Министерство образования и науки Кыргызской республики
ГОУВПО Кыргызско-Российский славянский университет

Кафедра «Высшая математика»

Л.Г. Лелевкина, А.К. Курманбаева

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Учебно-методическое пособие
для компьютерного тестирования по разделу «Векторная алгебра»
курса высшей математики

Бишкек 2009

Л.Г. Лелевкина, А.К. Курманбаева

Векторная алгебра. Учебно-методическое пособие для компьютерного тестирования / Кыргызско - российский славянский университет. Кафедра высшей математики.-Бишкек: Изд-во КРСУ, 2009.-55с.

Данное учебно-методическое пособие заложено в основу контрольно-обучающей программы компьютерного индивидуального тестирования по разделу «Векторная алгебра». Кратко изложены теоретические основы векторной алгебры, приведены многочисленные примеры задач с методическими рекомендациями по их решению.

Для компьютерного тестирования предложены 10 вариантов по 10 заданий в каждом с вариантами ответов и указаний к каждому заданию по их выполнению.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов естественно-технического, экономического и архитектурно-строительного факультетов дневной и заочной формы обучения, а также может быть использовано студентами других факультетов.

Рецензенты: д.ф.-м.н, профессор А.С. Саадабаев;
ст. преподаватель кафедры высшей математики И.Ю. Чикалев.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ…………………………………………………………………………4
§1. ВЕКТОРЫ И ОСНОВНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1. Понятие вектора и виды векторов……………………………………..4
1.2. Линейные операции над векторами…………………………………...6

§2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ.БАЗИСЫ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ. ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ
2.1. Линейная зависимость и независимость векторов ………………….8
2.2. Базис и координаты ……………….. ………………………………10
2.3. Прямоугольная декартова система координат……………………11

§3. ПРОЕКЦИЯ ВЕКТОРА НА ОСЬ. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА. КОМПОНЕНТЫ ВЕКТОРА
3.1. Проекция вектора на ось ……………………………………………..13
3.2. Компоненты вектора по координатным осям и координаты точки …...14

§4. СВОЙСТВА ПРОЕКЦИИ ВЕКТОРА НА ОСЬ. ДЕЙСТВИЯ НАД ВЕКТОРАМИ, ЗАДАННЫМИ ПРОЕКЦИЯМИ
4.1. Свойства проекции вектора на ось ………………………………15
4.2. Действия над векторами, заданными проекциями ………………....19

§5. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА
5.1. Определение скалярного произведения ………………………….20
5.2. Необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов ..21
5.3. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами 22
5.4. Угол между двумя векторами ………………………………………22

§6. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ЕГО СВОЙСТВА
6.1. Определение векторного произведения ………………………….24
6.2. Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух ненулевых векторов………………………………………………..25
6.3. Векторное произведение векторов, заданных своими координатами…..25

§7. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ТРЕХ ВЕКТОРОВ
7.1. Определение смешанного произведения……………………………....28
7.2. Свойства смешанного произведения………………………………...30

§8 ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРНОГО ТЕСТИРОВАНИЯ …… …….33
ПРИЛОЖЕНИЕ …………………………………………………………..53
ЛИТЕРАТУРА…………………………………………………….......55

Введение

При изучении различных разделов физики, механики и технических наук нам встречаются величины двух видов. Один из них полностью определяется заданием их численных значений. Такие величины называются ***скалярными***. Например, скалярными величинами являются длина, площадь, объем, масса, плотность, температура тела и другие.

Для определения других величин, кроме численного значения необходимо знать также их направление. Такие величины называются ***векторными.*** Примерами векторных величин могут служить сила, скорость и ускорение движущегося тела.

Необходимость применения векторного исчисления при изложении технических дисциплин вызвана не столько удобством и наглядностью математических формулировок законов, сколько объективными свойствами изучаемых явлений. Направленные величины используются при описании широкого круга явлений, относящихся к теоретической механике, механике жидкости и газа, теории электромагнетизма.

§ 1. Векторы и основные линейные операции над ними

1. 1. Понятие вектора и виды векторов

В отличие от скалярной величины, которую можно задать одним числом и отложить на некоторой шкале (отсюда и название – «скалярная») - векторную величину, или просто вектор, можно задать с помощью числа и некоторого направления.

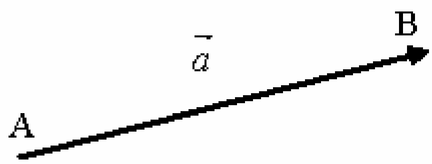


рис. 1

Вектором называется направленный отрезок (отрезок, у которого одна граничная точка считается начальной, другая - конечной). (рис. 1).

На чертеже вектор обозначается стрелкой; над буквенным обозначением вектора также ставится стрелка $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Длиной вектора (**модулем**) называется расстояние между началом и концом вектора. Обозначение: $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ или $\left|\vec{a}\right|$.

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают: $\vec{0}, \left|\vec{0}\right| = 0.$ Направление нулевого вектора не определено.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными.**

Нулевой вектор коллинеарен любому вектору.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным вектором**: $\vec{e}$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют **равными,** если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и направление.

Три вектора называются **компланарными,** если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Если тройка векторов содержит нулевой вектор или пару коллинеарных векторов, то эти векторы компланарны.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, называют **противоположными**, если их длины равны, а направления противоположны.

Пример 1. Построим квадрат, сторона которого равна 1 (рис. 2). И на нем отметим векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

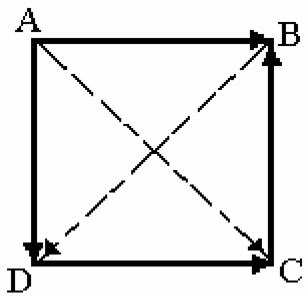


рис. 2

Очевидно $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ (равны), $\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{CB}$ (противоположны), векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ не равны, хотя имеют равные модули $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$. Из определения равенства векторов следует, что вектор $\vec{a}$ не изменится, если его перенести параллельно самому себе в любую точку пространства. Такие векторы называют **свободными**.

1.2. Линейные операции над векторами.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, расположенных так, что начало вектора $\vec{b}$ совпадает с концом вектора $\vec{a}$, называется вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец – с концом вектора $\vec{b}$. (правило треугольника – рис. 3, а).

При этом пишут: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Аналогично определяется сумма *n* векторов

$$\overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} + \ldots + \overrightarrow{a_n} = \vec{c}.$$

А именно: **суммой** называют вектор $\vec{c}$, проведённый из начала первого в конец последнего вектора, при условии, что начало вектора $\overrightarrow{a_4}$ совпадает с концом вектора $\overrightarrow{a_1}$, начало вектора $\overrightarrow{a_3}$ совпадает с концом вектора $\overrightarrow{a_2}$ и т.д. (правило многоугольника – рис. 3, б).

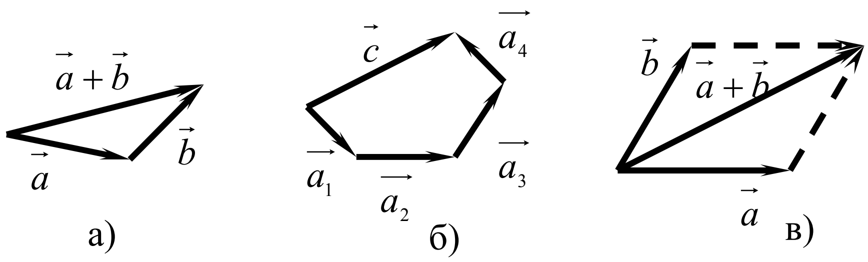


Рис. 3

Замечание. Если на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ построить параллелограмм, поместив их начало в общую точку, то сумма $\vec{a} + \vec{b}$ будет лежать на диагонали параллелограмма, выходящего из общего начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (правило параллелограмма – рис. 3, в).

Свойства операции сложения векторов:

1^0. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ - перестановочное, или коммутативное

2^0. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ - сочетательное, или ассоциативное.

3^0. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ - поглощение нулевого вектора.

4^0. Для всякого ненулевого вектора $\vec{a}$ существует противоположный вектор $-\vec{a}$, такой, что $\vec{a}$+(-$\vec{a}$)=$\vec{0}$.

Вектор $\vec{c}$ называется **разностью** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, если $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$. Отсюда следует, что $\vec{c}=\vec{a}+(\overrightarrow{-b})$ т.е. вычитание векторов сведено к сложению (рис. 4а). Нетрудно заметить, что разность векторов лежит на второй диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, проведённой из конца вектора -$\vec{b}$, в конец вектора $\vec{a}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют общее начало, то вектор $\vec{a}-\vec{b}$ соединяет концы данных векторов и направлен от конца вычитаемого вектора в конец уменьшаемого вектора (рис. 4б).

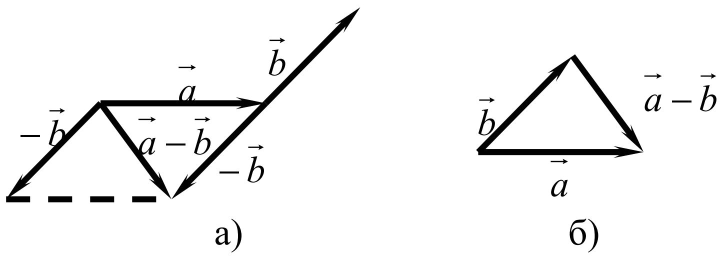
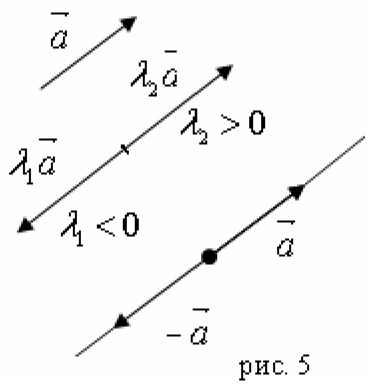


Рис. 4

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется такой вектор $\vec{c}$, что $|\vec{c}|=|\lambda|\cdot\vec{a}$, а направление его совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если λ>0, и ему противоположно, если λ<0; если $\vec{a}$ =0 или $\lambda=0$, то $\lambda\vec{a}=0$.



Ясно, что векторы $\vec{a}$ и $\lambda\vec{a}$ (если $\lambda\neq0$) можно поместить на одной прямой (рис. 5). Вектор $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$, очевидно, является противоположным вектору $\vec{a}$.

Если задан некоторый вектор $\vec{a}$ ($\vec{a}\neq0$), то всегда можно подобрать множитель λ, такой, чтобы после умножения на него длина вектора $\lambda\vec{a}$ была бы равна единице. Очевидно, что в качестве такого числа нужно взять $\lambda = \frac{1}{|\vec{a}|}$. Тогда $\overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$, и при этом $\overrightarrow{a^0}$ называется единичным вектором, соответствующим вектору $\vec{a}$, или **ортом** вектора $\vec{a}$. Очевидно, что направление единичного вектора всегда совпадает с направлением вектора $\vec{a}$. Ясно также, что $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \overrightarrow{a^0}$.

Точно так же единичный вектор $\overrightarrow{l^0}$, направление которого совпадает с направлением оси l, называется ортом оси l, или её единичным вектором.

Свойства операции умножения вектора на число:

1^0. $\lambda\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$ - распределительное свойство относительно суммы векторов.

2^0. $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$ - распределительное свойство относительно суммы чисел.

3^0. $\lambda\left(\mu\vec{a}\right) = (\lambda\mu)\vec{a}$ - сочетательное свойство числовых сомножителей.

Пример 2. Вычислить $|a+b|$, если $|a| = 5,\quad |b| = 7$, $|a-b| = 10$.

Известно, что в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одна диагональ является суммой, а другая разностью двух векторов. По свойству параллелограмма имеем:

$$2(|a|^2 + |b|^2) = |a-b|^2 + |a+b|^2 \Rightarrow |a-b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2) - |a+b|^2 \Rightarrow$$
$$|a-b| = \sqrt{2(|a|^2 + |b|^2 - |a+b|^2} = \sqrt{2(5^2 + 7^2) - 10^2} = \sqrt{2((25+49) - 100} = \sqrt{148 - 100} = \sqrt{48}.$$

§2. Линейная зависимость векторов. Базисы на плоскости и в пространстве. Прямоугольная декартова система координат

2.1. Линейная зависимость и независимость векторов

Пусть имеется n векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ и n постоянных коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{\mathbf{n}}$. Выражение

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1} + \alpha_2\overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n\overrightarrow{a_n}$$

называется **линейной комбинацией** векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$.

Система векторов $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ называются **линейно зависимой**, если существуют действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{\mathbf{n}}$, такие, что хотя бы одно из них отлично от нуля, и выполняется равенство:

$$\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \alpha_n \overrightarrow{a_n} = 0 \qquad (1)$$

В противном случае, т.е. если линейная комбинация (1) обращается в ноль только при всех $\alpha_i = 0, \quad i = 1,2,...,n$, то система векторов называется **линейно независимой.**

Если векторы линейно зависимы, то любой вектор может быть выражен в виде линейной комбинации остальных. Например, если $\alpha_n \neq 0,$ то из (1) следует, что $\overrightarrow{a_n} = \beta_1 \overrightarrow{a_1} + \beta_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \beta_{n-1} \vec{a}_{n-1}$, где $\beta_1 = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_{\mathbf{n}}}, \cdots, \beta_{\mathbf{n}-1} = -\dfrac{\alpha_{\mathbf{n}-1}}{\alpha_{\mathbf{n}}}$.

Пример 1. Доказать, что коллинеарные векторы линейно зависимы. Действительно, поместим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на одной прямой (рис. 6), тогда можно найти такое λ, при котором $\vec{a} = \lambda \vec{b} \Rightarrow 1 \cdot \vec{a} + (-\lambda) \cdot \vec{b} = 0$, а это и означает, что $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы.

Пример 2. Доказать, что любые три вектора $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ лежащие в плоскости, линейно зависимы.

Действительно, поместим начало всех трёх векторов в общую точку (рис.7). Очевидно, тогда можно подобрать единственную пару чисел λ_1 и λ_2, так что будет $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$, а что и означает, что векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ линейно зависимы.

