КЫРГЫЗ-РОССИЯ СЛАВЯН УНИВЕРСИТЕТИ

“Жогорку математика” кафедрасы

А.К. Курманбаева

СЫЗЫКТУУ АЛГЕБРАНЫН НЕГИЗДЕРИ

Окуу-методикалык куралы

Бишкек-2011

УДК 512.643(575.2)(075)

А.К. Курманбаева
Сызыктуу алгебранын негиздери. Окуу-методикалык куралы/ Кыргыз-Россия Славян Университети: Бишкек, 2011-57с.

Кыскача сызыктуу алгебранын теориялык негиздери берилген. Ар бир параграфтагы теориялык материалдарды бекемдөө үчүн тиешелүү мисалдар толугу менен талданылган. Ал эми окуу-методикалык куралынын акырында өз алдынча иштөө үчүн жетишерлик санда көнүгүүлөр киргизилген.

Окуу- методикалык куралы Кыргыз-Славян университетинин архитектура, дизайн жана куруу факультетинин жана сырттан окуу факультетинин студенттери үчүн арналган.

Рецензенттер: д.ф.-м.н., с.н.с. С. Искандаров
к.ф.-м.н., доцент И.А.Усенов

КРСУ, Бишкек, 2011

МАЗМУНУ

Кириш сөз

Билимдин жана техникалардын ар түрдүү тармактарында кызмат кылган окумуштуулардын жана инженердик адистердин билиминин фундаменти- математика. Сызыктуу алгебра математиканын негизги бөлүгү болуп эсептелет жана математикалык билим алууда эң орчундуу орунду ээлейт.

Бул окуу-методикалык куралдын максаты сызыктуу алгебранын негизги элементтерин студенттерге окуп үйрөтүү жана практикалык маселелерди сапаттуу чыгарууга жардам берүү.

Сызыктуу алгебра боюнча ар түрдүү деңгээлде орус тилинде жазылган адабияттар арбын, бирок кыргыз тилинде жазылган окуу куралдар жок.

Окуу- методикалык куралын жазууда Кыргыз-Славян университетинин техникалык жана куруу адистери үчүн түзүлгөн программалары эске алынды.

Окуу-методикалык куралына матрицалар жана алар менен болгон амалдар , аныктагычтар, сызыктуу теңдемелер системасы жана аларды чыгаруу ыкмаларына көнүл бурулду.

Ар бир параграфтагы теориялык материалдарды бекемдөө үчүн тиешелүү мисалдар толугу менен талданып берилди. Ал эми окуу-методикалык куралынын акырында өз алдынча иштөө үчүн жетишерлик санда көнүгүүлөр киргизилди.

§1. Матрицалар жана алар менен болгон амалдар

Аныктама. Берилген a_{ij} сандарынын m—жолчодон жана n-мамычадан турган төмөнкү тик бурчтуу таблица

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m,n} = \left(a_{ij} \right)_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрица деп аталат.

Матрицаларды латын тамгалары менен белгилейбиз: $A, B, C, \dots$, же $A = (a_{ij})$, $(i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$.

Матрицаны түзгөн a_{ij} сандарын матрицанын ***элементтери*** дейбиз. Матрицанын ар бир элементи эки индекстен турат i жана j:

i –индекси элементтин жайгашкан жолчосунун номерин көрсөтөт, ал эми j –индекси –мамычасынын номерин көрсөтөт.Мисалы, a_{12} элементи 1- жолчодо жана 2- мамычада жайгашкан, ал эми a_{31} элементи- 3- жолчодо жана 1-мамычада жайгашкан.

Эгерде матрицанын жолчолорунун саны менен мамычаларынын саны барабар болсо ($m=n$) анда матрица ***квадраттык*** матрица деп аталат жана n-ди анын тартиби дейбиз. Эгерде $m \neq n$ болсо, анда матрицаны ***тик бурчтуу*** дейбиз.

Мисалы, $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 6 & 7 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ матрицасы $2{\times}4$ өлчөмдүү тик бурчтуу, анткени ал 2 жолчо жана 4 мамычадан турат.

$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ матрицасы 3×2 өлчөмдүү тик бурчтуу матрица, анткени ал 3 жолчодон жана 2 мамычадан турат

Ал эми $D=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}_{3,3}$ - үчүнчү тартиптеги 3-жолчо жана 3-мамычадан турган квадраттык матрица.

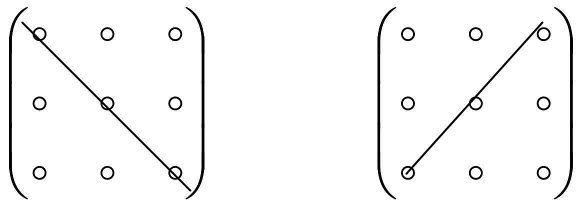
Матрицалардын айрым түрлөрү

Бир жолчодон турган $1\times n$ өлчөмдүү матрицаны ***жолчо*** же ***жолчо вектор*** деп айтабыз, мисалы $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -5\end{pmatrix}_{1,3}$.

Бир мамычадан турган $m\times 1$ өлчөмдүү матрицаны ***мамыча*** же ***мамыча вектор*** дейбиз, мисалы $C=\begin{pmatrix}1{,}2\\3\\5\end{pmatrix}_{3,1}$.

Элементтеринин баардыгы нөл болгон матрицаны ***нөлдүк матрица*** деп айтабыз, мисалы $O=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

Квадраттык матрицанын ***негизги*** диагоналы деп a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} элементтеринен турган, анын сол бурчунан он бурчун көздөй жүргөн элементтерин айтабыз, ал эми оң бурчунан сол бурчу көздөй жүргөн элементтерин ***кошумча*** диагонал дейбиз:



Эгерде квадраттык матрицанын негизги диагоналында жатпаган элементтери нөлгө барабар болсо, анда ал матрица ***диагоналдык*** матрица деп аталат, мисалы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Негизги диагоналынын элементтери бирге барабар болгон диагоналдык матрица ***бирдик матрица*** болот жана *E* тамгасы менен белгиленет, мисалы

$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - 3-чү тартиптеги бирдик матрица.

Матрицанын тартибин өзгөртпөй туруп, анын жолчолорун мамычаларына же мамычаларын жолчолоруна алмаштыруу матрицаны ***траспорнирлөө*** деп аталат.Мисалы,

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 5\\ 3 & 7 & 9\end{pmatrix},\quad A^T=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 4 & 7\\ 5 & 9\end{pmatrix}$$

Матрицалар менен болгон амалдар

- ***Кошуу амалы.*** Бирдей өлчөмдүү A жана B матрицаларынын суммасы деп, A жана B матрицаларынын тиешелүү элементтеринин суммасынан турган ошол эле өлчөмдөгү $C=A+B$ матрицасын айтабыз.

Мисал 1.

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 5 & -7\\ 3 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2 & 4+5 & 2+(-7)\\ (-3)+3 & 1+(-3) & 0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 9 & -5\\ 0 & -2 & 2\end{pmatrix}.$$

Бирдей өлчөмдүү A,B жана C матрицаларды кошуунун төмөнкүдөй касиеттери бар:

1^0 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$;

2^0 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

Матрицаларды кошууда нөлдүк матрица кадимки сандарды кошуудагы нөлдүн ролун аткарат:

3^0 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$

- ***Матрицаны санга көбөйтүү.*** A матрицаны μ санына көбөйткөндө A матрицанын ар бир элементи ошол эле μ санына көбөйтүлгөн С=μА матрицасын айтабыз.

Мисал 2. $A=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 4 & 8\end{pmatrix}$. Анда

$$3A=\begin{pmatrix}0 & -3\\ 4 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 0 & 3\cdot(-3)\\ 3\cdot 4 & 3\cdot 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -9\\ 12 & 24\end{pmatrix}.$$

- ***Матрицаны матрицага көбөйтүү.*** Эгерде $A=(a_{ij})$ матрицасы $m\times n$ -өлчөмдүү, ал эми $B=(b_{is})$ матрицасы $n\times k$-өлчөмдүү болсо, анда A жана B матрицасынын көбөйтүндүсү $m\times k$-өлчөмдүү $A\cdot B=C=(c_{is})$ матрицасы болот. Мында C матрицанын $c_{эs}$элементтери төмөнкү формула менен аныкталат:

$$c_{эs} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{js} = a_{i1} b_{1s} + a_{i1} b_{2s} + \ldots + a_{in} b_{ns}, \; i = 1,2,\ldots,m; \; s = 1,2,\ldots,k.$$

Берилген A жана B матрицаларынын көбөйтүндүсү $C = A \cdot B$, A матрицасынын мамычаларынын саны B матрицасынын жолчолорунун санына барабар болгон учурда гана аныкталат.Эгерде A жана B n-өлчөмдүү квадраттык матрицалар болушса, анда $A \cdot B$ көбөйтүндүсүн да жана $B \cdot A$ көбөйтүндүсүн да табууга болот жана бул көбөйтүндү матрицалардын өлчөмү да n-ге барабар болот.Жалпы учурда матрицаларды көбөйтүүдө орун алмаштыруу закону орун албайт, б.а. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Мисал 3.

