или знакопостоянный числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n {x_0}^n$;

в) если этот числовой ряд знакочередующийся, то надо вычислять значения членов ряда, пока $(n+1)$-й член не станет по абсолютной величине меньше заданной точности; тогда из теоремы Лейбница (см. 3.2, 3.3) сумма n первых первых членов ряда S_n отличается от суммы ряда S, а значит, и от значения $f(x_0)$ рассматриваемой функции не более чем на абсолютную величину первого из отброшенных членов; т.о. величина S_n есть значение $f(x_0)$ с точностью до $\left|a_{x+1}{x_0}^{n+1}\right|$.

г) если числовой ряд содержит только члены одного знака, то погрешность вычисления оценивается значением остаточного члена $R_n(x_0)$ в разложении функции $f(x_0)$ по формуле Маклорена:

$R_n(x_0)=\dfrac{f(n)(\xi)}{n!}x_0^n$, где $0<\xi<x_0$ ($\xi=\theta\, x_0$, $0<\theta<1$); в другой раз, если данный числовой ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов (остаточный член ряда, 3.3), сравнивают с бесконечно убывающей геометрической прогрессией.

Примеры.

1. Вычислить $\sin 10^\circ$ с точностью до 0,001.

Воспользуемся разложением

$\sin x_0 = x-\dfrac{x^3}{3!}+\dfrac{x^5}{5!}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$ Для этого переведем градусную меру в радианную: $10^\circ=\dfrac{\pi}{18}$. Затем в разложении положим $x=\dfrac{\pi}{18}$: $\sin\dfrac{\pi}{18}=\dfrac{\pi}{18}-\dfrac{\pi^3}{18^3\cdot 3!}+\dfrac{\pi^5}{18^5\cdot 5!}-\ldots$ Подсчитаем значение каждого члена. Имеем: $\dfrac{\pi}{18}=0{,}1745$; $-\dfrac{\pi^3}{18^3\cdot 3!}=-0{,}0008$. Абсолютное значение второго члена меньше 0,001, т.е. $|-0{,}0008|<0{,}001$. По теореме Лейбница для подсчета значений $\sin\dfrac{\pi}{18}$ с заданной точностью E=0,001 достаточно взять один член, т.е. $\sin\dfrac{\pi}{18}$, при этом совершим погрешность меньше первого отброшенного члена по абсолютной величине $|r_n|<0{,}0008$.

2. Вычислить $\sqrt{e}$ с точностью до 10^{-3}.

Имеем: $e^x=1+\dfrac{x}{1!}+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots$ При $x=\dfrac{1}{2}$ получаем:

$$e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2!}+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{(n-1)!}+\ldots$$

Это есть тот случай, когда полученный числовой ряд знакопостоянный и теорема Лейбница не применияется. Поэтому оценим погрешность приближения с помощью остаточного члена, именно: $R_n(x)=\dfrac{e^{\xi}}{n!}x^n$,

$0<\xi<\dfrac{1}{2}$. При $x=\dfrac{1}{2}$ имеем: $R_n\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{e^{\xi}}{n!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$, $0<\xi<1$.

Для достижения нужной нам точности потребуем, чтобы выполнялось неравенство $|R_n|<10^{-3}$. Имеем:

$$|R_n|=\left|\frac{e^{\xi}\left(\frac{1}{2}\right)^n}{n!}\right|<\frac{e^{\max\xi}}{2^n\cdot n!}=\frac{e^{\frac{1}{2}}}{2^n\cdot n!}<\frac{e}{2^n\cdot n!}<\frac{3}{2^n\cdot n!}.$$

Заметим, что, начиная с $n=5$, $|R_n|<10^{-3}$. Действительно, $|R_5|=\dfrac{1}{1280}<10^{-3}$. Следовательно, для вычисления $\sqrt{e}$ с требуемой точностью надо взять $n=5$:

$$\sqrt{e}\approx 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2\cdot 2!}+\frac{1}{2^3\cdot 3!}+\frac{1}{2^4\cdot 4!}+\frac{1}{2^5\cdot 5!}\approx 1{,}648.$$

Все слагаемые надо брать с точностью до 10^{-4}, чтобы при суммировании не получить погрешность превышающей 10^{-3}.

3. Оценить погрешность приближенного равенства

$$e^x\approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},\ 0<x<n+1.$$

Здесь погрешность определяется суммой членов, следующих после $\dfrac{x^n}{n!}$:

$$R_n=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}+\frac{x^{n+3}}{(n+3)!}+\ldots \text{ или}$$

$$R_n=\frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)(n+2)}+\frac{x^3}{(n+1)(n+2)(n+3)}+\ldots\right).$$

Каждый из сомножителей в знаменателе $n+1$, $n+2$, $n+3$,... заменим меньшей величиной $n+1$, получим неравенство:

$$R_n<\frac{x^n}{n!}\left(\frac{x}{n+1}+\frac{x^2}{(n+1)^2}+\frac{x^3}{(n+1)^3}+\ldots\right).$$

Или, суммируя бесконечно убывающую геометрическую прогрессию в скобках $\left(a=\frac{x}{n+1},\quad q=\frac{x}{n+1}\right)$, имеем:

$$R_n<\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{\frac{x}{n+1}}{1-\frac{x}{n+1}},\ \text{т.е. } R_n<\frac{x^n}{n!}\cdot\frac{x}{n+1-x}.$$

Для вычисления корней n-й степени используется биноминальный ряд $(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-n+1)}{n!}x^n+...$