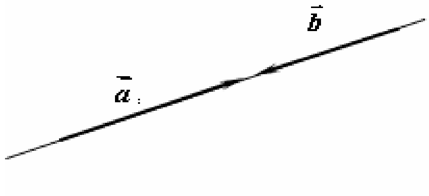


Рис. 6

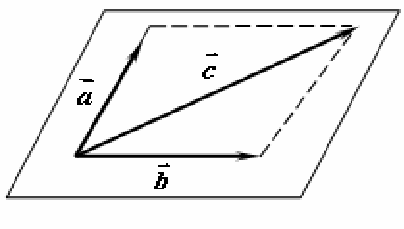


Рис. 7

Итак, мы показали, что компланарные векторы линейно зависимы.

Пример 3. Любые четыре вектора в пространстве линейно зависимы.

Действительно, можно подобрать, причём единственным образом, такие числа λ_1, λ_2, λ_3, что будет $\vec{d} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b} + \lambda_3\vec{c}$ (рис. 8).

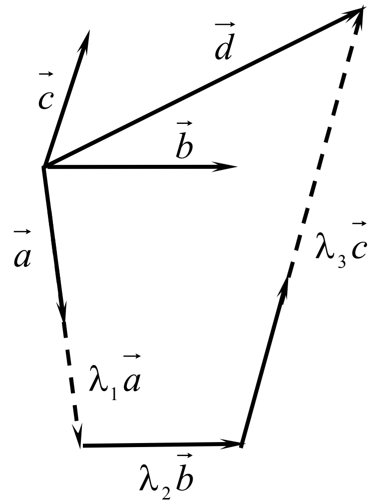


Рис. 8

2.2. Базис и координаты

Совокупность любых двух линейно независимых векторов, принадлежащих данной плоскости, называется **базисом на этой плоскости**. Если $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ - базис на плоскости, то для любого вектора $\vec{a}$, лежащего в этой плоскости, можно найти единственным образом такие числа x_1 и x_2, что будет $\vec{a} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$. Числа x_1 и x_2 называются **координатами** вектора $\vec{a}$ в данном базисе.

Совокупность любых трёх линейно независимых векторов $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ в пространстве называется **базисом в пространстве**. Если $\vec{a}$ - произвольный вектор, то всегда можно найти единственным образом числа x_1, x_2, x_3 такие, что будет иметь место представление: $\vec{a} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$. Коэффициенты x_1, x_2, x_3 в разложении данного вектора по базису называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

Теорема. Тройка векторов $\vec{\mathbf{e_1}} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{\mathbf{e}}_2 = \{x_2; y_2; z_2\}$, $\vec{\mathbf{e}}_3 = \{x_3; y_3; z_3\}$ образует базис в том и только в том случае, если

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример. Доказать, что векторы $\vec{\mathbf{e}}_1 = \{-2; 1; 3\}$, $\vec{\mathbf{e}}_2 = \{1; 2; -1\}$, $\vec{\mathbf{e}}_3 = \{4; 0; 1\}$ образуют базис. Найти разложение вектора $\vec{a} = \{1;4;6\}$ в этом базисе.

Решение. Имеем

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 0 - 24 - 0 - 1 = -33 \neq 0.$$

Следовательно, векторы $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ образуют базис. Координаты *x, y, z* вектора $\vec{a} = \{1;4;6\}$ в этом базисе должны удовлетворять равенству $x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = \vec{a}$, или в матричной записи

$$x\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2x + y + 4z = 1, \\ x + 2y = 4, \\ 3x - y + z = 6. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём $x = 2$, $y = 1$, $z = 1$.

Таким образом, $\vec{a} = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$.

2.3. Прямоугольная декартова система координат

Из всех возможных базисов $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ в пространстве выберем такой, чтобы все векторы, входящие в этот базис, были попарно ортогональны (т.е.

$\left(\overrightarrow{e_1}, \wedge \overrightarrow{e_2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$, $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = 1, 2, 3))$, далее разделим каждый вектор базиса на его длину.

Получим базис $\overrightarrow{e_1^0}, \overrightarrow{e_2^0}, \overrightarrow{e_3^0}$. Такой базис называется **ортонормированным.**

Тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ называется **правой**, если при наблюдении с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ происходит против движения часовой стрелки.

Ограничимся выбором правой тройки базисных векторов $\overrightarrow{e_1^0}, \overrightarrow{e_2^0}, \overrightarrow{e_3^0}$. Поместим далее начало векторов, входящих в выбранной базис, в общую точку 0 и из этой точки проведём оси *Ox***,** *Oy, Oz,* направления которых совпадают с направлениями векторов $\overrightarrow{e_1^0}, \overrightarrow{e_2^0}, \overrightarrow{e_3^0}$.

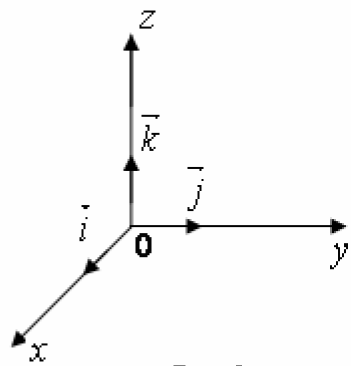


Рис. 9

Получим так называемую пространственную **прямоугольную правую декартову систему координат** *Oxyz*. Причём принято орты обозначать так: $\overrightarrow{e_1^0} = \vec{i}$, $\overrightarrow{e_2^0} = \vec{j}$, $\overrightarrow{e_3^0} = \vec{k}$ (рис. 9). Ось *Ox* называется **осью абсцисс**, ось *Oy* – **осью ординат**, ось *Oz* – **осью аппликат**.

Если $\overrightarrow{e_3^0} = 0$, получим прямоугольную правую систему декартовых координат на плоскости – систему *Oxy*.

§3. Проекция вектора на ось. Координаты вектора. Компоненты вектора.

3.1. Проекция вектора на ось.

Пусть вектор $\overrightarrow{AB}$ лежит на некоторой оси l. Направление орта $\vec{l}^0$ соответствует направлению оси (Рис. 10)

Рис. 10

Проекцией вектора, лежащего на оси, на эту ось называется число, по абсолютной величине равное длине вектора и взятое со знаком плюс, если направление вектора совпадает с направлением оси и со знаком минус, если они противоположны.

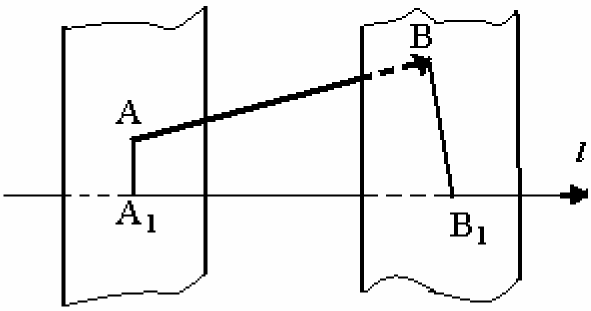


рис.11

Пусть вектор $\overrightarrow{AB}$ не лежит на оси l. Через A и B проведем плоскости, перпендикулярные оси l и обозначим через A_1 и B_1 точки пересечения этих плоскостей с осью l. (Рис. 11).

Проекцией вектора, не лежащего на оси l, на эту ось называется положительное число $\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-\left|\overrightarrow{A_1B_1}\right|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены (рис. 11).Если точки A_1 и B_1 совпадают ($\overrightarrow{A_1B_1}$ =0), то проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ равна нулю. Проекция вектора на ось обычно обозначается так: $np_l\overrightarrow{AB}$. Очевидно, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ лежит на оси l, то можно написать: $\overrightarrow{A_1B_1}=(np_l\overrightarrow{AB})\cdot\vec{l}^0$

Замечание. Отметим, что проекция вектора $\vec{a}$ на ось l является также координатой вектора $\vec{a}$ по этой оси l .

3.2. Компоненты вектора по координатным осям и координаты точки.

Поместим начало вектора $\vec{a}$ в начало декартовой системы координат $Oxyz$ (его конец – точка A). Спроектируем точку A на координатные оси. Получим соответственно три точки A_1, A_2, A_3 (рис. 12).

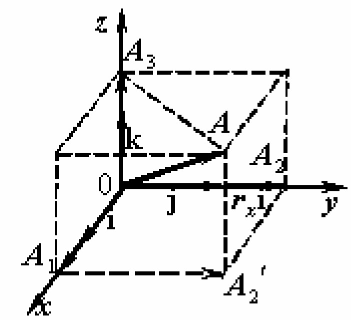


рис. 12

Как было отмечено, векторы $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_3}$, лежащие на координатных осях Ox. Oy и Oz , являются компонентами вектора $\vec{a}$ по координатным осям. Обозначим через a_x, a_y, a_z - проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси. Ясно, что $\overrightarrow{OA_1} = a_x i,\ \overrightarrow{OA_2} = a_y j,\ \overrightarrow{OA_3} = a_z k$, т.к.

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1A_2'} + \overrightarrow{A_2'A} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3},$$

то

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \qquad (2)$$

Такое представление вектора $\vec{a}$ называется разложением его на **компоненты**, или **составляющие** по координатным осям. Числа a_x, a_y, a_z называются **координатами** вектора $\vec{a}$**.** Векторное равенство (2) записывают в символическом виде: $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$. Нетрудно заметить, что вектор $\vec{a}$ лежит на диагонали параллелепипеда, следовательно, можно найти его длину, т.е.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}, \qquad (3)$$

т.е. модуль вектора равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.

Рассмотрим теперь некоторую точку M в пространстве. Вектор $r = \overrightarrow{OM}$ называется радиус-вектором точки M (рис 13). Проекции r_x, r_y, r_z радиус-вектора точки M на координатные оси называются координатами

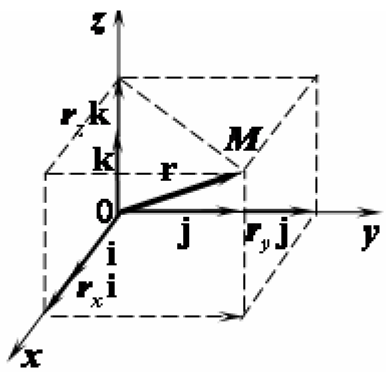


рис 13

точки M в данной системе координат, и при этом их обозначают просто x,y и z, т.е. точка M имеет координаты x,y и z записывают так: $M(x,y,z)$.

§ 4 Свойства проекции вектора на ось. Действия над векторами, заданными проекциями.

4.1. Свойства проекции вектора на ось

Углом между вектором $\vec{a}$ и осью l называется наименьший угол между направлением вектора $\vec{a}$ и положительным направлением оси l, обозначается $\theta = (\vec{a} \wedge l)$.

1^0. Проекция вектора на ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью, т.е.

$$np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos\theta$$

Доказательство. Пусть угол θ острый, тогда $\boldsymbol{np_l \vec{a} = +|\vec{a}_1| = |\vec{a}| \cdot \cos\theta}$. Если же θ тупой $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, то $np_l \vec{a} = -|\vec{a}_1| = -|\vec{a}| \cdot \cos(\pi - \theta) = |\vec{a}| \cdot \cos\theta.$ (рис. 14). Если $\theta = \frac{\pi}{2}$, то $np_l \vec{a} = 0$.

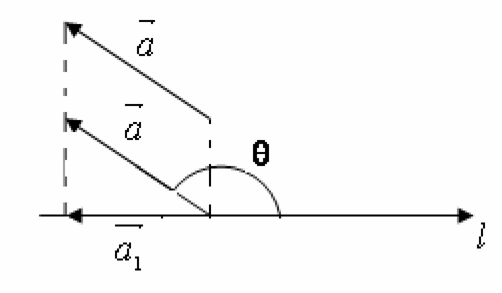


рис.14

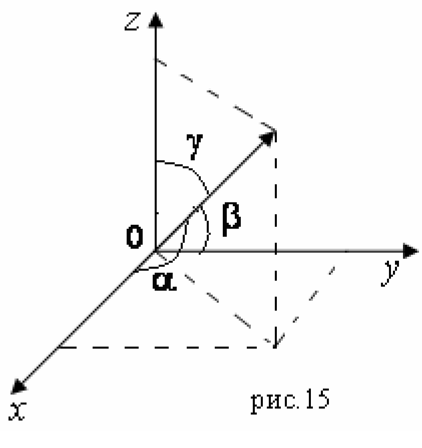


рис.15

Замечание (о направляющих косинусах вектора).

Косинусы углов α, β и γ, которые вектор $\vec{a}$ образует с координатными осями *Ox, Oy* и *Oz*, называются **направляющими косинусами вектора** $\vec{a}$ (Рис.15). Если a_x, a_y, a_z проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси, то ясно, что имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}_x &= |\mathbf{a}|\cdot\mathbf{cos}\,\alpha \\ \boldsymbol{a}_y &= |\mathbf{a}|\cdot\mathbf{cos}\,\beta \\ \boldsymbol{a}_z &= |\mathbf{a}|\cdot\mathbf{cos}\,\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \mathbf{cos}\,\alpha &= \frac{\boldsymbol{a}_x}{|\mathbf{a}|} \\ \mathbf{cos}\,\beta &= \frac{\boldsymbol{a}_y}{|\mathbf{a}|} \\ \mathbf{cos}\,\gamma &= \frac{\boldsymbol{a}_z}{|\mathbf{a}|} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \mathbf{cos}^2\,\alpha + \mathbf{cos}^2\,\beta + \mathbf{cos}^2\,\gamma = 1 \qquad (4)$$

2⁰. Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на эту же ось, т.е.

$$np_l(\vec{a}+\vec{b}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}.$$

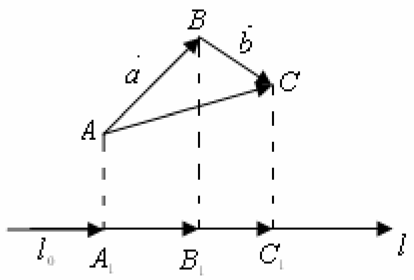


Рис. 16

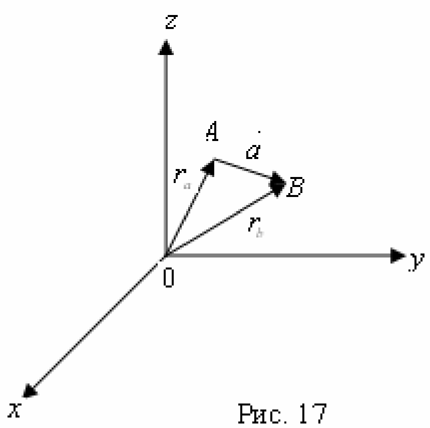


Рис. 17

Доказательство.

$$\overrightarrow{A_1B_1} = \left(np_l\overrightarrow{AB}\right)\cdot l^0; \quad \overrightarrow{B_1C_1} = \left(np_l\overrightarrow{BC}\right)\cdot l^0; \quad A_1C_1 = \left(np_l\overrightarrow{AC}\right)\cdot l^0. \qquad (5)$$

С другой стороны (Рис.16),

$$A_1C_1 = \left(np_l\vec{a}\right)\cdot l_0 + \left(np_l\vec{b}\right)\cdot l_0 = \left(np_l\vec{a} + np_l\vec{b}\right)\cdot l^0. \qquad (6)$$

Сравнивая правые части равенств (5) и (6), получаем $np_l(\vec{a}+\vec{b}) = np_l\vec{a} + np_l\vec{b}$.