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ жана $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ матрицалары үчүн

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot1+2\cdot0 & 1\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot1 & 1\cdot0+1\cdot1+2\cdot1\\ 0\cdot1+1\cdot1+(-1)\cdot0 & 0\cdot1+1\cdot(-1)+(-1)\cdot1 & 0\cdot0+1\cdot1+(-1)\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 1 & -2 & 0\end{pmatrix}$$

орун алат. Ал эми $B\cdot A$ мааниге ээ эмес, себеби B матрицасынын мамычаларынын саны A матрицасынын жолчолорунун саны менен дал келбейт.

Мисал 4. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ үчүн: а) $C_1=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$, б) $C_2=B\cdot A$ ны табкыла.

а) $C_1=\begin{pmatrix}1\cdot2 & 1\cdot1 & 1\cdot1\\ 2\cdot2 & 2\cdot1 & 2\cdot1\\ 1\cdot2 & 1\cdot1 & 1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

б) $C_2=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot1+1\cdot2+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\end{pmatrix}$

Мисал 5. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

$$C_1 = A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0+0 & 0+0+1 & 0+0+1\\ 2+1+0 & 0+1+1 & 0+0+1\\ 0+1+0 & 0+1+1 & 0+0+1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix};$$

$$C_2 = B\cdot A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0+0 & 0+0+0 & 2+0+0\\ 1+1+0 & 0+1+0 & 1+1+0\\ 0+1+0 & 0+1+1 & 0+1+1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Мында $A\cdot B$ жана $B\cdot A$ матрицаларынын экөө тең *A, B* матрицаларындай эле 3×3 өлчөмгө ээ, бирок $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Матрицаларды көбөйтүүнүн касиеттери:

1) $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})$;

2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}$;

3) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$;

4) $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$, бул жерде $\boldsymbol{O}$ - нөлдүк матрица;

5) $\lambda(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{A}+\lambda\boldsymbol{B}$, λ-сан

6) $\lambda(\boldsymbol{AB})=(\lambda\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{B})$.

§2.Аныктагычтар жана алардын касиеттери

2.1. Экинчи жана үчүнчү тартиптеги аныктагычтар жана алардын касиеттери

Аныктагычтар жөнүндөгү түшүнүккө биз биринчи даражагы алгебралык теңдемелердин системасын кароодо келебиз.

Эки белгисизи бар экинчи таритиптеги сызыктуу теңдемелердин системасын карайбыз:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases} \qquad (1)$$

Белгисиз x- табуу үчүн, биринчи теңдемени a_{22} санына, экинчисин- a_{12} санына көбөйтүп, теңдемелерди кошсок, төмөндөгүнү табабыз:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot x = b_1 a_{22} - b_2 a_{12}.$$

Ошондой эле, биринчи теңдемени a_{21} санына, экинчисин a_{11} санына көбөйтүп, төмөнкү теңдемени табабыз:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot y = b_2 a_{11} - b_1 a_{21}.$$

Эгерде $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ болсо, анда

$$x = \frac{b_1 a_{11} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}; \quad y = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} . \qquad (2)$$

(2) формула менен аныкталган $x,\ y$ - маанилерин (1) системага коюп, аны канаатандыра турганын көрүүгө болот.

Демек, эгерде $a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}\neq 0$ болсо, анда (1) теңдемелер системасы жалгыз чыгарылышка ээ болот (чыгарылышты (2) формула аркылуу табабыз).

(1) системасындагы белгисиз *x*, *y*-тин коэффициенттеринен түзүлгөн төмөнкү сандардын таблицасын карайбыз:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Мындай таблицаны 2- тартиптеги (квадраттык) матрица дейбиз. Аны ***A*** тамгасы менен белгилейбиз. (2) формуланын бөлүмүндөгү туюнтма $(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})$ ***A*** матрицасынын экинчи тартиптеги аныктагычы деп аталат. ***A*** матрицасынын аныктагычы төмөндөгүдөй символ менен белгилейбиз $|A|$ же $\det A$ же Δ .

Ошентип, бизге экинчи тартиптеги $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрицасы берилсе, анда ***A*** матрицасына тиешелүү 2-тартиптеги аныктагыч $\det A$ төмөнкү формула менен аныкталган сан болот:

$$\boxed{\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.} \tag{4}$$

Экинчи тартиптеги аныктагычты эсептөө үчүн негизги диагоналындагы элементтеринин көбөйтүндүсүнөн жардамчы диагоналындагы элементтеринин көбөйтундүсүн кемитүү жетиштүү.

Мисал 6. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 7$.

Жогорку көрсөтүлгөн экинчи тартиптеги аныктагычты эсептөөнүн эрежесинин негизинде b_1a_{11}-b_2a_{12} жана b_2a_{11}-b_1a_{21} туюнтмаларын

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

түрүндө жазууга болот.

Анда (1) системасынын чыгарылышы төмөндөгү түрдө табылат:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \tag{5}$$

Эгерде үч белгисиздүү сызыктуу теңдемелердин системасынын чыгарылышын карасак,

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \tag{6}$$

анда, үчүнчү тартиптеги аныктагычтарга келебиз.

Тогуз сандан турган квадраттык таблицаны (үчүнчү тартиптеги матрицаны) карайбыз

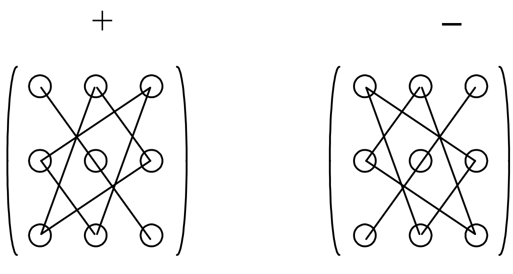
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Үчүнчү тартиптеги $\boldsymbol{A}$ матрицасынын же 3-тартиптеги аныктагыч $\det A$ төмөнкү формула менен эсептелген сан болот:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - \qquad (7)$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Бул туюнтма үч бурчтуктардын эрежеси боюнча төмөнкү схемадан алынат:



Мисал 7. Төмөнкү 3-тартиптеги аныктагычты эсептегиле:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 3 - 0\cdot 2\cdot 0 - 1\cdot 1\cdot 1 - 1\cdot 1\cdot 3 = -2.$$

Үчүнчү тартиптеги аныктагычты карайлы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Бул аныктагычтын берилген a_{ij} элементинин ***минору*** деп ал элемент жайгашкан i-чи жолчону жана j-чи мамычаны сызып салгандан кийинки келип чыккан экинчи тартиптеги аныктагычты айтабыз жана эки индекстүү M_{ij} - тамгасы менен белгилейбиз.

Мисалы a_{12} элементине тиешелүү минор төмөнкү экинчи тартиптеги аныктагыч болот:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{23}.$$

Бул минор үчүнчү таритиптеги аныктагычтын 1-чи жолчосун жана 2-чи мамычасын сызып салгандан кийин келип чыкты.

Берилген аныктагычтын a_{ij} элементинин ***алгебралык толуктоочусу*** A_{ij} деп $(-1)^{i+j}$ белгиси менен алынган анын минорун айтабыз, б.а.

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij},} \qquad (9)$$

мында *i*-a_{ij} элементи жайгашкан жолчонун номери; *j*- мамычанын номери.

Мисалы, $A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$,

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Мисал 8. Төмөнкү 3-тартиптеги аныктагычтын баардык элементтеринин алгебралык толуктоочторун тапкыла:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Чыгаруу.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot M_{13} = M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -M_{21} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 13;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = M_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -15;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -M_{23} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 16; \; A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = -M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 12;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -12;$$

Аныктагычтардын касиеттери

1. *Эгерде аныктагычтын кандайдыр бир жолчосу (мамычасы) нөлдөрдөн гана турса, анда аныктагычтын мааниси нөлгө барабар, мисалы*

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

2. *Аныктагычтын эки жолчосунун (мамычасынын) ордун алмаштыруудан аныктагычтын белгиси гана өзгөрөт,* мисалы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

3. *Эгерде аныктагыч бирдей эки жолчого (мамычага) ээ болсо, анда анын мааниси нөлгө барабар болот*, мисалы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 10 & 15 & 20 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. *Эгерде аныктагычтын жолчолорун мамычалары менен же болбосо мамычаларын жолчолору менен алмаштырсак, анда аныктагыч өзгөрүлбөйт:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Бул аныктагычтарды ***транспонирлөө*** деп аталат. Бул касиет текшерүү жолу менен далилденет.