4. Вычислить $\sqrt[4]{83}$ с точностью до 0,001.

$$\sqrt[4]{83}=\sqrt[4]{81+2}=3\sqrt[4]{1+\frac{2}{81}}=3\cdot\left(1+\frac{2}{81}\right)^{\frac{1}{4}}=/\text{здесь}\quad x=\frac{2}{81},\quad m=\frac{1}{4}/=$$

$$=3\cdot\left(1+\frac{1}{162}+\frac{1}{162\cdot108}+\frac{1}{162\cdot108\cdot486}+...\right).$$

Так как величина третьего члена $\frac{3}{162\cdot108}<0{,}001$, то для подсчета данного корня с точностью до 0,001 достаточно взять сумму первых двух членов, так как первый отброшенный член по абсолютной величине $\left|a^3\right|$ меньше 0,001.

Таким образом, $\sqrt[4]{83}\approx3\cdot\left(1+\frac{1}{162}\right)=\frac{3\cdot163}{162}=3{,}0195.$

2) Интегрирование функции

Для приближенного вычисления определенного интеграла подынтегральную функцию (или часть ее) представляют степенным рядом и полученный ряд интегрируют. При этом следует учесть, что промежуток интегрирования должен содержаться в интервале сходимости степенного ряда (чтобы полученный ряд сходился равномерно на орезке интегрирования, 5.1, основные свойства степенного ряда). Оценка погрешности производится так же, как и при вычислении значений функции.

5. Вычислить с точностью до 0,001 интеграл $\int\limits_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}}dx.$

Раскладывая подынтегральную функцию в ряд (5.2, пример 6) и интегрируя почленно, получим:

$$\int\limits_0^1 e^{\frac{-x^2}{2}}dx = \int\limits_0^1\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}-\frac{x^6}{48}+\frac{x^8}{384}-...\right)dx = 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336}+\frac{1}{3456}-...\approx$$

$$\approx 1-\frac{1}{6}+\frac{1}{40}-\frac{1}{336}\approx 0{,}854$$

(ошибка не превосходит первого отброшенного члена, т.е. $\frac{1}{3456}<0{,}001$).

3) Приближенное интегрирование дифференциальных уравнений

С помощью степенных рядов приближенно решаются некоторые классы нелинейных дифференциальных уравнений. Одним из методов интегрирования таких уравнений является представление искомого решения в виде степенного ряда (способ неопределенных коэффициентов). Этот метод заключается в следующем. Будем искать решение уравнения $F(x,y,y',...)=0$ в виде степенного ряда. $y=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+...$, где a_n – неизвестные коэффициенты ($n=0,1,...$). Для определения коэффициентов a_0, a_1, $a_2,\ldots$ разложения искомого решения $y(x)$ подставляют ряд $y(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ в заданное уравнение и проделывают все встречающиеся при этом операции над степенными рядами, после чего сравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения.

В результате эти равенства вместе с начальными условиями образуют систему, из которой последовательно определяются коэффициенты a_0, a_1, $a_2,...,a_n,\ldots$ Как правило, этот процесс останавливают на каком-то шаге и получают тем самым приближенное решение.

6. Найти рушение уравнения $y''-xy'=0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0)=0$ и $y'(0)=1$.

Решение ищем в виде $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + ...$ $(*)$

Имеем: $y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + na_nx^{n-1} + ...$ $(**)$

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + ... + n(n-1)a_nx^{n-2} + ...$$

На основании начальных условий из $(*)$ и $(**)$ находим $y(0) = a_0 = 0$, $y'(0) = a_1 = 1$. Подставляя в данное уравнение вместо y и y' их разложения, получаем тождество:

$$2a_2 + 3\cdot 2a_3x + ... + n(n-1)a_nx^{n-2} + ... = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + ... + a_{n-3}x^{n-2} + ...$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, находим:

$a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $4\cdot 3a_4 = 1$,..., $n(n-1)a_n = a_{n-3}$,..., следовательно, $a_4 = \frac{1}{3\cdot 4}$,

$a_5 = 0$, $a_6 = 0$, $a_7 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}$, $a_8 = 0$, $a_9 = 0$, $a_{10} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 10}$,...,

$a_{2n-1} = a_{2n} = 0$, $a_{2n+2} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot ...\cdot 3n(3n+1)}$,...

Подставляя полученные значения коэффициентов в $(*)$, получим:

$$y = x + \frac{1}{3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}x^7 + ... + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot ...\cdot 3n(3n+1)}x^{3n+1} + ...$$

С помощью признака Даламбера можно убедиться в том, что этот ряд сходится на всей числовой оси, значит, представляет искомое решение при всех x.

Другой метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, метод последовательного дифференцирования, состоит в отыскании решения в виде ряда Маклорена или Тейлора в зависимости от заданных начальных условий.

7. $y'' = xy' - y + e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Имеем решение в виде ряда Маклорена.

$$y = y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + ...$$

Последовательно дифференцируя данное уравнение и учитывая начальные условия, получим:

$y(0) = 1$,

$y'(0) = 0$,

$y''(x) = xy' - y + e^x$, $y''(0) = 0$,

$y'''(x) = y' - xy'' - y' + e^x$, $y'''(0) = 1$,

$y^{(4)}(x) = y'' + y''' + xy''' - y'' + e^x$, $y^{(4)}(0) = 1$,

……………………………………

Ответ запишется в виде: $y = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \ldots$