Пример 1. Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если известны координаты его начала $A(x_A, y_A, z_A)$ и конца $B(x_B, y_B, z_B)$ - (рис . 17).

Решение. Проведём радиус-векторы точек A и B: r_A и r_B.

Ясно, что $r_A = x_A i + y_A j + z_A k; \quad r_B = x_B i + y_B j + z_B k$;

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r_A} - \overrightarrow{r_B} = (x_B - x_A)i + (y_B - y_A)j + (z_B - z_A)k. \qquad (7)$$

Итак, чтобы найти координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть соответственно координаты начала.

Мы получили ранее, что если $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, то $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^{\ 2} + a_y^{\ 2} + a_z^{\ 2}}$.

Следовательно,

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}. \qquad (8)$$

Заметим, что по этой формуле удобно вычислять расстояние между двумя точками, если известны их координаты.

3^0. При умножении вектора $\vec{a}$ на число λ его проекция на ось также умножается на это число, т.е.

$$пр_l(\lambda\vec{a}) = \lambda\, пр_l\vec{a}$$

(Без доказательства).

4^0. Для того, чтобы два вектора были равны, необходимо и достаточно, чтобы их проекции на любую ось были равны.

(Доказать самостоятельно).

Пример 2. Даны точки A(1,-1,2) и B(3,2,3) (рис. 18)

Найти: 1. Координаты вектора $\overrightarrow{AB}$;

2. Длину вектора $\overrightarrow{AB}$;

3. Разложение вектора $\overrightarrow{AB}$ на составляющие;

4.Направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$;

5. Единичный вектор (орт), соответствующий вектору $\overrightarrow{AB}$.

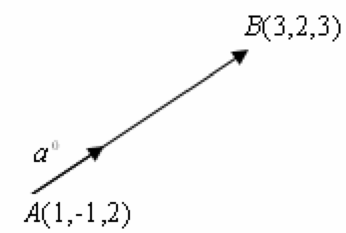


рис. 18

Решение 1. Принимая во внимание предыдущий пример, получим: $x_B - x_A = 2, \quad y_B - y_A = 3, \quad z_B - z_A = 1.$ Итак $\overrightarrow{AB} = \{2,3,1\}$.

2. Напомним, что $|\vec{a}| = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2}$, значит $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1} = \sqrt{14}.$

3. Так как $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, то $\overrightarrow{AB} = 2i + 3j + k$.

4. Напомним, что $a_x = |\vec{a}| \cdot \cos\alpha, \quad a_y = |\vec{a}| \cdot \cos\beta, \quad a_z = |a| \cdot \cos\gamma,$ где α , β , γ - углы, которые вектор $\overrightarrow{AB}$ составляет с координатными осями *Ox, Oy*, *Oz.*

Как известно, $\mathbf{cos}\,\alpha$, $\mathbf{cos}\,\beta$, $\mathbf{cos}\,\gamma$ называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{a}$. В нашем случае $\mathbf{cos}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{14}}$, $\mathbf{cos}\,\beta = \frac{3}{\sqrt{14}}$, $\mathbf{cos}\,\gamma = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

5. Единичный вектор $\overrightarrow{a^0}$, соответствующий вектору $\vec{a}$, равен $\overrightarrow{a^0} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. Таким образом $\overrightarrow{a^0} = \left\{\frac{2}{\sqrt{14}};\frac{3}{\sqrt{14}};\frac{1}{\sqrt{14}}\right\}$ или $\overrightarrow{a^0} = \frac{2}{\sqrt{14}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{k}$. Нетрудно отметить, что координаты единичного вектора совпадают с его направляющими косинусами.

Пример 3. На оси *Oy* найти точку *M,* равноудаленную от точек *A*(1;-4;7;) и *B*(5;6;-5).

Решение. Так как точка *M* находится на оси *Oy*, то ее координаты будем искать в виде М*(0,y,0)*. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BM}$:

$$\overrightarrow{AM} = \{0-1;\, y+4;\, 0-7\} = \{-1;\, y+4;\, -7\};$$
$$\overrightarrow{BM} = \{-5;\, y-6;\, 0+5\} = \{-5;\, y-6;\, 5\}.$$

По условию задачи $\left|\overrightarrow{AM}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$ или в координатной форме

$$\sqrt{(-1)^2 + (y+4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (y-6)^2 + 5^2}$$

Решив полученное уравнение, имеем что *y*=1. Итак, точка *M* имеет координаты (0;1;0).

4.2. Действия над векторами, заданными проекциями

Пусть векторы $\vec{a}=\{\,a_x, a_y, a_z\,\}$, и $\vec{b}=\{\,b_x, b_y, b_z\,\}$, заданы своими проекциями на оси координат *Ox, Oy, Oz* .

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можно записать:

1. $\vec{a}\pm\vec{b}=\{a_x \pm b_x;\quad a_y \pm b_y;\quad a_z \pm b_z\}$**;**

2. $\lambda\vec{a}=\ \{\lambda a_x,\quad \lambda a_y,\quad \lambda a_z\}$;

3. $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_x=b_x,\\ a_y=b_y,\\ a_z=b_z.\end{cases}$

4. Коллинеарность векторов. Заметим, что если два вектора $\vec{a}=\{\,a_x, a_y, a_z\,\}$ и $\vec{b}=\{\,b_x, b_y, b_z\,\}$ коллинеарны, то существует такое число λ, при котором $\vec{a}=\lambda\vec{b}$, т.е. $a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}=\lambda\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)\Rightarrow$

$$=>\left.\begin{aligned}a_x&=\lambda b_x\\ a_y&=\lambda b_y\\ a_z&=\lambda b_z\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}. \qquad (9)$$

Итак, мы доказали, что если два вектора коллинеарны, то их координаты пропорциональны.

Пример 4. Дан вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ и координаты точек $\boldsymbol{B}(1,2,-1)$, $\boldsymbol{C}(2,2,5)$.

Найти координаты вектора $\overrightarrow{\boldsymbol{AC}}$. (рис. 19)

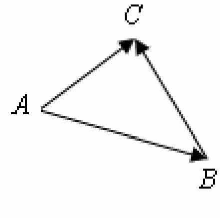


рис. 19

Решение. Найдём координаты вектора $\overrightarrow{BC}$:

$\overrightarrow{BC}=\{2-1;\quad 2-2;\quad 5-(-1)\}=\{1;0;6\}.$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\left(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right)+\left(\vec{i}+6\vec{k}\right)=2\vec{i}+\vec{j}+8\vec{k}$.

Итак $\overrightarrow{AC}=\{2,1,8\}$.

Пример 5. Выяснить, при каких значениях параметров λ и μ векторы $\vec{a} = \lambda\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} + \mu\vec{k}$ коллинеарны.

Решение. Векторы коллинеарны , если их координаты пропорциональны:

$\frac{\lambda}{1} = \frac{2}{1} = \frac{3}{\mu}$, отсюда $\lambda = 2$**;** $\mu = \frac{3}{2}$**.**

§ 5. Скалярное произведение и его свойства

5.1. Определение скалярного произведения

Определение. Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi. \qquad (10)$$

Если хотя бы один из векторов равен нулю, то скалярное произведение этих векторов равно нулю (по определению).

Если $\vec{a} = \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, так как $\mathbf{cos}\,\varphi = 1$.

Отсюда следует, что $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Заметим, что скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется скалярным квадратом и обозначается $\vec{a}^{\,2}$. Следовательно, $\vec{a}^{\,2} = \left(\vec{a}\right)^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}}$. Заметим, что иногда скалярное произведение обозначают $(\vec{a}\,\vec{b})$.

Свойства скалярного произведения

1^0 . $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$

Действительно, $np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, но $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi = |\vec{a}| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b}$, отсюда следует, что $np_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}$.

2^0 . Переместительное или коммутативное свойство:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

Это свойство очевидно, так как $\cos\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=\cos\left(\vec{b},\wedge\vec{a}\right)$.

3^0 Сочетательное или ассоциативное свойство относительно числового множителя λ:

$$\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

4^0. Распределительное или дистрибутивное свойство относительного сложения векторов:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}..$$

Доказательство:

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot np_{\bar{a}}(\vec{b}+\vec{c})=\left|\vec{a}\right|\cdot(np_{\bar{a}}\vec{b}+np_{\bar{a}}\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

Следствие. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{d}.$

5.2. Необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов

Напомним, что два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются ортогональными, если они образуют прямой угол, т.е. $\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{2}.$

Теорема. Для того, чтобы два ненулевых вектора были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение обращалось в нуль: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Доказательство. ***Необходимость***. Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, тогда $\cos\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=0\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0.$

Достаточность. Пусть $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Так как векторы ненулевые, то отсюда следует, что $\cos\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=0$, а это и означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны.

5.3. Скалярное произведение векторов, заданных своими координатами

Пусть $\vec{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$. Очевидно, что

$$\vec{i}^{\,2} = \vec{j}^{\,2} = \vec{k}^{\,2} = 1; \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{i} = 0; \quad \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0; \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0.$$

В силу свойства 4 получим

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}\right) \cdot \left(b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \qquad (11)$$

В частности, $\quad |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^{\,2}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

5.4. Угол между двумя векторами

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - ненулевые векторы, то

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} \quad . \qquad (12)$$

Отсюда нетрудно получить условие ортогональности (перпендикулярности) двух векторов в координатной форме:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \qquad (13)$$

Механический смысл скалярного произведения

Если **F** - сила, действующая на перемещении **S**, то работа A этой силы на указанном перемещении, как известно, равна $|\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{S}| \mathbf{cos}(\mathbf{F},\!\hat{\ }\mathbf{S})$, т.е. $\boldsymbol{A} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$ (рис. 20).

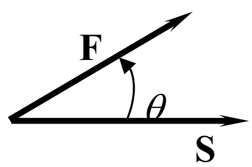


Рис. 20

Пример 1. Даны три точки $A(2,3,5)$, $B(1,2,2,)$, $C(3,5,4)$.

Найти: а) $np_{\overline{BC}} \overrightarrow{AB}$; б) угол при вершине B; в)направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение. а) $\overrightarrow{AB} = \{-1;-1;-3\}$; $\quad \overline{BC} = \{2;3;2\}$

б) $np_{\overline{BC}}\overline{AB}=\left|\overline{AB}\right|\cdot\cos(\overline{AB},\wedge\overline{BC})=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BC}\right|}=\dfrac{(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 3+(-3)\cdot 2}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=-\dfrac{11}{\sqrt{17}}.$

в) $\cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BC}\right|}=\dfrac{(-1)\cdot 2+(-1)\cdot 3+(-3)\cdot 2}{\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{2^2+3^2+2^2}}=-\dfrac{11}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{17}}=-\sqrt{\dfrac{11}{17}}$;

$\beta=\arccos\left(-\sqrt{\dfrac{11}{17}}\right).$

в) $\left|AB\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{11}$;

$$\cos\alpha=-\frac{1}{\sqrt{11}};\quad \cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{11}};\quad \cos\gamma=-\frac{3}{\sqrt{11}}.$$

Пример 2. Дан вектор $\vec{a}=\vec{m}+\vec{n},\quad \left|\vec{m}\right|=\left|\vec{n}\right|=2,\quad \overrightarrow{m,}\wedge\vec{n}=\dfrac{\pi}{3}.$ Найти длину вектора $\vec{a}$.

Решение. Найдём скалярный квадрат вектора $\vec{a}$:

$\vec{a}^{\,2}=\left(\vec{m}+\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{m}+\vec{n}\right)$. Раскроем скобки, пользуясь свойствами скалярного произведения:

$$\left(\vec{m}+\vec{n}\right)\cdot\left(\vec{m}+\vec{n}\right)=\vec{m}^{\,2}+\vec{n}\cdot\vec{m}+\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{n}^{\,2}=\vec{m}^{\,2}+2\vec{m}\cdot\vec{n}+\vec{n}^{\,2}=$$

$$=\left|\vec{m}\right|^2+2\left|\vec{m}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|\cdot\cos\left(\vec{m}\wedge\vec{n}\right)+\left|\vec{n}\right|^2=4+2\cdot 2\cdot 2\cdot\cos\frac{\pi}{3}+4=8+8\cdot\frac{1}{2}=12.$$

$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}=\sqrt{12}.$

Пример 3. При каком значении α векторы $\vec{a}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+\alpha\vec{j}+2\vec{k}$ ортогональны?

Решение. Принимая во внимание условие ортогональности двух векторов $a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$, получим $1\cdot 2+2\cdot\alpha+1\cdot 2=0$. Следовательно $\alpha=-2$.

§ 6. Векторное произведение и его свойства

6.1. Определение векторного произведения

Векторным произведением $\vec{a}\times\vec{b}$ ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, который удовлетворяет трём условиям:

1. $\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)$,

т.е. длина вектора $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах.

2. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

3. Тройка $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ - правая (рис. 21)

Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то по определению $\vec{a}\times\vec{b}=0$. Заметим, что иногда векторное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\left[\vec{a};\vec{b}\right]$.

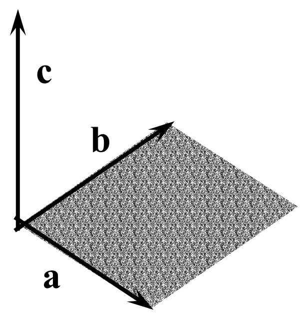


Рис. 21

Свойства векторного произведения

1^0**.** $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$.

Это очевидно, так как при перестановке векторов изменится ориентация тройки.