5. *Эгерде аныктагычтын кандайдыр бир жолчосу (мамычасы)* ***k-га*** *барабар болгон жалпы көбөйтүүчүгө ээ болсо, анда* ***k*** *санын аныктагычтын белгисинин алдына чыгарууга болот:*

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k\cdot a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k\cdot a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

6. *Эгерде аныктагычтын эки жолчосунун (мамычасынын) элементтери пропорциялаш болушса, анда аныктагыч нөлгө барабар болот,* мисалы

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 8 & 6 \\ 3 & 12 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 4\cdot 0 = 0.$$

7. *Эгерде аныктагычтын кандайдыр бир жолчосуна (мамычасына) каалаган санга көбөйтүлгөн башка жолчонун (мамычанын) элементтерин кошсок, анда аныктагычтын мааниси өзгөрбөйт,* мисалы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+ka_{11} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+ka_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+ka_{31} \end{vmatrix}.$$

8. *Аныктагычтын мааниси бул аныктагычтын каалагандай жолчосунун (мамычасынын) элементтеринин алардын алгебралык толуктоочуларына көбөйтүлгөн көбөйтүндүлөрүнүн суммасына барабар.*

Башка сөз менен айтканда төмөнкү барабардыктар орун алат:

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}, \\ \Delta &= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}, \\ \Delta &= a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} \end{aligned} \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}, \\ \Delta &= a_{12}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}, \\ \Delta &= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} \end{aligned} \qquad (11)$$

Аныктагычты (10) жана (11) формулалардын негизинде жазуу аныктагычты тандалып алынган жолчонун же мамычанын элементтери аркылуу ***ажыратуу*** деп аталат. Аныктагычтардын бул касиети n-тартиптеги аныктагычты эсептөөнү n-сандагы *(n-1)*-тартиптеги аныктагычты алып келүүгө мүмкүндүк берет.

Мисал 9. Биринчи жолчонун элементтери боюнча ажыратып төмөнкү 3-чү тартиптеги аныктагычты эсептегиле.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-2)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 1\cdot(15-1)+2\cdot(10+4)+3\cdot(-2-12)=0.$$

2.2. Жогорку тартиптеги аныктагычтарды чыгаруу

Бизге төртүнчү тартиптеги аныктагычты чыгаруу талап кылынат:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Чыгаруу. Биринчи жолчонун элементтери боюнча ажыратабыз:

$$\Delta = 2\cdot A_{11} + (-5)\cdot A_{12} + 1\cdot A_{13} + 2\cdot A_{14} =$$

$$= 2\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 7 & -1 & 4 \\ -9 & 2 & 7 \\ -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} + (-5)\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 7 & 4 \\ 5 & -9 & 7 \\ 4 & -6 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 2\cdot(-1)^{1+4}\cdot\begin{vmatrix} -3 & 7 & -1 \\ 5 & -9 & 2 \\ 4 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot\left(28 - 36 + 42 + 48 - 18 - 49\right) +$$

$$+ 5\cdot\left(-12 + 20 - 28 - 32 + 10 + 21\right) + 1\cdot\left(54 - 120 + 196 + 144 - 70 - 126\right) -$$

$$- 2\cdot\left(27 + 30 + 56 - 36 - 35 - 36\right) = 2\cdot 15 + 5\cdot(-21) + 78 - 2\cdot 6 = -9.$$

Биз бул аныктагычка алардын сегизинчи касиетин колдонуп, үчүнчү тартиптеги **4** аныктагычты чыгарууга алып келдик. Бирок мындай жол менен аныктагычты чыгаруу бизди канаатандырбайт, анткени $n \geq 4$ болгондо мындай аныктагычты чыгаруу көп эсептөөнү талап кылат. Ошондуктан аныктагычтардын башка касиеттерин колдонуп, аны чыгарууну жөнөкөйлөтүүгө болот**.** Эң мурда аныктагычты төмөнкү түрдө кайрадан өзгөртүп алабыз. Биринчи жолчонун элементтерин экинчи жолчонун тиешелүү элементтерине кошобуз, андан кийин биринчи жолчонун элементтерин кезеги менен (-2), (-1) сандарына көбөйтүп, алынган жолчону үчүнчү, төртүнчү жолчонун элементтерине кошобуз

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Үчүнчү мамычанын элементтери боюнча ажыратып төмөнкү Үчүнчү тартиптеги аныктагычка алып келебиз

$$\Delta = 1 \cdot A_{13} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Эми Үчүнчү тартиптеги аныктагычты жөнөкөйлөтөбүз.Экинчи жолчонун элементтерине биринчи жолчонун тиешелүү элементтерин кошуп, андан кийин биринчи жолчонун элементтерин 2-ге көбөйтүп Үчүнчү жолчонун тиешелүү элементтерине кошобуз

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 6\\ 0 & 3 & 9\\ 0 & 3 & 12\end{vmatrix}.$$

Биринчи жолчонун элементтери боюнча ажыратып, экинчи тартиптеги аныктагычка ээ болобуз:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 2 & 6\\ 0 & 3 & 9\\ 0 & 3 & 12\end{vmatrix}=(-1)\cdot A_{11}=(-1)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 9\\ 3 & 12\end{vmatrix}=$$
$$=(-1)\cdot\left(3\cdot 12-9\cdot 3\right)=-\left(36-27\right)=-9.$$

§3. Тескери матрица

Аныктама. Эгерде матрицанын аныктагычы нөлдөн айырмалуу, б.а. $\det A\neq 0$ болсо, анда мындай матрица ***өзгөчөлөнбөгөн*** матрица деп аталат. Тескери учурда, б.а. $\det A=0$ болгондо ***өзгөчөлөнгөн*** матрица деп аталат.

Аныктама. A^{-1} матрицасы А квадраттык матрицасынын ***тескери*** матрицасы деп аталат, эгерде

$$\boxed{A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E} \tag{12}$$

барабардыгы орун алса.

Аныктама боюнча квадраттык матрицалар үчүн гана тескери матрица түшүнүгү жашайт деп айтууга болот.

Квадраттык A матрицанын тескери матрицасы A^{-1} жашайт качан гана $\det A \neq 0$ болсо, б.а. A- өзгөчөлөнбөгөн матрица болсо.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ өзгөчөлөнбөгөн матрицасы берилсин дейли, б.а.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Анда A матрицанын тескери матрицасы

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}} \qquad (13)$$

болот.

Тескери матрицанын табуу схемасы

1. Берилген A матрицанын аныктагычын табабыз. Эгерде $\det A = 0$ болсо, анда A- өзгөчөлөнгөн жана A^{-1} жашабайт. Эгерде $\det A \neq 0$ болсо, анда A- өзгөчөлөнбөгөн матрица жана тескери матрица жашайт.

2. Берилген A матрицанын бардык $a_{эj}$ элементтеринин алгебралык толуктоочтору $A_{эj}$ -лерди табабыз.

3. Эми $A_{эj}$- алгебралык толуктоочтордун жардамы менен

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$ матрицасын түзөбүз жана аны транспорнирлейбиз

$$(A^*)^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

4. $(A^*)^T$ матрицанын ар бир элементин $\det A$ га бөлөбүз

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (A^*)^T = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

5. Тескери матрица A^{-1} туура табылгандыгын $A^{-1} \cdot A = E$ же $A \cdot A^{-1} = E$ формуласы менен текшеребиз.

Мисал 10. Эгерде $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ берилсе, $\boldsymbol{A}^{-1}$ матрицасын тапкыла.

Чыгаруу. 1. Матрицанын аныктагычын эсептейбиз.

$$\mathbf{det}\,\boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot2 + 0\cdot1\cdot1 + 1\cdot1\cdot2 - 1\cdot1\cdot1 - 1\cdot1\cdot1 - 2\cdot0\cdot2 = 2$$

2. $\boldsymbol{A}$ матрицасынын элементтеринин алгебралык толуктоочторун табабыз:

$$\boldsymbol{A}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad \boldsymbol{A}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad \boldsymbol{A}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$\boldsymbol{A}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad \boldsymbol{A}_{22} = (-2)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad \boldsymbol{A}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$\boldsymbol{A}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad \boldsymbol{A}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \boldsymbol{A}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

3. $A*$ матрицасын түзөбүз жана аны транспорнирлейбиз:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (A^*)^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. $(A^*)^T$ матрицанын ар бир элементин $\det A$ -га бөлөбүз

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

5. Тескери матрица A^{-1} туура табылгандыгын $A^{-1}\cdot A=E$ же $A\cdot A^{-1}=E$ формуласы менен текшеребиз:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}+1+\frac{1}{2} & \frac{1}{2}-1+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-1 & -\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+1 & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

§4. Матрицанын рангы

m-жолчодон жана ***n***-мамычадан турган тик бурчтуу А матрицасын карайбыз

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots. & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Бул матрицанын ***k***-жолчосун жана ***k***-мамычасын сызып ***k***-тартиптеги квадраттык матрицаны бөлүп алууга болот. Мындай камтылуучу матрицанын аныктагычы A матрицасынын ***k***- тартиптеги минору деп аталат.