2^0**.** Свойство сочетательности относительно скалярного множителя:

$$\lambda\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\lambda\vec{a}\right)\times\vec{b}=\vec{a}\times\left(\lambda\vec{b}\right).$$

(без доказательства)

3^0. Распределительное свойство относительно сложения векторов :

$$\vec{a}\times\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}.$$

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\times\left(\vec{c}+\vec{d}\right)=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{a}\times\vec{d}+\vec{b}\times\vec{d}.$$

То есть скобки можно раскрывать, как при обыкновенном умножении, не переставляя местами множители (без доказательства).

6.2. Необходимое и достаточное условие коллинеарности двух ненулевых векторов

Теорема. Для того, чтобы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение было бы равно нулю: $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

Доказательство*. Необходимость.* Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, тогда они лежат на одной прямой, следовательно, $\sin\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=0\Rightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=0.$ Значит, $\vec{a}\times\vec{b}=0.$

Достаточность. Пусть векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}=0$. Так как $\left|\vec{a}\right|\neq 0,$ $\left|\vec{b}\right|\neq 0,$ то значит $\sin\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=0$, т.е. $\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=0$ или $\left(\vec{a},\wedge\vec{b}\right)=\pi$, а это означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

6.3. Векторное произведение векторов, заданных своими координатами

Заметим, что $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0.$ Далее очевидно, что

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},\quad \vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\quad \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\quad \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Применяя свойство 3, перемножим векторно векторы

$$\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\ \text{ и }\ \vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)=a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k}+$$

$$+a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k}+a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k}=$$

$$=\left(a_y b_z - a_z b_y\right)\vec{i} - \left(a_x b_z - a_z b_x\right)\vec{j} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Механический смысл векторного произведения

Если сила **F** поворачивает тело вокруг оси l, то момент **M** силы **F** относительно l, как известно, равен $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ (рис. **22**).

Пример 1. Известно, что $\left|\vec{a}\right| = 3, \quad \left|\vec{b}\right| = 6$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Определить модуль векторного произведения векторов $2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $2a + 5\vec{b}$.

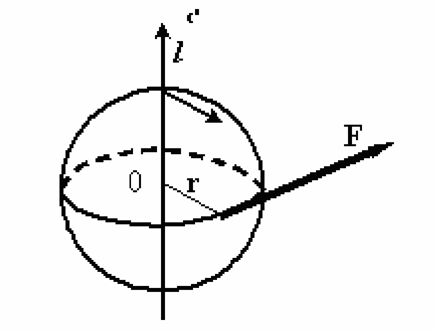


Рис. 22

Решение. Векторное произведение векторов $2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $2a + 5\vec{b}$ равно

$$(2\vec{a} - 3\vec{b}) \times (2a + 5\vec{b}) = 2\vec{a} \times 2\vec{a} + 2\vec{a} \times 5\vec{b} - 3\vec{b} \times 2\vec{a} - 3\vec{b} \times 5\vec{b} =$$

$$=4\left(\vec{a} \times \vec{a}\right) + 10\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) + 6\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) - 15\left(\vec{b} \times \vec{b}\right) = 16\left(\vec{a} \times \vec{b}\right).$$

Поэтому модуль векторного произведения векторов $2\vec{a} - 3\vec{b}$ и $2a + 5\vec{b}$ равен

$$\left|\left(2\vec{a} - 3\vec{b}\right) \times \left(2\vec{a} + 5\vec{b}\right)\right| = \left|16\left(\vec{a} \times b\right)\right| = 16\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi = 16 \cdot 3 \cdot 6 \cdot \sin\frac{\pi}{6} = 144.$$

Пример 2. Найти площадь треугольника с вершинами в точках A(-1,1,2), B(2,3,3) и C(1,2,-1);

2. Найти единичный вектор, перпендикулярный к плоскости, в которой лежат точки *A, B* и *C*.

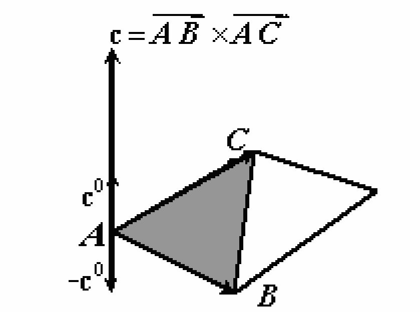


Рис. 23

Решение. 1. $\overline{AB} = \{3,2,1\}, \quad \overline{AC} = \{2,1,-3\}$

$$\overline{\boldsymbol{AB}} \times \overline{\boldsymbol{AC}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}\mathbf{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\mathbf{j}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\mathbf{k}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -7\vec{\boldsymbol{i}} + 11\vec{\boldsymbol{j}} - \vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 11^2 + (-1)^2} = \sqrt{171}.$$

Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, следовательно $\boldsymbol{S}_{\Delta ABC} = \dfrac{\sqrt{171}}{2}$.

2. В силу определения векторного произведения вектора $\vec{c} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$,
два вектора

$$\pm\overrightarrow{c^0} = \pm\frac{-7\vec{i} + 11\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{171}}$$

удовлетворяют поставленной задаче (рис. 23).

Пример 3. Найти модуль векторного произведения $(3\vec{a} - 2\vec{b})\times(3\vec{a} + 2\vec{b})$, если $\vec{a} = \{-2;1;2\}, \vec{b} = \{1;3;-3\}$.

Решение: Используя свойства векторного произведения, раскроем скобки:
$(3\vec{a} - 2\vec{b})\times(3\vec{a} + 2\vec{b}) = 9\vec{a}\times\vec{a} + 6\vec{a}\times\vec{b} - 6\vec{b}\times\vec{a} - 4\vec{b}\times\vec{b}$

$\vec{a}\times\vec{a} = 0, \quad \vec{b}\times\vec{b} = 0$ (в силу коллинеарности векторов). Тогда имеем

$(3\vec{a} - 2\vec{b})\times(3\vec{a} + 2\vec{b}) = 12\vec{a}\times\vec{b}$.

Найдем $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec{k} = -9\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k}$.

Тогда $\left|(3\vec{a} - 2\vec{b})\times(3\vec{a} + 2\vec{b})\right| = 12\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = 12\sqrt{(-9)^2 + (-4)^2 + (-7)^2} = 12\sqrt{146}$.

Пример 4. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярный векторам $\bar{a} = \{-1;3;2\}$ и $\bar{b} = \{5,4,3\}$**,** образует с осью Ox тупой угол. Модуль вектора $\vec{c}$ равен $26\sqrt{3}$. Определить координаты вектора $\vec{c}$.

Решение. Из свойств векторного произведения векторов получаем, что векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ перпендикулярно векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Поэтому векторы $\vec{c}$ и $\bar{a}\times\bar{b}$ коллинеарны.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 3 & 2\\ 5 & 4 & 1\end{vmatrix}=3\vec{i}+10\vec{j}-4\vec{k}-15\vec{k}-8\vec{i}+\vec{j}=-5\vec{i}+11\vec{j}-19\vec{k}.$$

Тогда модуль векторного произведения $\bar{a}\times\bar{b}$ равен

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{(-5)^2+11^2+(-19)^2}=\sqrt{507}=13\sqrt{3}.$$

Так как векторы $\vec{c}$ и $\bar{a}\times\bar{b}$=(-5, 11,-19) коллинеарны, то соответствующие координаты этих векторов пропорциональны. Пусть λ коэффициент пропорциональности. Тогда координаты вектора $\mathbf{\vec{c}=(-5\lambda, 11\lambda, -19\lambda).}$ Так как вектор $\vec{c}$ образует с осью Ox тупой угол, то соответствующий направляющий косинус меньше нуля: $\cos\alpha=-\frac{5\lambda}{|\vec{c}|}=-\frac{5\lambda}{26\sqrt{3}}<0.$ Тогда $\lambda>0$**.**

Модуль вектора $\vec{c}$ равен $|\vec{c}|=\sqrt{(-5\lambda)^2+(11\lambda)^2+(-19\lambda)^2}=\sqrt{507\lambda^2}=13\sqrt{3}|\lambda|=26\sqrt{3}.$

Отсюда $|\lambda|=2.$ Но $\lambda>0$. Поэтому $\lambda=2$**.** Тогда вектор

$$\vec{c}=(-5\lambda, 11\lambda, -19\lambda)=(-5\cdot 2, 11\cdot 2, -19\cdot 2)=(-10, 22, -38).$$

§ 7. Смешанное произведение трёх векторов

7.1. Определение смешанного произведения

Смешанным произведением ненулевых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ называется скалярное произведение вектора $\bar{a}$ и векторного произведения вектора $\bar{b}$ на вектор $\bar{c}$, т.е. выражение $\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$.

Необходимое и достаточное условие компланарности трёх векторов

Теорема. Для того чтобы ненулевые векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю: $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}=0$.

Доказательство. ***Необходимость.*** Пусть векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны. Тогда их можно поместить в одной плоскости, и вектор $\overline{b}\times\overline{c}$ окажется перпендикулярным вектору $\overline{a}$, следовательно, их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=0$.

Достаточность. Пусть $\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=0$. Так как векторы ненулевые, то может быть:

1) $\overline{b}\times\overline{c}=0$, тогда $\vec{b}=\lambda\vec{c}$, следовательно, векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ можно поместить в одной плоскости, т.е. они компланарны;

2) $\overline{b}\times\overline{c}\neq 0$, но $\overline{a}\cdot\left(\overline{b}\times\overline{c}\right)=0 \Rightarrow \vec{a}\perp\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$. Это значит, что вектор $\vec{a}$ лежит в одной плоскости с векторами $\overline{b}$ и $\overline{c}$.

Геометрический смысл смешанного произведения.

Предположим, что векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ некомпланарны. Построим параллелепипед на этих векторах, принимая за основание параллелограмм, построенный на векторах $\overline{b}$ и $\overline{c}$ (рис. 23).

1) Пусть $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - правая тройка. Тогда угол между векторами $\overline{a}$ и $\overline{b}\times\overline{c}$ острый, т.е. векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}\times\overline{c}$ лежат в одном полупространстве.

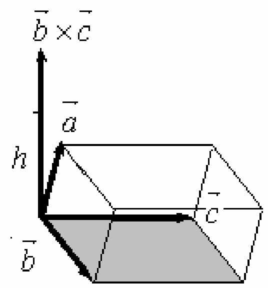


Рис. 24

Очевидно, что $\left|\vec{a}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\wedge(\vec{b}\times\vec{c})\right)=np_{\vec{b}\times\vec{c}}\,\vec{a}=h$ даёт нам высоту параллелепипеда, следовательно, $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ есть не что иное, как объём параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$.

2) Если $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ - левая тройка (рис.24), то векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}\times\overline{c}$ будут лежать в разных полупространствах, а тогда $|\vec{a}|\cdot\cos\left(\vec{a},\wedge(\vec{b}\times\vec{c})\right)=-h$, следовательно, $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ будет равно объёму параллелепипеда, взятому со знаком минус. Итак, объём параллелепипеда $V=\pm\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)$ или $V=\left|\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right|$.

Вывод. Абсолютная величина смешанного произведения трёх ненулевых векторов даёт нам объём параллелепипеда, построенного на этих векторах.

7.2. Свойства смешанного произведения

1^0. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{b}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$.

Т.е. смешанное произведение не меняется при циклической перестановке перемножаемых векторов.

Действительно, каждое произведение имеет один и тот же модуль в силу геометрического смысла смешанного произведения. Знаки их также совпадают, так как ориентация тройки не меняется при циклической перестановке векторов.

2^0. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=-\vec{a}\cdot\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)$.

Действительно, при перестановке двух соседних векторов модуль смешанного произведения не меняется, а знак меняется на противоположный, так как тройка меняет свою ориентацию.

3^0. $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Действительно, в силу первого свойства: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)$. С другой стороны, $\vec{c}\cdot\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$, откуда и следует окончательно: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Поэтому иногда смешанное произведение обозначают $\overrightarrow{(a}, \vec{b}, \vec{c})$.

4^0. Если $\vec{a}=\{a_x, a_y, a_z\}$, $\vec{b}=\{b_x, b_y, b_z\}$, $\vec{c}=\{c_x, c_y, c_z\}$, то

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Действительно, $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)=\left(a_x,a_y,a_z\right)\cdot\left(\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix};-\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix};\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}\right)=$

$$=a_x\cdot\begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix}-a_y\begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix}+a_z\begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Показать, что точки A (1,2,1), B (3,3,3), C (4,1,2) и D (5,4,5) лежат в одной плоскости.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

$\overrightarrow{AB}=\{2,1,2\},\quad \overrightarrow{AC}=\{3,-1,1\},\quad \overrightarrow{AD}=\{4,2,4\}.$

Если точки A, B, C и D лежат в одной плоскости, то и векторы лежат в одной плоскости (рис. 25), а тогда смешанное произведение этих векторов равно нулю.

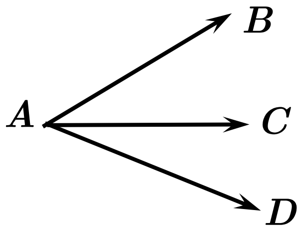


Рис. 25

Действительно,

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0,$$

т.к. первая и третья строки определителя пропорциональны.

Пример 2. Доказать, что векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k},\ \vec{b}=3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ линейно зависимы и найти эту линейную зависимость.

Решение. $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=0,$

следовательно, векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны, а значит, они линейно зависимы, т.е. существуют константы λ, μ и ν такие, что $\lambda\,\overline{a}+\mu\,\overline{b}+\nu\,\overline{c}=0$, т.е. $\lambda\,(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})+\mu(3\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k})+\nu\,(\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k})=0$, откуда следует: $(\lambda+3\mu+\nu)\vec{i}+(\lambda+4\mu+2\nu)\vec{j}+(2\lambda+\mu-3\nu)\vec{k}=0$, т.к. $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ - базисные векторы, то имеем такую систему для нахождения λ, μ и ν:

$$\left.\begin{matrix}\lambda+3\mu+\nu=0\\ \lambda+4\mu+2\nu=0\\ 2\lambda+\mu-3\nu=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lambda+3\mu+\nu=0\\ \mu+\nu=0\\ -5\mu-5\nu=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lambda+3\mu+\nu=0\\ \mu=-\nu\end{matrix}\right\}\Rightarrow\lambda-3\nu+\nu=0\Rightarrow\left.\begin{matrix}\lambda=2\nu\\ \mu=-\nu\end{matrix}\right\}$$

Здесь ν выступает в качестве параметра, и данная система имеет бесчисленное множество решений. Подставим $\lambda=2\nu$, $\mu=-\nu$ в указанную выше линейную комбинацию: $2\nu\vec{a}-\nu\vec{b}+\nu\vec{c}=0$. Сократим на $\nu\neq 0$. Получим искомую линейную зависимость $2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}=0.$

Пример 3. Вычислить произведение $\overline{b}\,(\overline{c}+\overline{a})(\overline{b}+2\overline{c})$

По определению смешанного произведения имеем

$$\overline{b}\,(\overline{c}+\overline{a})(\overline{b}+2\overline{c})=(\overline{b}\times(\overline{c}+\overline{a}))\cdot(\overline{b}+2\overline{c})=(\overline{b}\times\overline{c}+\overline{b}\times\overline{a})\cdot(\overline{b}+2\overline{c})=$$
$$\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{b}+2\overline{b}\,\overline{c}\,\overline{c}+\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{b}+2\overline{b}\,\overline{a}\,\overline{c}=0+0+0+2bac=-2abc.$$

Пример 4. Даны точки $A(4;\,-1;\,3)$, $B(0;\,1;\,2)$, C(3; -2; 5), $D(1;\,-1;\,1)$. Найти объём пирамиды *ABCD*.

Решение. Объём V_Δ пирамиды *ABCD* равен $\frac{1}{6}$ объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$. Имеем $\overline{AB}=\{-4;2;-1\}$, $\overline{AC}=\{-1;-1;2\}$, $\overline{AD}=\{-3;0;-2\}$;

$$V_\Delta=\frac{1}{6}\left|\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix}-4 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\\ -3 & 0 & -2\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}\left|-8-12+0+3+0-4\right|=$$
$$=21/6=7/2.$$

§8. Задания для компьютерного тестирования
Вариант 1

1. Даны $|a| = 13, \quad |b| = 19$ и $|a+b| = 24$

Вычислить $|a-b|$.

Ответы: а) 22; б)10; в)23; г)20;

Указание:

Известно, что в параллелограмме построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одна диагональ является суммой, а другая разностью двух векторов. По свойству параллелограмма имеем:

$$2(|a|^2 + |b|^2) = |a-b|^2 + |a+b|^2$$

2. Определить модули суммы и разности векторов $\overline{a} = \{3; -5; 8\}$ и $\overline{b} = \{-1; 1; -4\}$

Ответы: а) $|a+b| = 3; |a-b| = 7$; б) $|a+b| = 6; |a-b| = 14$

в) $|a+b| = 5; |a-b| = 8$; г) $|a+b| = 10; |a-b| = 13$

Указание: *Если* $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}, \vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$

то $|a+b| = \sqrt{(x_1+x_2)^2 + (y_1+y_2)^2 + (z_1+z_2)^2}, \quad |a-b| = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$.

3. Векторы a, b, c попарно образуют друг с другом углы, каждая из которых равен 60^0.Зная, что $|a| = 4, \quad |b| = 2$ и $|c| = 6$, определить модуль вектора $p = a + b + c$.

Ответы: а) 12; б) 13; в) 10; г)15.

Указание: *Воспользуйтесь свойством скалярного произведения векторов:*

$$p \cdot p = |p|^2 \Rightarrow p = \sqrt{p \cdot p}$$

4. Вычислите проекцию вектора $\vec{a} = \{5; 2; 5\}$ на ось вектора $\vec{b} = \{2; -1; 2\}$

Ответы: а)2; б)10; в)8; г)6.

Указание: *Воспользуйтесь формулой:* $np_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{a \cdot b}{|b|} = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$

5. Даны точки $A(1; 2; 0), \quad B(3; 0; -3)$ и $C(5; 2; 6)$. Вычислить площадь треугольника ABC.

Ответы: а)8; б) 14; в)13; г) 16.

Указание: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$, где,

$$|a \times b| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \left(-\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right)^2}$$

6. Дано $\left|\overline{a}\right| = 3$, $\left|\overline{b}\right| = 20$, $\overline{a} \cdot \overline{b} = 30$. Найти $|a \times b|$

Ответы: а) $30\sqrt{15}$; б) $15\sqrt{30}$; в) 10; г) $30\sqrt{30}$;

Указание: $\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right| \sin\varphi$; $\sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi}$; $\cos\varphi = \dfrac{\overline{a} \cdot \overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}$

7. Вычислить произведение $(\vec{a}-\vec{b})(\vec{b}-\vec{c})(\vec{c}-\vec{a})$.

Ответы: а) $3\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ б) $-3\overline{a}\overline{b}\overline{c}$ в) 0 г) abc

Указание: *Используйте определение смешанного произведения:* $(a \times b) \cdot c$

8. При каком значении λ векторы $\overline{a} = \overline{i} + \overline{j} + \lambda\overline{k}$, $\overline{b} = \{0; 1; 0\}$ и $\overline{c} = \{3; 0; 1\}$ компланарны ?

Ответ: а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{1}{3}$; в) 0; г)1.

Указание: λ *можно найти из условия компланарности векторов, т.е.* $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0$, *и решить полученное уравнение.*

9. Даны векторы $\vec{a} = \{3; 5; -1\}$, $\vec{b} = \{0; -2; 1\}$, $\overline{c} = \{-2; 2; 3\}$. Найти $(\overline{a} \times \overline{b}) \times \overline{c}$.

Ответы: а) (-3; 3; 0) б) (3; 3; 0) в) (3; -3; 0) г) (0; 3; 3)

Указание: *Найдите векторное произведение* $\overline{a} \times \overline{b}$, *затем результат умножьте векторно на* $\overline{c}$.

10. Найти объем треугольной призмы, построенной на векторах $\overline{a} = (1; 2; 3)$, $\overline{b} = (2; 4; 1)$, $\overline{c} = (2; -1; 0)$

***Ответ**:* а) $\frac{25}{6}$; б) $\frac{27}{6}$; в) $\frac{20}{6}$; г) $\frac{28}{6}$.

Указание*:* *Объем треугольной призмы построенной на векторах* $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2), \vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ *равен*

$$V = \frac{1}{6}|abc| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Вариант №2

1. Даны векторы $\bar{a}=\{2;3\}$, $\bar{b}=\{1;-3\}$, $\bar{c}=\{-1;3\}$
При каком значении коэффициента α векторы $\bar{p}=\bar{a}+\alpha\bar{b}$ и $\bar{q}=\bar{a}+2\bar{c}$ коллинеарны?

Ответы: а) 2; б)-2; в)4; г)5.

Указание: *используйте условие коллинеарности векторов* p *и* q: *их координаты должны быть пропорциональны:*

$\{x_1;\, y_1;\, z_1\}$ – координаты вектора $\bar{p}$

$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$, *где* $\{x_2;\, y_2;\, z_2\}$ – *координаты вектора* $\bar{q}$

2. На оси OX найти точку M, расстояние которой от точки A(3; -3) равно 5.

Ответы: а) (2; 0) и (-5; 0) б) (5; 0) и (-2; 0) в) (7; 0) и (-1; 0) г) (-7; 0) и (1; 0)

Указание: *Найдите координаты вектора* $\overrightarrow{AM}$ *и, используя условие, что* $\left|\overrightarrow{AM}\right|=5$ *решить полученное уравнение.*

3. Найти орт вектора $a=\{6;-2;-3\}$

Ответы: а) $\{-6/7;-2/7;-3/7\}$; б) $\{-6/7;2/7;-3/7\}$; в) $\{6/7;-2/7;3/7\}$; г) $\{6/7;-2/7;-3/7\}$

Указание: $\bar{a}=|\vec{a}|\cdot a^0 \Rightarrow a^0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

4. Даны $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=26$ *и* $|\bar{a}\times\bar{b}|=72$. Вычислить $\bar{a}\cdot\bar{b}$.

Ответы: а) $\vec{a}\vec{b}=\pm30$; б) $\vec{a}\vec{b}=\pm32$; в) $\vec{a}\vec{b}=\pm40$; г) $\vec{a}\vec{b}=\pm45$.

Указание: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$; $\cos\varphi=\sqrt{1-\sin^2\varphi}$; $\sin\varphi=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

5. Дано, что $|\bar{a}|=3$, $|\bar{b}|=5$. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $\vec{a}-\alpha\vec{b}$ будут взаимно перпендикулярны.

Ответы: а) $\alpha=\pm\frac{5}{3}$; б) $\alpha=\pm\frac{3}{5}$; в) $\alpha=\pm\frac{4}{5}$; г) $\alpha=\pm\frac{5}{4}$;

Указание: *используйте условие перпендикулярности двух векторов:* $\boldsymbol{c}\perp\boldsymbol{d}\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{c}\cdot d=0$, *где* $c=\bar{a}+\alpha\bar{b}$, $d=\bar{a}-\alpha\bar{b}$ *и решить полученное уравнение.*

6. Даны векторы $\vec{a}$=(2; 1; -1); $\vec{b}$=(-1; 0; 3); $\vec{c}$=(3; -1; 1);

Вычислить $2\vec{a}\times\vec{c}-3\vec{b}+2\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

Ответы: а) (6; 2; 4); б) $2\vec{i}-\vec{j}$; в) не имеет смысла; г) (-27; 0; 29)

Указание: *воспользуйтесь определением умножения вектора на число, векторного и скалярного произведения.*

7. Даны вершины треугольника А (3; 2; -1); В (5; 1; -1); С (1; 2; 1).
Определить угол А этого треугольника

Ответы: а) $\frac{\pi}{2}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{3}$; г) $\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$

Указание. *Найти координаты векторов* $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ *и* $\vec{b}=\overrightarrow{AC}$ *и воспользоваться формулой для нахождения косинуса угла между векторами* $\cos\alpha=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

8. Найти модуль векторного произведения $\left(2\bar{a}-\bar{b}\right)\times\left(2\bar{a}+\bar{b}\right)$, если $\vec{a}=(2;-1;2)$, $\vec{b}=(1;2;1)$.

Ответы: а) $20\sqrt{2}$; б) $10\sqrt{2}$; в) $5\sqrt{3}$; г) $10\sqrt{3}$

Указание: *Используя свойства векторного произведения, раскрыть скобки, упростить выражение и использовать формулу*

$$\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|=\sqrt{\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)^2+\left(-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)^2}$$

9. Найти высоту пирамиды OD, если координаты вершин А(5; 1; -4), В(1; 2; -1), С(3; 3; -4); D(2; 2; 2);

Ответы: α) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$; б) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$; в) 10; г)3.

Указание: *Объем пирамиды* $V=\frac{1}{3}S'\cdot h\Rightarrow h=\frac{3V}{S'}$, *где* $h=OD$, $S'-$ *площадь основания,* V *находим по формуле* $V=\frac{1}{6}|abc|$, *где* $\vec{a}=\overrightarrow{AB},\vec{b}=\overrightarrow{AC},\vec{c}=\left|\overrightarrow{AO}\right|$.

$S'-$ *находим по формуле:* $S'=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

10. Проверить, будут ли компланарны данные три вектора
$\vec{a}=(2;3;-1)$, $\vec{b}=(1;-1;3)$, $\vec{c}=(1;9;-11)$

Ответы: а) 3; б)0; в)-52; г)10

Указание: *Проверить условие*

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0$$

Вариант 3

1. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = 3i + \alpha j + k$ и $\vec{b} = \alpha i + j - 4k$ перпендикулярны?

Ответы: а) $\alpha = 1$; б) $\alpha = -1$; в) $\alpha = 2$; г) $\alpha = -2$.

Указание. *используйте условие перпендикулярности двух векторов:* $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$ *и решить полученное уравнение. Решить уравнение ab=0.*

2. Найти числовое значение $3|\vec{m}| - 2\vec{m}\vec{n} + 4n^2$, если

$$|\vec{m}| = \frac{1}{3}; \quad |\vec{n}| = 6; \quad (\vec{m}\ \vec{n}) = \frac{\pi}{3}.$$

Ответы: а) 127; б) 143; в) -143; г) 167

Указание: *вычислить скалярное произведение векторов* $\vec{m} \cdot \vec{n} = |m| \cdot |n| \cdot \cos(\vec{m}, \vec{n}), \quad n^2 = |n|^2$ *и выполнить действие*

3. Даны векторы $\vec{a} = (0; 1; 0)$, $\vec{b} = (2; 0; 1)$, $\vec{c} = (3; 1; -5)$. Вычислить $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

Ответы: а)12; б) не имеет смысла; в) $2\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k}$; г) 14.

Указание: *Вычислить смешанное произведение векторов*

$$(a \times b) \cdot c = abc = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix},$$ *скалярное произведение векторов*

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$, $\overline{b}\overline{c} = b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z$ *и результат сложить.*

4. Вычислить синус угла, образованного векторами $\overline{a} = (2; -2; 1)$, $\overline{b} = (2; 3; 6)$

Ответы: а) $\sin\alpha = \dfrac{5\sqrt{17}}{21}$; б) $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$; в) $\sin\alpha = \dfrac{1}{2}$; г) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$

Указание: $\sin\alpha = \dfrac{|\overline{a} \times \overline{b}|}{|\overline{a}| \cdot |\overline{b}|}$, *где* $\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$.

5. Проверить, будут ли компланарны данные три вектора $\vec{a} = (2; -1; 3)$; $\vec{b} = (1; 4; 2)$; $\vec{c} = (3; 1; -1)$

Ответы: а) -52; б) 0; в) 10; г) -1.

Указание: *Проверить условие* $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0$

6. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 45^0. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a}-2\bar{b}$ и $3\bar{a}+2\bar{b}$, если $|\bar{a}|=|\bar{b}|=5$.

Ответы: а) 40; б) 30; в) $25\sqrt{2}$; г) $50\sqrt{2}$;

Указание: *Площадь треугольника, построенного на векторах* $\bar{c}$ *и* $\bar{d}$ *найти по формуле*

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|\bar{c}\times\bar{d}|, \text{ где } \bar{c}=\bar{a}-2\bar{b}, \quad \bar{d}=3\bar{a}+2\bar{b}$$

При вычислении $\bar{c}\times\bar{d}$ *использовать свойства векторного произведения.*

7. Вектор a составляет с осью OX угол $\alpha=60^0$, a с осью OY угол $\beta=120^0$. Найти угол γ_a между осью OZ и вектором $\vec{a}$ и координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}|=6$, γ – тупой угол.