Мисалы, 3 жолчо жана 4-мамычадан турган $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 4 \\ -2 & 0 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

матрицасы үчүн үчүнчү тартиптеги минорлорунун бири болуп биринчи, экинчи, үчүнчү жолчолорду жана экинчи, үчүчү, төртүнчү мамычаларды бөлүп алгандан кийинки төмөнкү аныктагыч $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}$ болот. Экинчи тартиптеги минорлорунун бири болуп төмөнкү аныктагыч $\begin{vmatrix} 6 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}$ болот. Ал эми матрицанын элементтерин биринчи тартиптеги минорлор деп карасак болот. Матрицанын кээ бир минорлору нөлгө барабар болушу мүмкүн, кээ бирлери нөлдөн айырмалуу болушу мүмкүн.

Аныктама. ***Матрицанын рангы*** деп бул матрицанын нөлдөн айырмалуу болгон минорлорунун эң жогорку тартиби аталат.

Эгерде A матрицасынын рангы $\boldsymbol{r}$-ге барабар болсо, анда A-матрицасында жок дегенде бир нөлдөн айырмалуу $\boldsymbol{r}$-чи тартиптеги минор бар дегенди билдирет, бирок $\boldsymbol{r}$-ден чоң тартиптеги бардык минорлор нөлгө барабар. A матрицасынын рангы $rang\ A$ же $r(A)$ деп белгиленет.

Аныктамадан төмөндөгүлөр келип чыгат:

а) A матрицасынын рангы бул матриканын өлчөмдөрүнүн кичинесинен ашып кетпейт, б.а. $r(A) \le \min(m;n)$;

б) $r(A) = 0$ болот качан гана матриканын бардык элементтери нөлгө барабар болсо;

в) n-тартиптеги квадраттык матрица үчүн $r(A) = n$ болот, качан гана A-өзгөчөлөнгөн матрица болсо.

Матрицанын рангын минорлорду курчоо жана элементардык өзгөртүү ыкмалары менен эсептелинет.

1. Минорлорду курчоо ыкмасы

Мейли A матрицасындагы a_{ij} элементи нөлдөн айырмалуу болсун ($a_{\text{ij}} \neq 0$). Анда $M_1 \neq 0$ жана $r(A) \ge 1$, a_{ij} элементин $(i+1)$ - жолчо жана $(j+1)$ - мамычасы менен курчап, экинчи тартиптеги M_2 минорун алабыз:

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{i,j} & a_{i,j+1} \\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} \end{vmatrix}.$$

Эгерде M_2=0 болсо, анда башка жолчо жана мамычылар менен a_{ij} элементин курчап мүмкүн болгон экинчи тартиптеги минорлорун карайбыз. Эгерде экинчи тартиптеги минорлордун баардыгы нөлгө барабар болсо, анда $r(A)=1$ болот; эгерде экинчи тартиптеги минорлордун ичинен жок дегенде бир минор нөлдөн айырмалуу болсо, анда $r(A)\geq 2$болот.

Эми экинчи тартиптеги $M_2 \neq 0$ минорун карайбыз жана аны жанындагы жолчо, мамычалар менен курчап үчүнчү тартиптеги минорлорду алабыз. Курчоо ыкмасын r-чи тартиптеги $M_r \neq 0$, бирок бардык $M_{r+1}=0$ болгонго чейин улантабыз.

Мисал 11. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ матрицасынын рангын эсептегиле.

Чыгаруу. $M_1=1,\ M_2^1=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=-2+2=0,\ M_2^2=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}=-2+2=0,$

$M_2^3=\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2+2=4\neq 0$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

2. Элементардык өзгөрүүлөр ыкмасы

Жалпы учурда матрицанын рангын аныктоо үчүн бардык минорлорду карап чыгуу кыйынчылыктарды туудурат. Бул маселени жеңилдетүү максатында матрицанын рангына таасирин тийгизбөөчү өзгөртүп түзүүлөрдү жүргүзөбүз.

Матрицаны элементардык өзгөртүп түзүү деп, төмөндөгү амалдарды айтабыз:

- нөлдүк катарларды алып салуу;
- матрицанын жолчолорунун (мамычаларынын) бардык элементтерин нөлдөн айырмалуу болгон санга көбөйтүү;
- матрицанын жолчолорунун (мамычаларынын) орундарын алмаштыруу;

- матрицанын кандайдыр бир жолчосунун (мамычасынын) ар бир элементтерине башка бир жолчонун (мамычанын) жалпы мүчөгө көбөйтүлгөн тиешелүү элементтерин кошуу;
- матрицаны транспорнирлөө.

Теорема. Матрицаны элементардык өзгөртүп түзүүдө анын рангы өзгөрбөйт.

Мисал 12. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}$ матрицасынын рангын тапкыла.

Чыгаруу:1- жолчонун элементтерине 2- жолчонун тиешелүү элементтерин кошуп, андан кийин 1-жолчонун элементтеринен 3- жолчонун тиешелүү элементтерин кемитебиз. Андан кийин 1- жолчону алып салабыз.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3 & 6 & 9 & 12\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & 4 & 6 & 8\\ 3 & 6 & 9 & 12\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow r(A)=2.$

§5. Теңдемелер системасы жөнүндө негизги түшүнүктөр

n белгисиздүү **m** сызыктуу теңдемелер системасы деп төмөнкү системаны

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{14}$$

айтабыз. Мында a_{ij}, b_i $i = \overline{1,m}$; $j = \overline{1,n}$ каалагандай сандар жана тиешелүү түрдө ***белгисиздердин коэффициенттери***, ***бош мүчөлөрү*** деп аталышат.

Теңдемелер системасынын ***чыгарылышы*** деп, бул системага койгондо ар бир теңдемени теңдеш барабардыкка айландыруучу $x_1=C_1$, $x_2=C_2$, …, $x_n=C_n$ сандарынын жыйындысын айтабыз.

Теңдемелер системасы жок дегенде бир чыгарылышка ээ болсо ***биргелешкен***, ал эми чыгарылышы жашабаса ***биргелешпеген*** деп аталат. Системанын биргелешкендиги Кронекер-Капеллинин теоремасынын жардамы менен аныкталат.

биргелешкен болот, качан гана системанын матрицасыныны рангы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... & .... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ik} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mk} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$$

анын кеңейтилген матрицасынын рангына барабар болсо

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1k} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2k} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & .... & ... & ... \\ a_{i1} & a_{i2} & ... & a_{ik} & ... & a_{in} & b_i \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mk} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Биргелешкен теңдемелер системасы жалгыз гана бир чыгарылышка ээ болсо, система ***аныкталган*** деп аталат. Ал эми бирден көп сандагы чыгарылышка ээ болсо, ***аныкталбаган*** деп аталат.

Мисалы,

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ системасы биргелешпеген, анткени бул система чыгарылышка ээ эмес;

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$ системасы биргелешкен жана аныкталбаган, себеби бирден көп чыгарылышка ээ ($x_1 = 1 - C;\quad x_2 = C$, мында С- каалаган сан).

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ системасы биргелешкен жана аныкталган, себеби бул ситема жалгыз гана чыгарылшка ээ: $x_1 = 1;\quad x_2 = 0$.

Эгерде эки теңдемелер системасы чыгарылыштардын бирдей көптүгүнө ээ болушса, анда алар эквиваленттүү системалар деп аталышат. Матрицаларга колдонулуучу элементардык өзгөртүп түзүүлөрдү берилген системага колдонууда ага эквиваленттүү болгон система алынат.

Системаны элементардык өзгөртүп түзүүлөргө төмөнкүлөр кирет:

❖ теңдемелердин орундарын алмаштыруу;

- ❖ системанын каалагандай бир теңдемесинин эки жагын тең кандайдыр бир нөлдөн айырмалуу чыныгы санга көбөйтүү;
- ❖ системанын бир теңдемесинин эки жагына тең кандайдыр бир чыныгы санга көбөйтүлгөн экинчи бир теңдемесин кошуу.
- ❖ $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$ түрүндөгү теңдемени сызып салуу.

Сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруу ыкмалары:

- ➢ Крамердин ыкмасы;
- ➢ Матрицалык жол менен чыгаруу ыкмасы;
- ➢ Гаусстун ыкмасы.

§6. Сызыктуу теңдемелер системасын Крамердин формуласы менен чыгаруу

Сызыктуу теңдемелер системасын чыгаруу үчүн $m=n$ учурда кана Крамердин формуласы колдонулат.

Эгерде эки белгисизи бар эки сызыктуу теңдемелердин системасын карасак

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

анда §2 негизинде төмөндөгүнү алабыз:

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x = b_1a_{22} - b_2a_{12} \\ (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})y = b_2a_{11} - b_1a_{21} \end{cases} \qquad (15)$$

Аныктагычты эсептөө эрежеси боюнча:

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta;$$

$$b_1a_{22} - b_2a_{12} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta_x; \; b_2a_{11} - b_1a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_y,$$

белгилөөлөрүн киргизебиз.

Анда (15) системасын $\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \end{cases}$ (16)

түрдө жазсак болот.

Эгерде (1) система чыгарылышка ээ болсо, анда ал чыгарылыш (16) системасын дагы канааттандырат.

Системанын аныктагычы $\Delta \neq 0$ болсо, анда (1) системасы жалгыз чыгарылышка ээ болот:

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_y}{\Delta}.} \qquad (17)$$

x менен y- тин бул маанилерин (1) системасына коюп, аны канааттандыра тургандыгын көрөбүз. (17) формула ***Крамердин*** формулалары деп аталат.

Эгерде системанын аныктагычы $\Delta = 0$ болсо, анда эки учурду карайбыз:

1. $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ болсун, анда

$$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 = 0 \Rightarrow \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2},$$

демек системанын теңдемелеринин коэффициенттери пропорциялаш болушат. Пропорциялардын коэффициентин k менен белгилесек, анда $a_{11} = ka_{21}; \quad a_{12} = ka_{22}; \quad b_1 = kb_2$ болот.

Системанын биринчи теңдемесине a_{11}, a_{21}, b_1 маанилерин койсок $a_{21}x + a_{22}y = b_2$ экинчи теңдеме келип чыгат. Эки белгисизи бар бир теңдеме чексиз чыгарылышына ээ болот, анткени теңдеменин бир белгисизине ар түрдүү маанилерин берүүгө болот, экинчи белгисизи ушул маанилер аркылуу туюндурулат. Демек бул учурда (1) система чексиз чыгарылышка ээ болот

2. Эгерде $\Delta = 0$ жана жок дегенде аныктагычтардын бири Δ_x же Δ_y нөлгө барабар эмес болсун. Мейли, мисалы $\Delta_x \neq 0$ болсун, анда $\Delta \cdot x = \Delta_x$ барабардыгы x-тин каалагандай маанилерине канаатандырылбайт. Ошондуктан бул учурда (1) системасы чыгарылышка ээ болбойт.

Мисалдар:

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$

Бул жерде $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11 \neq 0$. Демек система бирден бир чыгарылышка ээ болот.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 33, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 11$$

Крамердин формуласынын негизинде $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = 3; \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = 1.$

2. $\begin{cases} x - 2y = 3 \\ -2x + 4y = -6 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0.$$

Эгерде системанын биринчи теңдемесин эки тарабын тең (-2) ге көбөйтсөк, анда системанын экинчи теңдемеси келип чыгат. Ошондуктан бул система бир теңдемеге тең күчтүү жана чексиз чыгарылышына ээ. Теңдеменин y белгисизине ар түрдүү маанилерди берсек, экинчи белгисиз x ти табабыз:

$x = 2y + 3$. Мисалы, y=0 болсо, анда x=3; эгерде y=1 болсо, анда x=5 жана б.у. .

3. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -2x - 4y = 2 \end{cases}$ чыгарылышка ээ эмес, анткени

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0.$$

§7. Бир тектүү үч белгисиздүү экинчи тартиптеги сызыктуу

теңдемелер системасы

Бир тектүү үч белгисиздүү экинчи тартиптеги сызыктуу теңдемелердин системасы деп төмөнкү теңдемелердин системасы аталат:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \end{cases}, \qquad (18)$$

бул жерде $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}$ сандары системанын коэффициенттери деп аталат.

(18) системанын чыгарылышы деп , бул системага койгондо ар бир теңдемени теңдеш барабардыкка айландыруучу $x=c_1$, $y=c_2$, $z=c_3$ деген үч сан аталат. Системаны чыгаруу үчүн, адагенде белгисиздердин коэффициенттеринен түзүлгөн аныктагычтардын бири:

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$, мисалы, биринчиден $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ нөлгө барабар эмес деп болжолдойлук.

Анда (18) системаны төмөндөгү түрдө жазабыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}y = -a_{13}z \\ a_{21}x_1 + a_{22}y = -a_{23}z \end{cases} \qquad (19)$$

z - белгисизин параметр деп эсептеп, (19) системасынын чыгарылышын Крамердин формуласынын негизинде табабыз:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}z & a_{12} \\ -a_{23}z & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \cdot z\,; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z \\ a_{21} & -a_{23}z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \cdot (-z)\,. \qquad (20)$$

z - маанисин параметр деп эсептегендиктен система чексиз көп чыгарылышка ээ болот. Системанын бардык чыгарылыштарынын жыйындысын төмөнкү түрдө жазууга болот:

$$x = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t, \quad y = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}(-t), \quad z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t\,; \qquad (21)$$

Мында $t = \dfrac{z}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$ белгиленген, ал ар кандай сандарды туюнтат. Эгерде үч аныктагыч тең $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$ нөлгө барабар болсо, анда

(18) системанын коэффициенттери бири бирине пропорциялаш болушат. Ошондуктан система үч белгисизи бар бир теңдемеге келтирилет:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{13}}{a_{23}} = \lambda. \Rightarrow a_{11} = \lambda a_{21}; a_{12} = \lambda a_{22}; a_{13} = \lambda a_{23}.$$

Системанын биринчи теңдемесине $a_{11} = \lambda a_{21}; a_{12} = \lambda a_{22}; a_{13} = \lambda a_{23}$ маанилерин койсок , системанын экинчи теңдемесин алабыз:

$$\lambda a_{21}x + \lambda a_{22}y + \lambda a_{23}z = 0,$$

же болбосо $a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0$. Үч белгисизи бар бир теңдеме чексиз чыгарылышка ээ болот. Ал чыгарылышты табуу үчүн теңдеменин эки белгисизине ар кандай маани берип, үчүнчү белгисизин теңдемени канаатандыра тургандай кылып табабыз.

Мисалдар.

1. $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases} <=> \begin{cases} x - 2y = -3z \\ x + y = z \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0;\; x = \frac{\begin{vmatrix} -3z & -2 \\ z & 1 \end{vmatrix}}{3} = -\frac{1}{3}z; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3z \\ 1 & z \end{vmatrix}}{3} = \frac{4}{3}z.$$

Система чексиз чыгарылышка ээ. Чыгарылыштардын жыйындысын төмөндөгү түрдө табабыз: $\{x = -t; y = 4t; z = 3t\}$ мында t-ар кандай сан.

2. $\begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ -2x + 2y + 6z = 0 \end{cases}$.

Система чексиз чыгарылышка ээ болот, анткени системанын экинчи теңдемеси биринчи теңдеменин натыйжасы. Ошондуктан системанын чыгарылышынын жыйындысын төмөндөгү түрдө жазууга болот:

$\{x = t + 3u; \quad y = t; \quad z = u\}$ мында t жана u ар кандай сандар.

§8. Үч белгисиздүү үчүнчү тартиптеги сызыктуу теңдемелер системасы

8.1. Бир тектүү эмес үчүнчү тартиптеги сызыктуу теңдемелер системасы

Бизге үч белгисиздүү үчүнчү тартиптеги сызыктуу теңдемелер системасы берилсин дейлик:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases} \qquad (22)$$

Белгисиздердин коэффициенттеринен түзүлгөн үчүнчү тартиптеги аныктагычты

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

системанын аныктагычы дейбиз.

Төмөнкү кошумча аныктагычтарды түзөбүз

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Системанын биринчи теңдемесин a_{11} элементинин алгебралык тотуктоочусу A_{11}- ге, экинчи теңдемесин a_{21} элементинин алгебралык толуктоочусу A_{21} -ге, үчүнчүсүн a_{31} элементинин алгебралык толуктоочусу A_{31}- ге көбөйтүп кошобуз:

$$
\begin{aligned}
&(A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31})x + (A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32})y + \\
&+ (A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33})z = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3
\end{aligned} \tag{23}
$$

Мындан $A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} = \Delta;$

$$A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32} = 0;$$
$$A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33} = 0,$$

анткени

$$A_{11}a_{11} + A_{21}a_{21} + A_{31}a_{31} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta,$$

$$A_{11}a_{12} + A_{21}a_{22} + A_{31}a_{32} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{11}a_{13} + A_{21}a_{23} + A_{31}a_{33} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Анда (23) теңдемени төмөнкүдөй жазууга болот

$$\Delta \cdot x = A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3, \tag{24}$$

мында

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + A_{31}b_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_x .$$

Же болбосо $\Delta \cdot x = \Delta_x$. Ошондой эле системанын экинчи жана үчүнчү теңдемелерин $\Delta \cdot y = \Delta_y$; $\Delta \cdot z = \Delta_z$ түрдө жазууга болот.

Демек, эгерде (22) система чыгарылышка ээ болсо, анда чыгарылыш төмөнкү системаны канаатандырат

$$\begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta_x \\ \Delta \cdot y = \Delta_y \\ \Delta \cdot z = \Delta_z \end{cases} \qquad (25)$$

Эгерде системанын аныктагычы нөлгө барабар болбосо $\Delta \neq 0$, анда (25) система жалгыз чыгарылышка ээ болот, жана ал чыгарылыш төмөнкү формула менен табылат

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \qquad (26)$$

Муну далилдөө үчүн *x, y ,z* - тин маанисин системанын теңдемелерине коебуз

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = a_{11}\frac{\Delta_x}{\Delta} + a_{12}\frac{\Delta_y}{\Delta} + a_{13}\frac{\Delta_z}{\Delta} =$$

$$= \frac{1}{\Delta}[a_{11}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}) + a_{12}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}) +$$

$$+ a_{13}(b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33})] = \frac{1}{\Delta}[b_1(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) +$$

$$+ b_2(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}) + b_3(a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33})] = b_1.$$

(26) формула **Крамердин формуласы** деп аталат.

Мисал 13. Берилген теңдемелер системасын Крамердин формуласы боюнча чыгаргыла: $\begin{cases} 7x + 2y + 3z = 13 \\ 9x + 3y + 4z = 15 \\ 5x + y + 3z = 14 \end{cases}$

Системанын аныктагычтарын түзөбүз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \neq 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & 2 & 3 \\ 15 & 3 & 4 \\ 14 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 13 & 3 \\ 9 & 15 & 4 \\ 5 & 14 & 3 \end{vmatrix} = -15; \ \Delta_z = \begin{vmatrix} 7 & 2 & 13 \\ 9 & 3 & 15 \\ 5 & 1 & 14 \end{vmatrix} = 9.$$

Демек система жалгыз чыгарылышка ээ. Аны Крамердин формуласы менен табабыз

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -\frac{15}{3} = -5; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3.$$

Эгерде $\Delta = 0$ болсо, анда система чыгарылышка ээ болбойт, же болбосо чексиз көп чыгарылышка ээ болушу мүмкүн.

Төмөнкү учурларды карап көрөлү:

1) $\Delta = 0$ жана кошумча аныктагычтардын жок дегенде бири Δ_x, же Δ_y, же Δ_z нөлгө барабар эмес болсун (мисалы, $\Delta_z \neq 0$). Анда $\Delta \cdot z = \Delta_z$ канааттандырылбай калат. Демек (25) системасы чыгарылышка ээ болбойт. Бул учурда (22) системасынын чыгарылышы жок.

Мисал 14. $\begin{cases} x - y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + 4z = 3 \\ -x + y - z = 0 \end{cases}$

Система чыгарылышка ээ болбойт, анткени

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

2) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ болсун, анда система же болбосо чыгарылышка ээ болбойт, же болбосо чексиз чыгарылышка ээ болушу мүмкүн. Төмөнкү мисалдарды карап көрөлү.

Мисал 15. $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x - 2y + 2z = 4 \\ 3x - 3y + 3z = 1 \end{cases}$

Мында $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0;\quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0;$

$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0;\quad \Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$ бирок система чыгарылышка ээ болбойт, анткени системанын биринчи жана экинчи теңдемелерин кошсок

$$3x - 3y + 3z = 6$$

үчүнчү теңдемеге карама-каршы келип чыгат, демек системанын чыгарылышы жок.

Мисал 16. $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 2 \\ 4x + 4y - 4z = 4 \end{cases}$

Мында $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$, система чексиз чыгарылышка ээ, анткени системанын экинчи, үчүнчү теңдемелери биринчи теңдеменин натыйжасын берет. Ошондуктан бир теңдеме (үч белгисизи бар) чексиз чыгарылышка ээ

$$x + y - z = 1;\ \{x = t,\quad y = u,\quad z = t + u - 1\}.$$

8.2. Бир тектүү үчүнчү тартиптеги сызыктуу теңдемелер системасы

Эми тектүү үчүнчү тартиптеги сызыктуу теңдемелер системасына токтолобуз:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0 \end{cases} \qquad (27)$$

Бул система ар дайым нөлдүк чыгарылышка ээ болот $x = y = z = 0$.

Эгерде системанын аныктагычы $\Delta \neq 0$ болсо, анда нөлдүк чыгарылыш $x = y = z = 0$ системанын бирден бир чыгарылышы болот, анткени $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$.

Эми системанын аныктагычы $\Delta = 0$ болсун дейлик, бирок аныктагычтын жок дегенде бир минору нөлгө барабар эмес болсун, мисалы

$$M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Анда системанын биринчи эки теңдемесин карайбыз. §7 негизинде бул система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}y = -a_{13}z \\ a_{21}x_1 + a_{22}y = -a_{23}z \end{cases}$$

чексиз чыгарылышка ээ болот, чыгарылыштын жыйындысын төмөнкү түрдө жазууга болот

$$\left\{ x = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t, \quad y = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} (-t), \quad z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t \right\}, \tag{28}$$

мында t-ар кандай сан.

Системанын үчүнчү теңдемесине x, y, z маанисин коебуз:

$$a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t - a_{32} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \cdot t + a_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \cdot t = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \cdot t = 0.$$

Демек системанын үчүнчү теңдемеси биринчи жана экинчи теңдеменин натыйжасы болот, ошондуктан бул теңдеме x, y, z маанисин канааттандырат. Эгерде $\Delta = 0$ болсо жана аныктагычтын бардык минорлору нөлгө барабар болушса, анда системанын теңдемелеринин коэффициенттери бири бирине пропоциялаш болушат, ошондуктан (27) система үч белгисизи бар бир теңдемеге келтирилет:

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0$$

(системанын калган эки теңдемеси бул теңдеменин натыйжасы).

Эгерде системанын аныктагычы нөлгө барабар эмес болсо, анда система жалгыз нөлдүк чыгарылышка ээ болот. Эгерде $\Delta = 0$ болсо, анда система чексиз чыгарылышка ээ болот. Мындан төмөнкү натыйжа келип чыгат: *бир тектүү сызыктуу теңдемелердин системасы нөлгө барабар эмес чыгарылышка ээ болуш үчүн системанын аныктагычы $\Delta = 0$ болушу зарыл жана жетишерлик болот.*

Мисалдар.

1. $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$ система нөлдүк чыгарылышка ээ болот, анткени

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0.$$

2. $\begin{cases} 2x + y + 3z = 0 \\ 3x + 2y + 5z = 0 \\ 5x + 4y + 9z = 0 \end{cases}$ чексиз чыгарылышка ээ болот, анткени

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 \\ 5 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 0.$ Аныктагычтын минору $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$ демек системанын үчүнчү теңдемеси биринчи жана экинчи теңдеменин натыйжасы. Ошондуктан төмөнкү системаны чыгарабыз

$$\begin{cases} 2x + y = -3z \\ 3x + 2y = -5z \end{cases},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} -3z & 1 \\ -5z & 2 \end{vmatrix} = -z; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -3z \\ 3 & -5z \end{vmatrix} = -z;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = -z; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -z.$$

Демек системанын чыгарылышынын жыйындысы $\{x = -t; \quad y = -t; \quad z = t\}$, мында t-ар кандай сан.