Ответы: а) $\gamma=120^0$; $a=(-3;3;-3\sqrt{2})$; б) $\gamma=135^0$; $a=(3;-3;-3\sqrt{2})$;
в) $\gamma=150^0$; $a=(3;-3;3\sqrt{2})$; г) $\gamma=135^0$; $a=(-3;3;-3\sqrt{2})$;

Указание: *Направляющие косинусы удовлетворяют равенству* $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Координаты вектора а выражаются через его модуль и направляющие косинусы

$$a_x=|\bar{a}|\cos\alpha, \ a_y=|\bar{a}|\cos\beta, \ a_z=|\bar{a}|\cos\gamma.$$

8. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны, причем $|\bar{a}|=5$ и $|\bar{b}|=12$. Определить $|a+b|$ и $|a-b|$.

Ответы: а) $|a+b|=|a-b|=14$; б) $|a+b|=|a-b|=13$; в) $|a+b|=|a-b|=15$;
г) $|a+b|=|a-b|=20$;

Указание: *Воспользоваться теоремой Пифагора*

9. Вычислить произведение $\bar{a}(\bar{b}-\bar{c})(\bar{a}+\bar{b}+2\bar{c})$, если $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=5$.

Ответы: а)-7; б) 7; в) 10; г)15.

Указание: *Используйте определение смешанного произведения* $\bar{a}\bar{b}\bar{c}=(\bar{a}\times\bar{b})\bar{c}$.

10. Дан вектор $\bar{c}=4\bar{i}+7\bar{j}-4\bar{k}$. Найти вектор $\bar{d}$ параллельный вектору $\bar{c}$ и противоположного с ним направления, если $|\bar{d}|=27$.

Ответы: а) $-5i+2j+k$; б) $5i-2j+k$; в) $-12i-21j+12k$; г) $-12i+21j-12k$

Указание: $\bar{d}=|\bar{d}|\bar{d}^0$, $\bar{d}^0=-\bar{c}^0$

Вариант №4

1. Найти длину вектора $\overline{a} = 2\overline{m} - 3\overline{n}$, если $\left|\overline{m}\right| = 2, \quad \left|\overline{n}\right| = 1, \quad \left(\overline{m} \wedge \overline{n}\right) = 60^0$

Ответы: а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{32}$; в) $\sqrt{13}$; г) 4.

Указание: $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{\overline{a}^2}$

2. Вычислить высоту BD треугольника заданного своими вершинами $A(1; -2; 8); \quad B(0; 0; 4); \quad C(6; 2; 0)$

Ответы: а) 0,5; б) 3; в) -1,5; с) 1,5

Указание: $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{AC}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BD}\right|$, *отсюда* $\left|\overline{BD}\right| = \frac{2S_\Delta}{\left|\overline{AC}\right|}$

с другой стороны $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right|$, *тогда* $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{\left[\overrightarrow{AC}\right[}$

3. Найти объем пирамиды, вершины которой находятся в точках:
$A(2; -1; 1); \quad B(5; -1; 2); \quad C(3; 0; -3); \quad D(6; 0; 1)$;

Ответы: а) 0,5; б)3; в)-1,5; с)1,5;

Указание:

$$V = \frac{1}{6}\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}.$$

4. Даны векторы $\vec{a} = (2; 1; 4); \vec{b} = (3; 0; 3); \quad \vec{c} = (3; 1; 0)$.

Вычислить: $\left|\overline{a} \times \overline{c}\right| + 2\overline{b} \times \overline{c} + \left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$

Ответы: а) не имеет смысла; б) $18 + \sqrt{161} + \sqrt{99}$;
в) $(-3; 9; 3)$; г) $18 + \sqrt{260}$;

Указание: *Исходить из определения векторного произведения и модуля вектора.*

5. При каких α и β векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ коллинеарны, если $\overline{a} = \alpha\overline{i} + 5\overline{j} - \overline{k}, \quad \overline{b} = 3\overline{i} + \overline{j} + \beta\overline{k}$

Ответы: а) 15 и 1; б)-15 и 1; в)15 и $-\frac{1}{5}$; г) $\frac{1}{5}$ и -15;

Указание: *коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты:* $\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}$

6. Определить угол между векторами: $\bar{a} = \{1; 2; 3\}$ и $\bar{b} = \{6; 4; -2\}$

Ответы: а) $\dfrac{\pi}{3}$ б) $\dfrac{\pi}{6}$ в) $\dfrac{\pi}{4}$ г) $\arccos\dfrac{2}{7}$

Указание: $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \dfrac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$

7. Радиус вектор точки M составляет с осью O_y угол 60^0, а с осью O_z угол 45^0, его длина $|r| = 8$. Найти координаты точки M, если ее абсцисса отрицательна.

Ответы: а) $(-4; 4; 4\sqrt{2})$; б) $(4; -4; 4\sqrt{2})$; в) $(-4; -4; -4\sqrt{2})$; г) $(-4; 4; -4\sqrt{2})$;

Указание: *Координаты точки M это и есть координаты радиус вектора точки M.*

Координаты вектора $\bar{r} = \overrightarrow{OM}$ выражаются через его модуль и направляющие косинусы.

$r_x = |\bar{r}|\cos\alpha,$ $r_y = |\bar{r}|\cos\beta,$ $r_z = |\bar{r}|\cos\gamma$; $|\bar{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$

8. Дано $|\bar{a}| = 3;$ $|\bar{b}| = 26;$ $|\bar{a}\times\bar{b}| = 72.$ Найти $\bar{a}\cdot\bar{b}$

Ответы: а) ± 40; б) ± 30; в) ± 45; г) ± 60.

Указание: $\sin\varphi = \dfrac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}||\bar{b}|};$ $\cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi},$ $\bar{a}\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi.$

9. Даны векторы $\vec{\boldsymbol{a}} = \mathbf{(1; -3; 4)}$; $\vec{\boldsymbol{b}} = \mathbf{(3; -4; 2)}$; $\vec{\boldsymbol{c}} = \mathbf{(-1; 1; 4)}$.

Найти: $\boldsymbol{np}_{\boldsymbol{b+c}}\bar{\boldsymbol{a}}$.

Ответы: а) -5; б) 8; в) 5; г)-8;

Указание: $np_{b+c}\bar{a} = \dfrac{\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})}{|\bar{b}+\bar{c}|},$ $\bar{b}+\bar{c} = (b_x + c_x; b_y + c_y; b_z + c_z)$

10. Показать, что точки $A(5; 7; -2)$; $B(3; 1; -1)$; $C(9; 4; -4)$; $D(1; 5; 0)$; лежат в данной плоскости.

Указание: *Показать, что* $\left(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}\right) = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

Ответы: а)12; б) 48; в)-12; г)0.

Вариант №5.

1. Даны вершины треугольника $A(4;\,2;\,3)$; $B(5;\,7;\,0)$; $C(2;\,8;\,-1)$;
Найти площадь треугольника ABC.

Ответы: а) $3\sqrt{10}$; б) $6\sqrt{10}$; в) 3; г)6;

Указание: $S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|$, где $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}$.

2. Определить, при каком значении α векторы $\overline{p} = \alpha\overline{a} + 17\overline{b}$ и $\overline{q} = 3\overline{a} - \overline{b}$ будут перпендикулярны, если $|\overline{a}| = 2$, $|\overline{b}| = 5$; $\left(\overline{a}\,\hat{}\,\overline{b}\right) = 120^0$.

Ответы: а)12; б)-5; в) 40; г) 7;

Указание: *Найти скалярное произведение векторов* $\left(\overline{p}\cdot\overline{q}\right) = (\alpha\overline{a} + 17\overline{b})\ (3\overline{a} - \overline{b}) = 0$
Используя свойства скалярного произведения, раскрыть скобки и решить полученное уравнение.

3.Проверить компланарны ли следующие векторы:
$\vec{a} = (2;\,-1;\,2)$; $\overline{b} = (1;\,2;\,-3)$; $\overline{c} = (3;\,-4;\,7)$.

Ответы: а)12; б)0; в) 4; г) -12;

Указание: *Проверить условие* $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0$

4. Даны векторы $\vec{\boldsymbol{a}} = (0;\,1;\,0)$; $\overline{\boldsymbol{b}} = (2;\,0;\,1)$; $\overline{\boldsymbol{c}} = (3;\,1;\,-5)$. Вычислить: $(\overline{\boldsymbol{a}}\times\overline{\boldsymbol{b}})\overline{\boldsymbol{c}} + \overline{\boldsymbol{a}}\times\overline{\boldsymbol{b}} + \overline{\boldsymbol{a}}\cdot\overline{\boldsymbol{c}}$.

Ответы: а) 12; б) 14; в) не имеет смысла; г) $2i + 8j - k$

Указание: *Исходить из определения смешанного, векторного и скалярного произведения векторов.*

5. На оси OZ найти точку, равноудаленную от точек $A(4;\,-1;\,2)$; и $B(0;\,0;\,-1)$;

Ответы: а) $(0;\,0;\,10/3)$; б) $(0;\,0;\,-8/3)$; в) $(0;\,0;\,3)$; г) $(0;\,0;\,-3)$;

Указание: *Найти векторы* $\overline{OA}$ *и* $\overline{OB}$*, где точка* $O(0;\,0;\,z)$.
Решить уравнение $\left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{OB}\right|$.

6. Найти модуль векторного произведения $(2\overline{a}-\vec{b})\times(2\overline{a}+\vec{b})$, если $\overline{a}=(1;\,2;\,-1);\quad \overline{b}=(1;\,1;\,2)$.

Ответы: а)10; б) $4\sqrt{35}$; в) 20; г) $2\sqrt{35}$;

Указание: *Используя свойства векторного произведения, раскрыть скобки, упростить выражение и использовать формулу*

$$\left|\overline{a}\times\overline{b}\right|=\sqrt{\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)^2+\left(-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_2 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)^2}$$

7. Векторы $\overline{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi=60^0$ причем $\left|\overline{a}\right|=5,\quad \left|\overline{b}\right|=8.$ Определить $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|$ и $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$.

Ответы: а) 7 и $\sqrt{129}$; б) 8 и 12; в) 12 и 8; г) $\sqrt{129}$ и 7.

Указание: *При нахождении* $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|$ *воспользоваться теоремой косинусов* $\left|\overline{a}-\overline{b}\right|^2=\left|\overline{a}\right|^2+\left|\overline{b}\right|^2-2\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|\cos\varphi$,

а при нахождении $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|$*-свойством параллелограмма:* $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|^2+\left|\overline{a}-\overline{b}\right|^2=2\left|\overline{a}\right|^2+2\left|\overline{b}\right|^2$

8. Вычислить проекцию вектора $\overline{a}$ на ось вектора $\vec{b}$, если $\vec{\boldsymbol{a}}=\mathbf{(5;\,2;\,5);}$ $\overline{\boldsymbol{b}}=\mathbf{(2;\,-1;\,2).}$

Ответы: а) 6; б) 8; в) 10; г) -6;

Указание: *проекция вектора* $\overline{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ *вычисляется по формуле*

$$np_{\overline{b}}\overline{a}=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{b}\right|},\quad ab=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,\quad \left|\overline{b}\right|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}$$

9. Вектор а составляет с координатными осями *Ox* и *Oy* углы $\alpha=60^0,\beta=120^0$. Вычислить его координаты, при условии, что $\left|\overline{a}\right|=2.$

Ответы: а) *a={1;-1;$\sqrt{2}$} или* $a=\left\{1;-1;-\sqrt{2}\right\}$**;** б) $a=\left\{-1;-1;-\sqrt{2}\right\}$ *или* $a=\left\{-1;-1;\sqrt{2}\right\}$
в) $a=\left\{-1;1;-\sqrt{2}\right\}$ *или* $a=\left\{-1;1;\sqrt{2}\right\}$**;** $a=\left\{-\sqrt{3};-1;-1\right\}$ *или* $a=\left\{\sqrt{3};-1;-1\right\}$

Указание: $a_x=\left|a\right|\cos\alpha;\quad a_y=\left|a\right|\cos\beta;\quad a_z=\left|a\right|co\gamma$ **;** $\cos\gamma$ *найти из равенства* $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

10. Объем тетраэдра $V=5$, три его вершины находятся в точках $A(2;\,1;\,-1);\quad B(3;\,0;\,1);\quad C(2;\,-1;\,3)$. Найти координаты четвертой вершины D, если известно, что она лежит на оси Oy.

Ответы: а) $(0;\,6;\,0)$; б) $(0;\,-8;\,0)$; в) $(0;\,8;\,0)$; г) $(0;\,2;\,0)$;

Указание: $V_{тетр}=\frac{1}{6}(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}),\quad D(0;\,y;\,0)$

Решить уравнение: $(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD})=6V_{тетр}$

Вариант №6

1.На прямой, соединяющей точки (-3; 5) и (-1; 2), найти точку, у которой $x = 5$.

Ответы: а) (5; -3); б) (5; 7); в) (5; -7); с) (5; 4).

Указание: *Найти координаты векторов* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AM}$ *где* $M(5; y)$. *Затем использовать условие коллинеарности векторов* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AM}$. *Их координаты должны быть пропорциональны. Решить полученное уравнение.*

2. Найти угол между диагоналями параллелограмма построенного на векторах $\vec{a} = (2; 1; 0)$; $\overline{b} = (0; -2; 1)$.

Ответы: а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\arccos 0{,}2$

Указание: *Вычислить сначала, координаты векторов* $\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = \{a_x + b_x;\ a_y + b_y;\ a_z + b_z\}$ *и* $\overline{d} = \overline{a} - \overline{b} = \{a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z\}$, *а затем воспользоваться формулой для вычисления угла между векторами* $\cos\varphi = \frac{\overline{c} \cdot \overline{d}}{|\overline{c}||\overline{d}|}$.

3. Даны векторы $\vec{a} = (2; 1; 4)$; $\overline{b} = (3; 0; 3)$; $\overline{c} = (3; 1; 0)$.

Вычислить: $|\overline{a} \times \overline{b}| + \overline{b} \times \overline{c} + \overline{a} \cdot \overline{c}$.

Ответы: а) не имеет смысла; б) 3; в) (3; -4; 2); г) $\sqrt{2} + 5$.

Указание: *Исходить из определения векторного, скалярного произведения векторов, а также модуля вектора*.

4. Даны точки $A(1; 2; 0)$; $B(3; 0; -3)$; $C(5; 2; 6)$;

Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

Ответы: а)14; б) 28; в) 4; г) 72;

Указание: $S = |\overline{a} \times \overline{b}| = \sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \left(-\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right)^2}$

5. Вычислить объем пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(2; -1; 1)$; $B(5; 5; 4)$; $C(3; 2; -1)$; $D(4; 1; 3)$.