3. $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 4z = 0 \\ 3x - 3y + 6z = 0 \end{cases}$ Система чексиз чыгарылышка ээ, анткени

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & -3 & 6 \end{vmatrix} = 0$, аныктагычтын бардык экинчи тартиптеги минорлору нөлгө барабар, ошондуктан система биринчи теңдемеге келтирилет

$x - y + 2z = 0.$ Системанын бардык чыгарылыштарынын жыйындысын төмөнкү түрдө жазабыз

$$\{x = t; y = u; z = \frac{1}{2}(u - t)\}\text{, мында } t, u \text{ ар кандай сандар.}$$

§9. Теңдемелер системасынын матрицалык формасы жана теңдемелер системасын матрицалык жол менен чыгаруу

Бизге үч белгисизүү үчүнчүтартиптеги сызыктуу теңдемелер системасы берилсин дейлик:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \qquad (29)$$

Төмөнкү белгилөөлөрдү киргисебиз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Анда $A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix}$

жана берилген (29) системаны төмөнкү түрдө жазууга болот

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

же кыскача

$$\boxed{A \cdot X = B} \qquad (30)$$

(30) барабардыгы ***матрицалык теңдеме*** деп аталат. Эгерде (29) системасы матрицалык формада (30) теңдемеси түрүндө жазылса

жана A матрицасы ***өзгөчөлөнбөгөн*** матрица болсо, анда теңдеме төмөнкү түрдө чыгарылат. (30) теңдеменин эки жагын A матрицасынын A^{-1} тескери матрицасына көбөйтөбүз:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Аныктама боюнча $A^{-1} \cdot A = E$ жана $E \cdot X = X$, анда матрицалык теңдеменин чыгарылышына ээ болобуз

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B} \qquad (31)$$

Мисал 17. Теңдемелер системасын матрицалык жол менен чыгаргыла

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23 \\ x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Чыгаруу. Системаны матрицалык формада төмөнкү түрдө жазабыз $A \cdot X = B$. Мында

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}10\\ 23\\ 13\end{pmatrix}.$$

Эми тескери матрицасын табуу үчүн $\Delta=\det A$ жана A_{ij} алгебралык толуктоочторду табалы:

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-9\neq 0,$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}3 & 1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-6;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-4;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}=2;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-4.$$

Мындан

$$A^{-1}=\frac{1}{(-9)}\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

болот. Эми (27) формула боюнча

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{(-9)} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(-9)} \begin{pmatrix} 3 \cdot 10 + (-4) \cdot 23 + 2 \cdot 13 \\ (-6) \cdot 10 + 2 \cdot 23 + (-1) \cdot 13 \\ 3 \cdot 10 + (-1) \cdot 23 + (-4) \cdot 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{(-9)} \begin{pmatrix} -36 \\ -27 \\ -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix},$$

б.а. берилген системанын чыгарылышы x_1=4; x_2=3; x_3=5 болот.

Матрицалык теңдемелердин негизги түрлөрү

1. $A \cdot X = B$. Бул жерде А матрицасы квадраттык матрица болушу керек, $\det A \neq 0$. Теңдеменин эки жагын A^{-1} матрицасына сол жагынан көбөйтөбүз: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$, $X = A^{-1} \cdot B$.

2. $X \cdot A = B$. Бул жерде А матрицасы квадраттык матрица болушу керек, $\det A \neq 0$. Теңдеменин эки жагын A^{-1} матрицасына оң жагынан көбөйтөбүз: $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$, $X \cdot E = B \cdot A^{-1}$, $X = B \cdot A^{-1}$.

3. $A \cdot X \cdot B = C$. Бул жерде А жана В матрицалары квадраттык болушу керек жана $\det A \neq 0$, $\det B \neq 0$. Теңдеменин эки жагын A^{-1} матрицасына сол жагынан көбөйтөбүз: $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1} \cdot C \quad \Rightarrow$

$X \cdot B = A^{-1} \cdot C$. Андан кийнин теңдеменин эки жагын B^{-1} матрицасына оң жагынан көбөйтөбүз: $X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$.

Мисал 18.Матрицалык теңдемени чыгаргыла

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Чыгаруу. Бул жерде $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$. $X = A^{-1} \cdot B$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-2)\cdot 3 + 1 \cdot 5 & (-2)\cdot 5 + 1 \cdot 9 \\ 1{,}5 \cdot 3 + (-0{,}5)\cdot 5 & 1{,}5 \cdot 5 + (-0{,}5) \cdot 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

§10. Гаусстун ыкмасы

Бизге теңдемелердин саны **m,** ал эми белгисиздердин саны **n** болгон (14) системасы берилсин.

Гаусстун ыкмасы- сызыктуу теңдемелер системасын чыгарууда белгисиздерди удаалаш жоюу ыкмасы деп аталат. Бул ыкмада элементардык өзгөртүүлөлдүн жардамы менен теңдемелердин системасы тең күчтүү (баскычтуу) (же үч бурчтуу) системага келтирилип, ал системанын акыркы (номерине карата) теңдемесинен биринчи теңдемени көздөй бардык белгисиздери удаалаш табылат.

Гаусстун өзгөртүүлөрүн (28) системанын теңдемелерине жүргүзбөстөн, ал системанын коэффициенттери менен бош мүчөлөрү аркылу түзүлгөн

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots. & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} & b_i \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

кеңейтилген матрицага жүргүзгөн ыңгайлуу болот.

Мисалдар.

1. Теңдемелер системасын Гаусстун ыкмасы менен чыгаргыла

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

Чыгаруу. Системанын коэффициенттеринен жана бош мүчөлөрүнөн турган кеңейтилген матрицасын түзөбүз:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Эми $\overline{A}$ матрицанын жолчолоруна төмөнкү элементардык өзгөртүүлөрдү жүргүзөбүз:

1. $\overline{A}$ матрицанын биринчи жолчосун кезеги менен (-2), (-3) сандарына көбөйтүп, алынган жолчолорду 2-чи, 3-чү жолчолоруна кошуп, акыркы эки жолчодон x_1 белгисизин жойобуз, б.а. төмөнкүнү алабыз:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & -5 & -13 & -18 \end{array}\right)$$

2. Акыркы матрицанын 2-чи жолчосун (-5) санына көбөйтүп жана анын элементтерин 3-чү жолчонун тиешелүү элементтерине кошуп, акыркы жолчодон x_2 белгисизин жойобуз, б.а.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & -5 & -13 & -18 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & 22 & 22 \end{array}\right)$$

Акыркы матрицага төмөнкү система туура келет:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ \quad -x_2 - 7x_3 = -8 \\ \qquad\quad 22x_3 = 22 \end{cases}$$

Бул системанын 3-теңдемесинен x_3=1 ди табабыз, 2- теңдемеден

$$x_2 = 8 - 7x_3 = 8 - 7 \cdot 1 = 1;$$

Биринчи теңдемеден $x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3 = 6 - 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 1$ болот. Демек (1;1;1) берилген системанын чыгарылышы болот.

2. Теңдемелер системасын Гаусстун ыкмасы менен чыгаргыла

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

Чыгаруу. Бул система үчүн

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

матрицасы кеңейтилген матрица болот.

1. Биринчи жолчо менен экинчи жолчонун ордун алмаштырабыз. Андан кийин $\overline{A}$ матрицанын биринчи жолчосун кезеги менен (-2), (-3) сандарына көбөйтүп, алынган жолчолорду 2-чи, 3-чү жолчолоруна кошуп, акыркы эки жолчодон x_1 белгисизин жойобуз, б.а.

$$\overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 2 & 6 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

2. Акыркы марицанын 3-жолчосунан 2-жолчонун тиешелүү элементтерин кемитип, акыркы жолчодон x_2 белгисизин жойобуз, б.а.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -1 & 3 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Акыркы матрицага төмөнкү система туура келет:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 1 \\ \quad 7x_2 - x_3 = 2 \\ \qquad 0 \cdot x_3 = 1 \end{cases}$$

Системанын үчүнчү теңдемеси карама каршы келип чыкты (0=1), демек берилген система биргелешпеген.

3. Теңдемелер системасын Гаусстун ыкмасы менен чыгаргыла

$$\begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ 2x - 3y + z = 3, \\ 4x - y - z = 17 \end{cases}$$

Чыгаруу. Бул ситема үчүн

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & -1 & 17 \end{array}\right)$$

матрицасы кеңейтилген матрица болот.

1. $\overline{A}$ матрицанын биринчи жолчосун кезеги менен (-2), (-4) сандарына көбөйтүп, алынган жолчолорду 2-чи, 3-чү жолчолоруна кошуп, акыркы эки жолчодон x_1 белгисизин жойобуз, б.а.