Ответы: а)2; б)10; в)3; г)4;

Указание: $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|\overline{a}\overline{b}\overline{c}|$, $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$.

6.Найти орт вектора $\overline{a} = \{3; 4; -12\}$.

Ответы: а) $\overline{a}^0 = \{3/13; 4/13; -12/13\}$; б) $\overline{a}^0 = \{4/13; 3/13; -12/13\}$

в) $\overline{a}^0 = \{-12/13; 3/13; 4/13\}$; г) $\overline{a}^0 = \{-3/13; -4/13; 12/13\}$

Указание: $\overline{a} = |\overline{a}|\overline{a}^0 \Rightarrow a^0 = \frac{\overline{a}}{|\overline{a}|}$, *где* $|\overline{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

7. Даны векторы $\bar{a} = -2i + j + k;\quad \bar{b} = i + 5j;\quad \bar{c} = 4i + 4j - 2k.$

Вычислить $пр_{\bar{c}}(3a - 2b)$

Ответы: а)8; б) -11; в) 12; г)13.

Указание: *Вычислить сначала координаты вектора* $\bar{d} = 3\bar{a} - 2\vec{b}$*, а затем воспользоваться формулой* $пр_{\bar{c}}\bar{d} = \dfrac{(\bar{c} \cdot \bar{\bar{d}})}{|\bar{c}|}$*, где*

$\bar{c}\vec{d} = c_x d_x + c_y d_y + c_z d_z,\quad |\bar{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}$

8. Найти единичный вектор $\bar{c}$, перпендикулярный каждому из векторов $\vec{a} = (3; -1; 2);\ \bar{b} = (-1; 3; -1).$

Ответы: а) $\pm\dfrac{5}{\sqrt{10}}(\boldsymbol{i} - 5\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k});$ б) $\pm 4\sqrt{10}(8i - 5j + k);$

в) $\pm\dfrac{1}{3\sqrt{10}}(-5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k});$ г) $\pm 3\sqrt{10}(5i + j - 8k);$

Указание: Векторы c и $a \times b$ коллинеарны, следовательно $\bar{c} = \lambda\bar{d},\quad \bar{d} = \bar{a} \times \bar{b},$ *где вектор* $\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},$ λ найти из уравнения $|c| = \sqrt{(\lambda d_x)^2 + (\lambda d_y)^2 + (\lambda d_z)^2} = 1.$

9. При каких значениях α и β векторы $\bar{a} = -2\bar{i} + 3\bar{j} + \beta\bar{k}$ и $\bar{b} = \alpha\bar{i} - 6\bar{j} + 2\bar{k}$ коллинеарные.

Ответы:

а) $\alpha = -4;\ \beta = 1;$ б) $\alpha = -4;\ \beta = -1;$ в) $\alpha = 4;\ \beta = 1;$ г) $\alpha = 4;\ \beta = -1;$

Указание: *коллинеарные векторы имеют пропорциональные координаты:*

$\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$

10. Вычислить $(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})\,(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})\,(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c})$

Ответы:

а) $2abc;$ б) $-2abc;$ в) $-4abc;$ г) $abc;$

Указание: *Используя свойства смешанного произведения, раскрыть скобки.*

$(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})\,(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})\,(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}) = \big((\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) \times (\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})\big)(\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}).$

Вариант №7

1. Вектор $\vec{a}$ составляет с осью Ox угол $\alpha = 60^0$, а с осью Oy угол $\beta = 120^0$. Найти угол γ между осью Oz и вектором $\vec{a}$ и координаты вектора $\vec{a}$, если $|\vec{a}| = 4$, γ-угол острый.

Ответы: а) $\gamma = 30^0 \quad \bar{a} = (3; -2; 2\sqrt{2})$; б) $\gamma = 45^0 \quad \bar{a} = (2; -2; 2\sqrt{2})$;
в) $\gamma = 60^0 \quad \bar{a} = (2; -2; 2\sqrt{2})$; г) $\gamma = 45^0 \quad \bar{a} = (2\sqrt{2}; 2; -2)$;

Указание: *Направляющие косинусы удовлетворяют равенству* $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$*, координаты вектора* $\vec{a}$ *выражаются через его модуль и направляющие косинусы:*

$a_x = |\bar{a}|\cos\alpha$; $\quad a_y = |\bar{a}|\cos\beta$; $\quad a_z = |\bar{a}|\cos\gamma$;

2. В плоскости XOY найти вектор $\bar{a}$, перпендикулярный вектору $\bar{b} = (5; -3; 4)$, имеющий с ним одинаковую длину.

Ответы:

а) $\bar{a} = (0; \pm 15; \pm 25)$; б) $\bar{a} = (\pm\frac{15}{\sqrt{17}}; \pm\frac{25}{\sqrt{17}}; 0)$; в) $\bar{a} = (\pm 1; \pm 2; 0)$;

г) $\bar{a} = (\pm\frac{25}{\sqrt{17}}; \pm\frac{15}{\sqrt{17}}; 0)$.

Указание: *Найти* $|\bar{b}| = |\bar{a}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}$ *, затем решить систему уравнений* $\begin{cases} \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = |\bar{b}| \\ a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \end{cases}$ *по условию* $a_z = 0$ *т.к. вектор находится в плоскости* XOY

3. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = (2; 1; -2)$ и $\overrightarrow{AC} = (3; 2; 6)$

Ответы: а) $\frac{5\sqrt{17}}{2}$; б) $3\sqrt{20}$; в) 45; г) 60;

Указание:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\left|\overline{AB} \times \overline{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)^2}.$$

4. Найти длину вектора $\bar{c} = 3\bar{a} + 2\vec{b}$, если $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$ $\quad \varphi = (\bar{a} \wedge \bar{b}) = 120^0$.

Ответы: а) 20; б) $\sqrt{73}$; в) 15; г) $\sqrt{10}$;

Указание: $|\bar{c}| = \sqrt{\vec{c} \cdot \vec{c}} = \sqrt{(3\bar{a} + 2\bar{b})(3\bar{a} + 2\bar{b})}$

5. Дано $|\overline{a}|=1,\quad |\overline{b}|=2\quad (\overline{a}\wedge\overline{b})=\frac{2}{3}\pi$. Найти $\left|(\overline{a}+2\overline{b})\times(-\overline{a}+3\overline{b})\right|$.

Ответы:

а) $5\sqrt{3}$; б) $3\sqrt{3}$; в) 4; г) 6.

Указание: *Используя свойство векторного произведения раскрыть скобки* $(\overline{a}+2\overline{b})\times(-\overline{a}+3\overline{b})$, *затем найти его модуль, используя формулу* $\left|[\overline{a}\times\overline{b}]\right|=|\overline{a}||\overline{b}|\sin\varphi$.

6. Найти объем параллелепипеда построенного на векторах

$\overline{a}=(1;-2;1)$ $\overline{b}=(3;2;1)$ $\overline{c}=(1;0;-1)$

Ответы: а) 10; б) 12; в) 11; г)15.

Указание:

$$V_{парал}=\left|\overline{a}\overline{b}\overline{c}\right|,\qquad где\qquad \overline{a}\overline{b}\overline{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

7. Вычислить произведение $\overline{c}(\overline{b}+\overline{a})(2\overline{a}+\overline{c})$

Ответы: а) 0; б) $2\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; в) $-2\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; г) $3\overline{a}\overline{b}\overline{c}$;

Указание: *Используя определение смешанного произведения, а также свойства смешанного произведения раскрыть скобки.*

8. Найти ординату вектора $\overline{b}$, если известно, что векторы $\overline{a}=(2;-1;2)$, $\overline{b}=(1;y;3)$ и $\overline{c}=(3;-4;7)$ компланарны.

Ответы: а) $y=-2$; б) $y=2$; в) $y=0$; г) $y=3$.

Указание: *Решить уравнение* $abc=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0.$

9. Векторы a и b образуют угол $\varphi=\frac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\overline{a}|=1$; $|\overline{b}|=2$, вычислить $\left[(2\overline{a}+\overline{b})(\overline{a}+2\overline{b})\right]^2$.

Ответы: а) 27; б)29; в)0; г)10.

Указание: *Используя свойства векторного произведения, раскрыть скобки, упростить, а затем применить формулу* $|\overline{a}\times\overline{b}|=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\sin\varphi$.

10. Дан вектор $\overline{c}=16i-15j+12k$. Найти вектор d, параллельный вектору c и противоположного с ним направления, если $|d|=75$.

Ответы: а) $d=48i+36j-45k$; б) $d=-48i+45j-36k$; в) $d=48i-45j+36k$;
г) $d=48i+36j+45k$

Указание: $\overline{d}=|\overline{d}|\cdot\overline{d}^0,\quad \overline{d}^0=-\overline{c}^0$.

Вариант №8

1. Даны вершины треугольника $A=(3;2;-1)$, $B=(5;1;-1)$, $C=(1;-2;1)$

Найти проекцию вектора $\overline{BC}$ на $\overline{AB}$

Ответы: а) $-5\sqrt{29}$; б) $-\sqrt{5}$; в) $\frac{5}{29}$; г) -5;

Указание: *Проекция вектора $\overline{BC}$ на $\overline{AB}$ вычисляется по формуле:*

$$пр_{\overline{AB}}\overline{BC}=\frac{\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}\right)}{\left|\overline{AB}\right|},$$ *где*

$$(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})=(x_2-x_1)(x_3-x_2)+(y_2-y_1)(y_3-y_2)+(z_2-z_1)(z_3-z_2).$$

$$|AB|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

2. Найти площадь параллелограмма координаты вершин которого

$\boldsymbol{A}(1;1;4)$ $\boldsymbol{B}(2;3;-1)$ $\boldsymbol{C}(-2;2;0)$ $\boldsymbol{D}(-3;0;5)$

Вершина B противоположна D.

Ответы: а) 12; б) $\sqrt{156}$; в) $\sqrt{419}$; г) 37.

Указание: $S=\left|\overline{AB}\times\overline{AD}\right|$

3. При каком значении λ векторы $\vec{a}=\lambda i-j+2k$; $\vec{b}=4i-3j$; и $\boldsymbol{\vec{c}}=\lambda\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ компланарны.

Ответы: а) -4; б) 3; в) 4; г) 5.

Указание*: Решить уравнение* $abc=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$

4. Найти $|2\overline{p}|-3\overline{pq}+q^2$, если известно, что $\left|\overline{p}\right|=\sqrt{3}$; $\left|\overline{q}\right|=\frac{1}{2}$; $(\overline{p}\wedge\overline{q})=30^0$.

Ответы: а) $2(\sqrt{3}+1)$; б) $2(\sqrt{3}-1)$; в) $(2\sqrt{3}-1)/4$; г) $(2\sqrt{3}+1)/4$.

Указание: *Выполнить действия, учитывая, что*

$$\overline{p}\cdot\overline{q}=\left|\overline{p}\right|\left|\overline{q}\right|\cos(\overline{p}\wedge\overline{q}),\quad \overline{q}^2=\left|\overline{q}\right|^2,\ \left|2\overline{p}\right|=2\left|\overline{p}\right|$$

5. Найти вектор $\overline{b}$, коллинеарный вектору $\overline{a}=(2;1;-1)$ и удовлетворяющий условию $\overline{a}\cdot\overline{b}=3$.

Ответы:

а) $\overline{b}=\left(1;\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$; б) $\overline{b}=\left(\frac{3}{2};\frac{3}{4};-\frac{3}{4}\right)$; в) $\overline{b}=\left(-1;-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; г) $\overline{b}=\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$

Указание: *Координаты вектора $\overline{b}=\lambda\overline{a}$, λ найдете из условия $\overline{a}\cdot\overline{b}=3$.*

6. Даны вершины треугольника A(3;-1;5); B(4;2;-5); C(-4;0;3).
Найти длину медианы, поведенной из вершины А.
Ответы: а)5; б) 4; в) 8; г) 7.
Указание: *Координаты точки D можно найти из условия коллинеарности векторов* $\overrightarrow{BD}$ *и* $\overrightarrow{BC}$ *:* $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overline{BC}$ *, т.е. приравнять соответствующие координаты векторов* $\overrightarrow{BD}$ *и* $\overrightarrow{BC}$*, где точка D имеет координаты D(x,y),*

затем $\left|\overline{AD}\right|=\sqrt{\left(x_D-x_A\right)^2+\left(y_D-y_A\right)^2+\left(z_D-z_A\right)^2}$

7. Какой угол образуют единичные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, если известно, что векторы $\overline{m}=\overline{a}+2\overline{b}$ и $\overline{n}=5\overline{a}-4\overline{b}$ взаимно перпендикулярны.
Ответ: а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6}$; в) $\frac{\pi}{2}$; г) $\frac{2}{3}\pi$;

Указание: $\cos\varphi=\frac{\overline{a}\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\left|\overline{b}\right|}$, ab *найдете из уравнения* $\overline{m}\cdot\overline{n}=(a+2b)(5a-4b)=0$

При нахождении $\overline{m}\cdot\overline{n}$ *используйте свойства скалярного произведения.*
8. Дана сила $\overline{F}=(3;4;-2)$ и точка ее приложения $A(2;-1;3)$. Найти момент силы относительно точки $0(0;0;0)$.
Ответы:
а) $13\overline{i}+10\overline{j}+11\overline{k}$; б) $-10\overline{i}+13\overline{j}+11\overline{k}$; в) $11\overline{i}+10\overline{j}+13\overline{k}$; г) $-11\overline{i}-13\overline{j}+11\overline{k}$
Указание: *Момент силы* $\overline{F}$ *относительно точки А есть вектор* $\overline{m}=\overrightarrow{AO}\times\overline{F}$

$\overline{m}=\overline{AO}\times\overline{F}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$, *где* $\{x_1;y_1;z_1\}-$ *координаты вектора* $\overrightarrow{AO}$

$\{x_2;y_2;z_2\}-$ *координаты вектора* $\overline{F}$
9. Вычислить $3\left|\overline{a}\right|+\overline{b}\times\overline{c}-(2\overline{a}\cdot\overline{c})\times\overline{b}$
Ответы: а) $2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}$; б) не имеет смысла; в) 27; г) (2; 3; -4).
Указание: *Используйте определение модуля вектора, векторного произведения и смешанного произведения векторов.*

10. Даны векторы $\overline{a}=3\overline{i}+\overline{j}+2\overline{k}$; $\overline{b}=2\overline{i}+7\overline{j}+4\overline{k}$; $\overline{c}=\overline{i}+2\overline{j}+\overline{k}$.
Найти $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})$
Ответы: а) 13; б) 0; в) $46\overline{i}+12\overline{j}+29\overline{k}$; г) $-46\overline{i}+29\overline{j}-12\overline{k}$;

Указание: *Найти* $\overline{d}=\overline{b}\times\overline{c}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$, *затем* $\overline{a}\times(\overline{b}\times\overline{c})=\overline{a}\times\overline{d}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix}$.