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 7\\ 2 & -3 & 1 & 3\\ 4 & -1 & -1 & 17\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 7\\ 0 & -7 & 3 & -11\\ 0 & -7 & 3 & -11\end{array}\right)$$

Акыркы марицанын 3-жолчосунан 2-жолчонун тиешелүү элементтерин кемитип, акыркы жолчодон x_2 белгисизин жойобуз, б.а.

$$\overline{A}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 7\\ 0 & -7 & 3 & -11\\ 0 & -7 & 3 & -11\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 7\\ 0 & -7 & 3 & -11\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & -1 & 7\\ 0 & -7 & 3 & -11\end{array}\right)$$

Мында нөлдүк 3-жолчону алып салдык. Акыркы матрицага төмөнкү система туура келет:

$$\begin{cases} x+2y-z=7\\ -7y+3z=-11\end{cases}$$

Акыркы система баскычтуу система. Демек, системанын экинчи теңдемесинен y белгисизин аныктап, андан кийин системанын биринчи теңдемесине y-тин маанисин коюп, x-белгисизин аныктайбыз (бул жерде z-эркин өзгөрмө болот):

$$y=\frac{-11-3z}{-7}=\frac{3}{7}z+\frac{11}{7},$$

$$x = 7 - 2y + z = 7 - \frac{6}{7}z - \frac{22}{7} + z = \frac{1}{7}z + \frac{27}{7}.$$

Жообу: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{7}z + \dfrac{27}{7}, \\ y = \dfrac{3}{7}z + \dfrac{11}{7}, \end{cases}$

z-каалагандай сан.

§11. Өз алдынча иштөө үчүн көнүгүүлөр.

Вариант 1

1. A жана B матрицаларынын $A\ B$; көбөйтүндүүсүн эсептегиле, мында

$$A=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\-2 & 1 & 3\end{pmatrix},$$

2. Төмөнкү аныктагычты экинчи жолчо боюнча ажыратып, эсептегиле

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 5\\0 & 2 & 1\\4 & 1 & 2\end{vmatrix}$$

4. Матрицалык теңдемени чыгаргыла

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix}3 & 5\\5 & 9\end{pmatrix}$$

4-5. Теңдемелер системасын Крамердин жана Гаусстун эрежелери боюнча чыгаргыла

$$\begin{cases} 2x + z = 6, \\ 2y - z = 2, \\ 3x - 4y = -2. \end{cases}$$

❖ Төмөнкү бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

Вариант 2

1. *A* жана *B* матрицаларынын *AB* көбөйтүндүүсүн эсептегиле, мында

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Төмөнкү аныктагычты биринчи жолчо боюнча ажыратып, эсептегиле

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$$

3. Төмөнкү матрицанын тескери матрицасын тапкыла

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4-5.Теңдемелер системасын Крамердин жана Гаусстун эрежелери боюнча чыгаргыла

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = -7, \\ x + y + z = -4, \\ 5x + 3y - 4z = 11. \end{cases}$$

6.Төмөнкү бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + 2y + z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0. \end{cases}$$

Вариант 3

1. *A* жана *B* матрицаларынын *AB* көбөйтүндүүсүн эсептегиле, мында

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},$$

2. Төмөнкү теңдемени чыгаргыла $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix}=0$

3. Төмөнкү матрицалык теңдемени чыгаргыла $X\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

4-5. Теңдемелер системасын Крамердин жана Гаусстун эрежелери боюнча чыгаргыла

$$\begin{cases} x+3y-3z=13, \\ 2x-3y+3z=-10, \\ x+z=0. \end{cases}$$

6.Төмөнкү бир тектүү теңдемелер системасынын чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1-x_2-3x_3=0 \end{cases}$$

Вариант 4

1. Эгерде A $=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, B$=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ болсо, анда $(A + B)^2$ тапкыла

2. Төмөнкү аныктагычты 1) үчүнчү мамыча боюнча ажыратып, эсептегиле; 2) үч бурчтуктар эрежеси боюнча эсептегиле

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

3. Төмөнкү матрицанын тескери матрицасын тапкыла

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4-5. Теңдемелер системасын Крамердин жана Гаусстун эрежелери боюнча чыгаргыла

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=-4, \\ 3x+2y+5z=22, \\ x-3y+z=2. \end{cases}$$

6.Төмөнкү бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} x - y - z = 0, \\ x + 4y + 2z = 0, \\ 3x + 7y + 3z = 0. \end{cases}$$

Вариант 5

1. A жана B матрицаларынын AB көбөйтүндүүсүн эсептегиле, мында

$$A = (1 \quad 5 \quad 6), \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Төмөнкү аныктагычты 1) биринчи мамыча боюнча ажыратып, эсептегиле; 2) үч бурчтуктар эрежеси боюнча эсептегиле

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}$$

3. Төмөнкү матрицанын тескери матрицасын тапкыла

$$D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix};$$

4-5. Теңдемелер системасын Крамердин жана Гаусстун эрежелери боюнча чыгаргыла

$$\begin{cases} 2x - y + z = -4, \\ 3x + y - z = -1, \\ 4x - 2y + 3z = -7. \end{cases}$$

6. Төмөнкү бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0, \\ 2x - y - 3z = 0. \end{cases}$$

Вариант 6

1. A жана B матрицаларынын AB көбөйтүндүүсүн эсептегиле, мында

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Төмөнкү теңдемени чыгаргыла

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

3. Төмөнкү матрицанын тескери матрицасын тапкыла

$$D=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 9 \\ 7 & 3 & -6 \\ 7 & 9 & -9 \end{pmatrix};$$

4-5. Теңдемелер системасын Крамердин жана Гаусстун эрежелери боюнча чыгаргыла

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = -7, \\ x + y + z = -4, \\ 5x + 3y - 4z = 11. \end{cases}$$

6.Төмөнкү бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0; \\ -4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 0; \\ -2x_1 + 9x_2 + 12x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 7

1. A жана B матрицаларынын AB көбөйтүндүүсүн эсептегиле, мында

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ -2 & 1 & 3\end{pmatrix},\quad В=\begin{pmatrix}3 & 7\\ 2 & 4\\ 0 & 5\end{pmatrix}$$

2. Төмөнкү теңдемени чыгаргыла

$$\begin{vmatrix}4\sin x & 1\\ x & \cos x\end{vmatrix}=0$$

3. Төмөнкү матрицалык теңдемени чыгаргыла

$$X\cdot\begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 5 & 0\end{pmatrix}$$

4-5. Теңдемелер системасын Крамердин жана Гаусстун эрежелери боюнча чыгаргыла

$$\begin{cases}3x+2y+z=5,\\ 2x+3y+z=1,\\ 2x+y+3z=11.\end{cases}$$

6. Төмөнкү бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 8

1. Матрицаларынын көбөйтүндүүсүн эсептегиле

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Төмөнкү аныктагычты 1) биринчи мамыча боюнча ажыратып, эсептегиле; 2) үч бурчтуктар эрежеси боюнча эсептегиле

$$\begin{vmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 8 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

3. Төмөнкү матрицалык теңдемени чыгаргыла

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

4-5. Теңдемелер системасын Крамердин жана Гаусстун эрежелери боюнча чыгаргыла

$$\begin{cases} 2x + y - z = 11, \\ 3x + 2y - 4z = 15, \\ 4x + 3y - 7z = 19. \end{cases}$$

6. Төмөнкү бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 0; \\ 6x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Вариант 9

1. ***C*** жана *N* матрицаларынын көбөйтүндүүсүн эсептегиле, мында

$$C = (1 \quad 5 \quad 6),\ N=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

2. Төмөнкү барабарсыздыкты чыгаргыла

$$\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$$

3. Элементардык өзгөрүү ыкмасын колдонуп, төмөнкү матрицанын рангын тапкыла

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 17 & 4 \end{pmatrix}$$

4-5. Теңдемелер системасын Крамердин жана Гаусстун эрежелери боюнча чыгаргыла

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=4, \\ 4x+6y-10z=8, \\ 8x+12y-20z=16. \end{cases}$$

6. Төмөнкү бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ 8x+3y-6z=0, \\ 4x-y+3z=0. \end{cases}$$

Вариант 10

1. Матрицаларынын көбөйтүндүүсүн эсептегиле

$$\begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Төмөнкү теңдемени чыгаргыла

$$\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$$

3. Төмөнкү матрицалык теңдемени чыгаргыла

$$\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4-5. Теңдемелер системасын Крамердин жана Гаусстун эрежелери боюнча чыгаргыла

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -11, \\ x_1 + 3x_2 = 6, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

6. Төмөнкү бир тектүү теңдемелер системасынын жалпы чыгарылышын тапкыла

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0, \\ 4x - 3y + 3z = 0, \\ \quad x + 3y = 0. \end{cases}$$

Адабияттар

1. В.А. Малугин. Математика для экономистов: Линейнная алгебра. Курс лекций-М.:Эксмо, 2006.-224с.
2. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: задачи и решения: учебное пособие.-М.:БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008.-192с.
3. А.Б. Соболев, А.Ф.Рыбалко. Математика:учебное пособие-Екатеринбург:ГОУ ВПО УГТУ-УПИ,2004.-180с.
4. Л.Г. Лелевкина. Основы линейной и векторной алгебры. Задачи и упражнения для компьютерного тестирования/КРСУ: Бишкек,2001.-80с.