Вариант №9

1. Даны три вектора $\vec{a}=(-2;0;-4);\ \vec{b}=(3;-4;2);\ \vec{c}=(-1;1;4)$

Вычислить $np_{b+c}\overline{a}$

Ответы: а) -4; б) 4; в) $2\bar{i}+3\bar{j}$; г)6.

Указание: *Вычислить сначала координаты вектора* $\bar{d}=\bar{b}+\bar{c}$, *а затем воспользоваться формулой*

$$np_{\bar{d}}\bar{a}=\frac{\bar{a}\cdot\bar{d}}{|d|},\quad где\quad \vec{a}\cdot\bar{d}=a_xd_x+a_yd_y+a_zd_z;\qquad |d|=\sqrt{d_x^2+d_y^2+d_z^2}$$

2. Определить точку, в которой прямая соединяющая точку А(4; 1) и В(-2; 4) пересекает ось ОХ

Ответы: а)(6; 0); б) (-6; 0); в) (4; 0); г) (1; 0).

Указание: *искомую точку М искать в виде* $M(x;0)$

Воспользоваться условием коллинеарности векторов $\overline{AB}$ *и* $\overrightarrow{AM}$, *их координаты должны быть пропорциональны. Решить полученное уравнение.*

3. Даны три вектора $\vec{a}=(-1;2;3);\ \vec{b}=(4;-1;0);\ \vec{c}=(-1;1;2)$.

Вычислить $|2\bar{a}+\bar{b}|+\bar{a}\times(\bar{c}\times 2\bar{b})$

а) не имеет смысла; б) 10; в) 27; с) 3.

Указание: *исходить из определения модуля вектора и векторного произведения векторов.*

4. Вычислить длину вектора $2\bar{a}-\bar{b}$, если $|\bar{a}|=2,\ |\bar{b}|=1$ и угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равен 60^0.

Ответы: а) $\sqrt{13}$; б)4; 3) 21; г) 3;

Указание: $|\bar{p}|=\sqrt{\bar{p}\cdot\bar{p}}$, *где* $\bar{p}=2\bar{a}-\bar{b}$.

5. При каких значениях α векторы $\vec{a}=(\alpha;1;2);\ \vec{b}=(1;\alpha;-2);\ \vec{c}=(-1;2;1)$ будут компланарны?

Ответы: а) $\alpha_1=1;\ \alpha_2=5;$ б) $\alpha_1=-5;\ \alpha_2=-1;$ в) $\alpha_1=5;\ \alpha_2=-1;$ г) $\alpha_1=1;\ \alpha_2=5;$

Указание; *Решить уравнение* $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}=0$

6. Луч образует с двумя осями координат углы 60^0. Под каким углом он наклонен к третьей оси?

Ответы: а) 30^0 б) 45^0 в) 60^0 г) 135^0

Указание: *Воспользоваться формулой* $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

7. Даны точки $A(-1;5;-10)$; $B(5;-7;8)$; $C(2;2;-7)$; $D(5;-4;2)$. Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны; установить какой из них длиннее и во сколько раз.

Ответы: а) $\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|}=3$ б) $\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|}=4$ в) $\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|}=2$ г) $\dfrac{|\overline{AB}|}{|\overline{CD}|}=1$

Указание: *Найти координаты векторов* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{CD}$. *Два вектора коллинеарны, если координаты пропорциональны:* $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

8. При каком значении λ векторы $\overline{b}=\lambda\overline{i}-5\overline{j}+3\overline{k}$; $\overline{c}=\overline{i}+2\overline{j}-\lambda\overline{k}$; взаимно перпендикулярны?

Ответы: а) 1; б) 5; в) 3; г) -5;

Указание: *Найти скалярное произведение векторов* $\overline{b}$ *и* $\overline{c}$, *приравнять нулю и решить полученное уравнение:* $\overline{b}\ \overline{c}=0$, *т.е.* $b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z = 0$

9. Вычислить синус угла, образованного векторами $\vec{a}=(1;2;-2)$; $\vec{b}=(6;2;3)$.

Ответы: а) $\sin\varphi=\dfrac{5\sqrt{17}}{21}$; б) $\sin\varphi=\dfrac{1}{2}$; в) $\sin\varphi=\dfrac{21}{5\sqrt{17}}$; г) $\sin\varphi=-\dfrac{5\sqrt{17}}{21}$.

Указание: $\sin\varphi=\dfrac{|\overline{a}\times\overline{b}|}{|\overline{a}||\overline{b}|}$, где $\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$, $|\overline{a}|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$,

$|\overline{b}|=\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}$,

10. Вычислить $(\overline{a}+2\overline{b}-\overline{c})[(\overline{a}-\overline{b})\times(\overline{a}-\overline{b}-\overline{c})]$

Ответы: а) $\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; б) $3\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; в) $-3\overline{a}\overline{b}\overline{c}$; г) $-\overline{a}\overline{b}\overline{c}$;

Указание: *Раскрыть скобки, используя свойства векторного и смешанного произведения векторов.*

Вариант №10

1. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точек $A(2;4;3);\ B(3;0;1)$.

Ответы: а) $(3;0;0)$; б) $(-3;0;0)$; в) $(-7{,}2;0;0)$; г) $(-9{,}5;0;0)$

Указание: *Найти координаты векторов* $\overline{OA}$ *и* $\overline{OB}$, *где* $O(x;0;0)$; *и решить уравнение* $\left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{OB}\right|$.

2. Даны четыре точки $A(-2;3;4);\ B(3;2;5);\ C(1;-1;2);\ B(3;2;-4)$.

Вычислить $пр_{CD}\overline{AB}$

Ответы: а) -3,5; б) 4/7; в) 1/7; г) $(3;0;1)$;

Указание: $пр_{CD}\overline{AB} = \dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{\left|\overline{CD}\right|}$, *где*

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} = (x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3) + (z_2 - z_1)(z_4 - z_3)$$

$$\left|\overline{CD}\right| = \sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2 + (z_4 - z_3)^2}$$

3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (3;0;4);\ \vec{b} = (1;-5;2)$.

Ответы: а) $\sqrt{629}$; б) 25; в) $\sqrt{621}$; г) 629.

Указание: $S_{\text{пар}} = \left|\overline{a}\times\overline{b}\right| = \sqrt{\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\right)^2 + \left(\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\right)^2}$

4. Даны три вектора $\vec{a} = (2;3;0);\ \vec{b} = (-1;4;2);\ \vec{c} = (-2;0;4)$. Вычислить $\overline{a}\cdot\overline{b} + 2\overline{c} - (\overline{a}\times\overline{b})\overline{c}$

Ответы: а) 27; б) 4; в) не имеет смысла; г) -5;

Указание: *При вычислении выражения исходить из определения скалярного произведения векторов, умножения вектора на число и смешанного произведения векторов.*

5. Вычислить объем пирамиды, заданной вершинами $A = (-1;2;3);\ B = (0;3;4);\ C = (2;0;1);\ B = (3;4;0)$;

Ответы: а) 25; б) $\dfrac{25}{6}$; в) $\dfrac{25}{2}$; с) $\dfrac{25}{3}$;

Указание: $V_{\text{пир}} = \dfrac{1}{6}\left(\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}\right) = \dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix}$

6. Найти $\left|3\overline{p}\right| - 4\overline{p}\cdot\overline{q} + \overline{q}^{\,2}$, если известно, что

$|p| = 2; \quad |q| = \sqrt{2}; \quad \varphi = (\overline{p}, \overline{q}) = 45^0.$

Ответы: а) 0; б) 2; в) -2; г) 5.

Указание: *Выполнить действия, учитывая, что* $\left|3\overline{p}\right| = 3\left|\overline{p}\right|;\ \overline{p}\cdot\overline{q} = |p||q|\cos\varphi;\ q^2 = \left|q^2\right|$

7. Вычислить $(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})\times\overline{c} + (\overline{a} + \overline{b} + \overline{c})\times\overline{b} + (\overline{b} - \overline{c})\times\overline{a}$

Ответы: а) $a\times b$; б) $2a\times c$; в) $-2a\times c$; с) $2b\times c$.

Указание: *Используя свойства векторного произведения раскрыть скобки.*

8. Даны точки $A = (-1; 5; -10);\ B = (5; -7; 8);\ C = (2; 2; -7);\ D = (5; -4; 2)$

Указать какие векторы коллинеарные.

а) $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$; б) $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$; в) $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$; г) $\overline{BC}$ и $\overline{CD}$

Указание: *у коллинеарных векторов координаты пропорциональны:*

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

9. Дана сила $\overline{F} = \left(4; 4; -4\sqrt{2}\right)$. Найти величину и направление силы F.

Ответы:

а) $\left|\overline{F}\right| = 4;\quad \alpha = 30^0;\quad \beta = 90^0;\quad \gamma = 135^0$; б) $\left|\overline{F}\right| = 8;\quad \alpha = 90^0;\quad \beta = 60^0;\quad \gamma = 60^0$;

в) $\left|\overline{F}\right| = 16;\quad \alpha = 60^0;\quad \beta = 135^0;\quad \gamma = 60^0$; г) $\left|\overline{F}\right| = 8;\quad \alpha = 60^0;\quad \beta = 60^0;\quad \gamma = 135^0$;

Указание: $\left|\overline{F}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};\quad \cos\alpha = \dfrac{x}{\left|\overline{F}\right|};\quad \cos\beta = \dfrac{y}{\left|\overline{F}\right|};\quad \cos\gamma = \dfrac{z}{\left|\overline{F}\right|}.$

10. Найти вектор *x,* зная, что он перпендикулярен к векторам $\overline{a} = \{2;3;-1\}$ и $\overline{b} = \{1;-2;3\}$ и удовлетворяет условию $x(2i - j + k) = -6.$

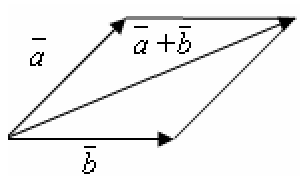
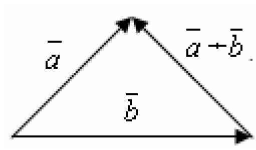
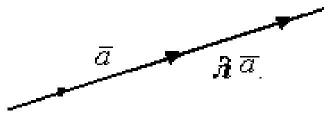
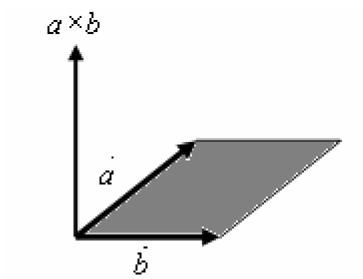
Ответы: а) $x = \{-3;3;3\}$; б) $x = \{3;-3;0\}$; в) $x = \{1;0;1\}$ г) $x = \{3;3;-3\}$

Указание: *Пусть x имеет координаты:* $x = \{x_1, y_1, z_1\}$. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} \overline{x}\cdot\overline{a} = 0; \\ \overline{x}\cdot\overline{b} = 0; \\ \overline{x}\cdot(2\overline{i} - \overline{j} + \overline{k}) = -6. \end{cases}$$

Приложение

Операции над векторами

Название операции	Ее определение	
	В векторной форме	В координатной форме
Сложение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$		$(\vec{a}+\vec{b})=\{X_1+X_{2;}Y_1+Y_2;Z_1+Z_2\}$
вычитание векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$		$(\vec{a}-\vec{b})=\{X_1-X_2;Y_1-Y_2;Z_1-Z_2\}$
Умножение вектора $\vec{a}$ на число λ		$(\lambda\vec{a})=\{\lambda X_1;\ \lambda Y_1;\ \lambda Z_1\}$
Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert\cdot\cos\varphi$	$\vec{a}\,\vec{b}=X_1\cdot X_2+Y_1\cdot Y_2+Z_1\cdot Z_2$
Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$		$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\end{vmatrix}$
Смешанное произведение векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\vec{c}$	$\overrightarrow{(a,b,c)}=\bar{a}\cdot\left(\bar{b}\times\bar{c}\right)$	$\overrightarrow{(a,\vec{b},\vec{c})}=\begin{vmatrix}X_1 & Y_1 & Z_1\\ X_2 & Y_2 & Z_2\\ X_3 & Y_3 & Z_3\end{vmatrix}$

Применения векторов

Применение	Математическая запись условия	
	В векторной форме	В координатной форме
Условия коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$	$\vec{a}=\lambda\vec{b}$	$\frac{X_1}{X_2}=\frac{Y_1}{Y_2}=\frac{Z_1}{Z_2}$
Условия перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$	$(\vec{a}\,\vec{b})=0$	$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0$
Условия компланарности векторов $\vec{a},\vec{b}$ и $\bar{c}$	$\overline{(\vec{a},\vec{b},\vec{c})}=0$	$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0$
Длина вектора $\vec{a}$	$\lvert\vec{a}\rvert=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$	$\lvert\bar{a}\rvert=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}$
Угол φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$	$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$	$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}$
Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$	S=$\lvert\vec{a}\times\vec{b}\rvert$	$S=\sqrt{\left(\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\right)^2+\left(\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right)^2}$
Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a},\vec{b}$ и $\bar{c}$	V=$(\vec{a},\vec{b},\bar{c})$	$V=\pm\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$

Литература

1. *Бугров Я.С., Никольский С.М*. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.-М.: Наука, 1984.
2. *Ильин В.А., Ким Г.Д.* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. М.:Изд-во Моск. Ун-та, 1998.
3. *Г.И. Просветов* Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Задачи и решения.М.:Изд-во БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008
4. *Клетенник Д.В*. Сборник задач по аналитической геометрии. СПб.: Специальная литература, 1998.
5. *Малугин В.А.* Математика для экономистов. Линейная алгебра.М.: Эксмо,2006.
6. *Лелевкина Л.Г.* Основы линейной и векторной алгебры. Задачи и упражнения для компьютерного тестирования.Учебно-методическое пособие-Бишкек: КРСУ-2001.